



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:

MARCELO MEIRELES NETO

ESTABILIDADE DE EDIFÍCIOS DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO COM
LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Fortaleza, Ceará
Agosto, 2012

MARCELO MEIRELES NETO

**ESTABILIDADE DE EDIFÍCIOS DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO COM
LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como parte integrante da obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador:

Prof. Dr. Evandro Parente Junior

Coorientador: Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque

Fortaleza, Agosto de 2012

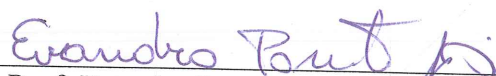
MARCELO MEIRELES NETO

ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO COM
LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em 30 / 08 / 2012

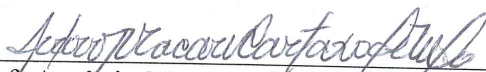
BANCA EXAMINADORA



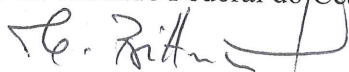
Prof. Evandro Parente Junior, Dr. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC



Prof. Augusto Teixeira Albuquerque, Dr. (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC



Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, Dr.
Universidade Federal do Ceará - UFC



Prof. Túlio Nogueira Bittencourt, Dr.
Universidade de São Paulo - USP

AGRADECIMENTOS

A Deus por sempre ter me dado forças e bênçãos.

Ao meu irmão Bruno Rocha por sempre me contagiar com ótimo humor.

À minha namorada Paula Passos por ter me encorajado em muitos momentos.

Aos meus pais Paulo Roberto Melo Meireles e Irani do Nascimento Rocha Meireles por toda a paciência, apoio e incentivo que me deram.

Aos meus orientadores Evandro Parente Junior e Augusto Teixeira de Albuquerque por todo o ensinamento e tempo confiados a mim durante esses anos.

Aos meus amigos Rafael Fernandes, Marcos Andrew, Iuri Barcelos e Luiz Antônio por todas as piadas, conselhos e ajuda que facilitaram esta caminhada.

A todos os professores e colegas do Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil com quem tive a chance de conversar, aprender e trocar ideias.

À CAPES pelo apoio financeiro dado ao desenvolvimento deste trabalho.

ESTABILIDADE DE EDIFÍCIOS DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Aluno: Marcelo Meireles Neto

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

Coorientador: Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque

RESUMO

A não linearidade física e geométrica tem grande influência sobre o comportamento estrutural de edifícios de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas, principalmente no que diz respeito a sua estabilidade global. Apesar disto, a maioria dos estudos sobre a estabilidade global de edifícios com ligações semirrígidas é baseada no uso de análises lineares, com os efeitos não lineares sendo considerados através de métodos simplificados. Assim, este trabalho visa estudar a estabilidade de pórticos planos de concreto pré-moldado considerando o efeito das ligações semirrígidas e a não linearidade geométrica e física. As ligações são modeladas através de um elemento finito de ligação desenvolvido e implementado neste trabalho. A não linearidade geométrica é tratada através do uso de um elemento de pórtico plano baseado na formulação corrotacional. A não linearidade física é considerada utilizando as curvas tensão-deformação da NBR 6118:2003 para aço e o concreto. A integração dos esforços é realizada através do Método das Fatias, implementado neste trabalho. As formulações e implementações foram validadas utilizando resultados disponíveis na literatura. A influência da rigidez das ligações sobre a estabilidade global, incluindo deslocamentos e esforços, foi estudada utilizando análises lineares e não lineares. Verificou-se que o aumento da rigidez das ligações reduz sensivelmente os deslocamentos laterais e efeitos de 2ª ordem de pórticos de concreto pré-moldado, mostrando que as ligações semirrígidas podem ser utilizadas como alternativa para garantir a estabilidade global. Verificou-se ainda que o parâmetro γ_z é uma ferramenta satisfatória para avaliar deslocamentos e momentos fletores na maioria dos casos, principalmente para ligações com maior rigidez.

Palavras-chave: *Concreto pré-moldado, ligações semirrígidas, estabilidade, análise não linear.*

ABSTRACT

The material and geometric nonlinearity has a strong influence on the structural stability of precast concrete buildings with semi-rigid connections. However, most studies about the global stability of such buildings are based on linear analyses, with the nonlinear effects being evaluated using approximate methods. Therefore, this work aims to assess the effect of the connection stiffness in the stability of precast concrete plane frames considering the geometric and material nonlinearities. The semi-rigid connections are modeled using a connection element developed and implemented in this work. The geometric nonlinearity due to large displacements is accounted for using plane frame elements based on the co-rotational formulation. The material nonlinearity is considered using the steel and concrete stress-strain curves of the NBR 6118:2003 standard. The stress integration is carried-out using the fiber method, implemented in this work. The formulations and implementations performed in this work were verified and validated using results available in the literature. After that, the influence of the connection stiffness on the global stability was studied using linear and nonlinear analyses. The results showed that the increase of connection stiffness greatly reduced the lateral displacements and the second-order effects of precast concrete frames, indicating that semi-rigid connections are an alternative to avoid stability problems of precast concrete frames. It was also concluded that the parameter γ_z generally leads to accurate displacements and bending moments, especially for frames with high stiffness connections.

Keywords: *Precast concrete, semi-rigid connections, stability, nonlinear analysis.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Centro de Eventos do Ceará (Fonte: Portfólio T&A, 2012).	17
Figura 2 - Equipes de resgate logo após o desabamento (Fonte: Portela, 2003).	18
Figura 3 – Ligações do tipo úmida (Fonte: Santos, 1985, <i>apud</i> Proença, 2012).	24
Figura 4 – Exemplo de ligações do tipo seca (Fonte: Santos, 1985, <i>apud</i> Proença, 2012).	25
Figura 5 – Tipologias típicas de ligações semirrígidas (Fonte: Araújo <i>et al.</i> , 2006).	27
Figura 6 – Deformabilidade das ligações (Fonte: El Debs, 2000).	28
Figura 7 - Momento fletor x rotação das ligações (Fonte: El Debs, 2000).	29
Figura 8 – Rigidez tangente.	30
Figura 9 - Linearização das curvas momento fletor – rotação (Fonte: Baldissera, 2006)... ..	30
Figura 10 – Sistema de forças para a ligação sob momento negativo e positivo (Fonte: Miotto, 2002).	32
Figura 11 – Rotação relativa do apoio (Fonte: NBR 9062:2006).	32
Figura 12 – Definição da rigidez secante da ligação viga-pilar (Fonte: NBR 9062:2006).	33
Figura 13 – Mecanismo de formação da rótula plástica (Fonte: Ferreira <i>et al.</i> , 2003).	34
Figura 14 – Exemplo de viga bi-engastada sob carregamento distribuído.	37
Figura 15 – Critérios de resistência e rigidez (Fonte: Jeremias, 2007).	38
Figura 16 – Valores diferentes de rigidez para momento positivo e negativo (Fonte: Mota, 2009).	39
Figura 17 – Situações possíveis para o equilíbrio.	40
Figura 18 – Pilar sob compressão (Fonte: Chages, 1974).	41
Figura 19 – Efeito da excentricidade. Adaptado de Hodges (2006).	44
Figura 20 – Efeito $P-\Delta$	44
Figura 21 – Tipos de ligações entre pilares e fundações (Fonte: Jeremias, 2007).	47
Figura 22 – Contraventamento por pilares engastados na base (Fonte: El Debs, 2000).	47
Figura 23 – Contraventamento por pórticos (Fonte: Jeremias, 2007).	48
Figura 24 – Distribuição dos esforços da estrutura deformada (Fonte: Jeremias, 2007). ...	49
Figura 25 – Contribuição dos núcleos de rigidez.	49
Figura 26 – Modelo do núcleo de rigidez.	50
Figura 27 – Pilar equivalente sob carga concentrada.	51
Figura 28 – Pilar equivalente sob carga distribuída.	52
Figura 29 – Colapso do edifício Ronan Point (Fonte: Wikipedia, 2012).	54
Figura 30 – Caminhos não lineares de equilíbrio.	57

Figura 31 - Descrição cinemática corrotacional (Adaptado de Battini, 2002).....	60
Figura 32 – Graus de liberdade e esforços respectivos do elemento.....	60
Figura 33 – Divisão da seção transversal em fatias.....	75
Figura 34 - Comportamento do concreto na compressão (Fonte: NBR 6118:2003).....	77
Figura 35 – Comportamento do concreto na tração (Fonte: NBR 6118:2003).	78
Figura 36 – Diagrama tensão-deformação para o aço (Fonte: NBR 6118:2003).....	78
Figura 37 – Elemento híbrido de pórtico plano (Fonte: Sekulovic, 2001).....	80
Figura 38 – Elemento híbrido de pórtico plano (Fonte: Chan e Chui, 2000 <i>apud</i> Santos, 2007).....	80
Figura 39 – Elemento de ligação semirrígida.....	81
Figura 40 – Compatibilização dos deslocamentos da ligação.	82
Figura 41 – Desaprumo (Fonte: NBR 6118:2003).....	85
Figura 42 – Viga em balanço de concreto armado (Fonseca, 2006).	87
Figura 43 – Caminho de equilíbrio da viga.	88
Figura 44 – Pórtico exemplo para verificação da NLG e NLF (Fonte: Melo, 2000).....	89
Figura 45 – Caminho de equilíbrio do pórtico.	90
Figura 46 – Coluna de Foure (Fonte: Bratina, 2004).	91
Figura 47 – Caminho de equilíbrio do pilar.	92
Figura 48 – Pórtico plano com ligações semirrígidas (Fonte: Sekulovic, 2001).....	93
Figura 49 – Modelo do pórtico analisado (Fonte: Ferreira <i>et al</i> , 2005).	95
Figura 50 – Deslocamentos horizontais.....	96
Figura 51 – Momentos na base do pilar P1.	97
Figura 52 – Momentos na base do pilar P2.	97
Figura 53 – Geometria e posição do pórtico analisado.	99
Figura 54 – Pórtico plano analisado.	101
Figura 55 – Malha da análise não linear geométrica e física.....	104
Figura 56 – Deslocamentos horizontais do topo.	106
Figura 57 – Momentos fletores na base do pilar P1.	107
Figura 58 - Momentos fletores na base do pilar P2.....	108
Figura 59 - Momentos fletores na base do pilar P3.....	108
Figura 60 – Caminhos de equilíbrio.	109
Figura 61 – Evolução da carga crítica.	110
Figura 62 – caminhos de equilíbrio para $\alpha_r = 0$	111
Figura 63 – Caminhos de equilíbrio para $\alpha_r = 0,5$	112

Figura 64 – Caminhos de equilíbrio para $\alpha_r = 1$	112
Figura 65 – Comparação da fissuração para $\alpha_r = 1$	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação das ligações. Adaptado de El Debs (2000).	25
Tabela 2 - Proposta de classificação das ligações semirrígidas (Ferreira et al, 2002)	36
Tabela 3 – Comprimento efetivo para diferentes condições de apoio.....	43
Tabela 4 – Valores para β	74
Tabela 5 – Limites de deslocamentos horizontais globais (NBR 9062, 2006).....	84
Tabela 6 – Deslocamentos e momentos para dois elementos por barra	93
Tabela 7 - Deslocamentos e momentos para quatro elementos por barra.	94
Tabela 8 – Carga crítica em ambas as análises.....	94
Tabela 9 – Composição do carregamento permanente.....	99
Tabela 10 – Resumo dos carregamentos permanentes e acidentais.	100
Tabela 11 Carregamentos de cálculo finais.....	100
Tabela 12 – Ação do vento de cálculo.....	101
Tabela 13 – Propriedades dos elementos.....	105
Tabela 14 – Parâmetros γ_z em função de α_r	105

LISTA DE SÍMBOLOS

Gregos

α – Parâmetro de estabilidade;

α – Rotação de corpo rígido;

α_R – Fator de restrição da ligação;

β – Fator de redução da rigidez;

β – Ângulo de inclinação do elemento no sistema global.

Δ – Deslocamento horizontal;

γ – Fator de restrição da ligação;

γ_z – Parâmetro de estabilidade;

ϕ – Rotação relativa entre elementos;

θ – Rotação absoluta do elemento;

$\bar{\theta}$ – Rotação do nó de elemento de barra no sistema local;

σ – Tensão normal;

σ_x – Tensão normal na direção do eixo da barra;

σ_c – Tensão do concreto;

σ_s – Tensão do aço;

σ – Vetor de tensões generalizadas;

σ_i – Tensão no centro da fatia;

ε – Deformação linear;

ε_x – Deformação linear;

ε_c – Deformação do concreto;

ε_s – Deformação do aço;

ε_{ct} – Deformação do concreto de tração;

ε_m – Deformação de membrana;

\mathfrak{F} – Vetor de forças generalizadas;

λ – fator de carga

Romanos

A_s – Área da seção de aço;

A – Área da seção transversal;

\mathbf{A} – Matriz auxiliar do elemento corrotacional local;

A_i – Área da fatia;

b_i – Largura da fatia;

β_a – Ângulo de inclinação do passo anterior

\mathbf{B} – Matriz de relação deformação-deslocamento;

\mathbf{C}_t – Matriz constitutiva

d – Altura efetiva na extremidade da viga;

E – Módulo de elasticidade do material;

EI_{eq} – Rigidez à flexão equivalente;

EI_{sec} – Rigidez secante à flexão da viga;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

E_{cs} – Módulo de elasticidade secante do concreto;

E_{ci} – Módulo de elasticidade inicial do concreto;

E_t – Módulo de elasticidade tangente;

f_{yk} – Tensão de escoamento do aço;

f_{ck} – Resistência característica do concreto à compressão;

f_{ctk} – Resistência característica do concreto à tração;

f_{cd} – Resistência de cálculo do concreto à compressão;

\mathbf{f} – Vetor de forças externas

$\bar{\mathbf{g}}$ – Vetor de forças internas no sistema local;

\mathbf{g} – Vetor de forças internas;

G – Grau de engastamento;

H – Força horizontal;

H – Altura total da obra;

$H_{1,2}$ – Polinômios de Hermite;

I_c – Momento de inércia bruta da seção de concreto;

I_{II} – Momento de inércia da seção homogeneizada fissurada no estágio II;

k – Rigidez relativa da ligação à rotação;

κ – Curvatura da barra;

\mathbf{k} – Matriz de rigidez do elemento de ligação;

K – Rigidez secante da ligação;
 K_t – Rigidez tangente da ligação;
 \mathbf{K}_e – Matriz de rigidez clássica ou elástica;
 $\bar{\mathbf{K}}$ – Matriz de rigidez elástica local;
 \mathbf{K}_g – Matriz de rigidez geométrica;
 $\bar{\mathbf{K}}_t$ – Matriz de rigidez no sistema local;
 \mathbf{K}_t – Matriz de rigidez tangente
 L_{ef} – Comprimento efetivo do vão da viga;
 L – Comprimento;
 L_e – Comprimento de embutimento de barras, comprimento de flambagem;
 L_p – Comprimento da região da ligação;
 L_2 – Polinômio de Lagrange linear;
 L_n – Comprimento final do elemento;
 L_o – Comprimento inicial do elemento;
 M – Momento fletor;
 M_{RC} – Momento resistente da ligação;
 M_E – Momento fletor da ligação semirrígida;
 M_R – Momento fletor de engastamento perfeito;
 M_1 – Momento de primeira ordem
 M_2 – Momento de segunda ordem;
 ΔM – Momento devido às forças verticais;
 M_{Tomb} – Momento devido às ações horizontais;
 $\bar{M}_{1,2}$ – Momento fletor do nó no sistema local;
 \bar{M} – Momento fletor em elemento de barra no sistema local;
 M_{tot} – Soma dos momentos de primeira e segunda ordem;
 N – Somatório de cargas verticais;
 N – Força normal;
 \bar{N} – Força axial no sistema local;
 \bar{N} – Esforço normal em elemento de barra no sistema local;
 npg – Número de pontos de Gauss;
 P_{cr} – Carga crítica de colunas;
 P – Força vertical;

\mathbf{r} – Vetor de forças desbalanceadas ou resíduo, vetor auxiliar da formulação corrotacional;
 R_{sec} – Rigidez secante da ligação;
 \mathbf{t}_k – Coluna k da matriz \mathbf{T}^T ;
 \mathbf{T} – Matriz de transformação de sistemas local para global;
 \mathbf{u} – Vetor de deslocamentos;
 \bar{u} – Deslocamento axial em elemento de barra no sistema local;
 $\bar{\mathbf{u}}$ – Vetor de deslocamento no sistema local;
 u_i – Deslocamento horizontal no sistema global;
 v_i – Deslocamento vertical no sistema global;
 w_i – Pesos de Gauss;
 Δa – Incremento de rotação
 Δx – Projeção inicial do elemento sobre o eixo x
 Δy – Projeção inicial do elemento sobre o eixo y
 $\Delta x'$ – Projeção final do elemento sobre o eixo x
 $\Delta y'$ – Projeção final do elemento sobre o eixo y
 Δy_i – Espessura da fatia de seção discretizada;
 \bar{y}_i – Posição da fatia em relação ao centro da seção;
 y – Distância vertical a partir do centroide da seção;
 \mathbf{z} – vetor auxiliar da formulação corrotacional.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	16
1.1. Objetivos.....	19
1.2. Trabalhos relacionados	19
1.3. Organização do texto	21
2. LIGAÇÕES DE ESTRUTURAS PRÉ-MOLDADAS	23
2.1. Critérios de projeto e classificação das ligações entre vigas e pilares	23
2.2. Modelagem de Ligações Semirrígidas	27
3. ESTABILIDADE GLOBAL DE EDIFÍCIOS	40
3.1. Equilíbrio e estabilidade	40
3.1.1. Efeito P-Delta	44
3.2. Contraventamento de estruturas pré-moldadas.....	46
3.3. Avaliação do contraventamento de estruturas	50
3.3.1. Parâmetro α	50
3.3.2. Parâmetro γ_z	52
3.4. Colapso progressivo	53
4. ANÁLISE ESTRUTURAL	55
4.1. Análise não linear	55
4.2. Não linearidade geométrica	58
4.2.1. Deformações	60
4.2.2. Transformação local-global e matriz de rigidez tangente.....	62
4.2.3. Elementos de viga Corrotacional	66
4.2.3.1. Elemento PLFRAMECR1	66
4.2.3.2. Elemento PLFRAMECR2.....	70
4.3. Não linearidade física	73
4.3.1. Rigidez secante dos elementos	73
4.3.2. Método das Fatias	75
4.4. Ligação semirrígida	79
4.4.1. Elementos híbridos	79
4.4.2. Elemento de ligação.....	81
4.5. Implementação computacional	82
4.6. Estados limites.....	83
5. EXEMPLOS	86

5.1.	Exemplos de verificação e validação	86
5.1.1.	Exemplo de verificação da não linearidade física	86
5.1.2.	Exemplo de verificação da não linearidade geométrica e física	88
5.1.3.	Exemplo de validação	90
5.1.4.	Exemplo de verificação das ligações.	92
5.2.	Análise linear e não linear geométrica com ligações semirrígidas.....	94
5.3.	Pórtico de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas.....	98
5.3.1.	Ações verticais e horizontais	99
5.3.2.	Tipos de análises realizadas	102
5.3.3.	Resultados	105
6.	CONCLUSÃO	114
6.1.	Sugestões para trabalhos futuros	115
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a NBR 9062:2006, o elemento de concreto pré-moldado é todo aquele elemento “*moldado previamente e fora do local de utilização definitiva na estrutura*”. O concreto pré-moldado deve atender ao controle de qualidade especificado pela norma e pode dispensar o uso de laboratório e outras instalações. Em particular, peças de concreto produzidas na própria obra e depois utilizadas para montar a estrutura são consideradas de concreto pré-moldado.

Ainda de acordo com a mesma norma, o concreto pré-fabricado consiste no elemento pré-moldado executado em instalações permanentes de empresas especializadas em sua fabricação. Diversas especificações devem ser atendidas, tais como mão de obra treinada, controle da matéria-prima, produção com auxílio de máquinas e outros requisitos. Portanto, peças de concreto pré-fabricado são aquelas produzidas fora da obra em fábricas especializadas. Devido ao processo de produção, incluindo o controle dos materiais e formas utilizadas, adensamento e cura, estes elementos possuem maior qualidade e precisão dimensional.

É importante notar que o concreto pré-moldado possui um maior grau de racionalização, controle de materiais e mecanização em sua produção quando comparado com o concreto moldado *in loco*. Assim, conclui-se que a utilização do concreto pré-moldado é uma forma de industrialização da construção civil, resultando em uma obra mais limpa e com maior produção.

Devido a suas vantagens, dentre elas uma maior velocidade de construção e um menor desperdício de materiais, as estruturas de concreto pré-moldado muitas vezes são utilizadas nos setores industriais e comerciais, proporcionando um retorno do investimento inicial mais rápido. Pode-se citar como exemplo ilustrativo o Centro de Eventos do Ceará (CEC), localizado em Fortaleza e inaugurado em agosto/2012. Segundo o site do governo do estado do Ceará (www.ceara.gov.br), é o segundo maior centro de eventos da América Latina e possui capacidade para 30.000 pessoas. A empresa responsável pela execução da estrutura relata que foram utilizados 26.000m³ de concreto e a obra possui 100.000m² de área construída. A Figura 1 mostra uma vista aérea da estrutura na época de sua construção.



Figura 1 – Centro de Eventos do Ceará (Fonte: Portfólio T&A, 2012).

Devido à forma de produção dos elementos, este sistema estrutural apresenta elementos com precisão da ordem de milímetros, maior limpeza e organização do canteiro, dentre outras vantagens.

Contudo, o concreto moldado *in loco* é a alternativa dominante no Brasil para a maioria das edificações, incluindo o caso de edifícios de múltiplos andares. Assim, este sistema estrutural possui força cultural no Brasil, o que se torna uma barreira técnica à utilização do concreto pré-moldado.

Uma dificuldade técnica importante enfrentada pelo concreto pré-moldado é a definição das propriedades das ligações. Deformação, ductilidade, durabilidade e rigidez são parâmetros que vêm sendo estudados por pesquisadores, mas ainda é necessário avançar muito nesta área.

Devido à dificuldade de modelar as ligações entre peças pré-moldadas, como vigas e pilares, ocorre que projetistas utilizem ligações rotuladas. Assim, a estrutura tende a ser isostática, implicando em maiores flechas nas vigas, deformações dos elementos e deslocamentos da estrutura. Como a execução de ligações rígidas em estruturas pré-moldadas é difícil, uma alternativa para reduzir os deslocamentos devidos às cargas horizontais e melhorar a estabilidade global de edifícios de concreto pré-moldado é a adoção de ligações semirrígidas.

Tragicamente, em 09 de setembro de 2003, ocorreu um desabamento durante a construção de um edifício de concreto pré-moldado localizado na cidade de Fortaleza (Diário do Nordeste, 2012). A obra consistia na construção de um edifício de cinco andares, mas infelizmente a edificação ruiu durante a execução do quarto pavimento. O colapso da estrutura resultou na morte de três operários e no ferimento do engenheiro responsável pela execução. A Figura 2 mostra as equipes de resgate em busca dos sobreviventes logo após o desabamento do edifício.



Figura 2 - Equipes de resgate logo após o desabamento (Fonte: Portela, 2003).

Segundo o laudo realizado pelo Conselho Regional de Engenharia e Agronomia do Ceará (CREA-CE) divulgado pela imprensa local, concluiu-se que o desabamento foi ocasionado por falha na montagem. Na escolha de uma execução rápida da estrutura, deixou-se de efetivar completamente as ligações previstas no projeto estrutural. Não houve a concretagem do capeamento das lajes à medida que a montagem de cada pavimento fosse concluída. Por fim, somados a esses fatos, não houve a efetuação da ligação da estrutura com a estrutura de contraventamento, a qual era a caixa do elevador.

Verifica-se assim que as ligações entre os elementos estruturais são um tema de estudo de grande importância para o projeto de edifícios de concreto pré-moldado, pois tanto as ligações entre vigas e pilares quanto entre pilares e fundações influenciam a rigidez e estabilidade de estruturas de concreto pré-moldado.

1.1. Objetivos

Considerando a importância das ligações sobre a segurança das estruturas, este trabalho visa contribuir para um melhor entendimento do efeito da rigidez das ligações semirrígidas entre vigas e pilares sobre a estabilidade global, deslocamentos e esforços de edifícios de concreto pré-moldado. Serão considerados edifícios de concreto pré-moldado cuja estrutura de contraventamento é composta por pórticos planos.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a estabilidade das estruturas de concreto pré-moldado com o efeito das ligações semirrígidas. O segundo objetivo é avaliar a adequação dos valores propostos pela NBR 6118:2003 para consideração da rigidez secante dos elementos estruturais

Outro objetivo importante deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional para a análise linear e não linear de pórticos de concreto pré-moldado. Em particular que seja capaz de considerar a rigidez das ligações semirrígidas e a não linearidade física do concreto e do aço, juntamente com a não linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos e rotações.

É importante destacar que essa ferramenta computacional desenvolvida será utilizada em todos os exemplos deste trabalho e poderá ser utilizada em trabalhos futuros. Isso ocorre pelo fato de ser uma ferramenta bastante abrangente e permitir ao usuário modificar diferentes parâmetros de entrada, como a rigidez das ligações, por exemplo.

1.2. Trabalhos relacionados

As estruturas de concreto pré-moldado são bastante estudadas e possuem diversos trabalhos tanto em âmbito nacional quanto internacional. Por ser um problema de grande importância, a estabilidade dessas estruturas é frequentemente pesquisada, bem como os fatores que possam influenciá-la.

Devido ao fato de influenciarem diretamente na estabilidade das estruturas de concreto pré-moldado, a rigidez à flexão das ligações entre vigas e pilares tem sido bastante pesquisada. Frequentemente são levantadas questões de como determinar a rigidez que uma ligação proporciona, fomentando a busca por modelos matemáticos mais sofisticados e ensaios de laboratório que façam a validação dos mesmos.

Dolan (1987), Görgün (1997) e Elliott (1998) perceberam a importância das ligações sobre a estabilidade e realizaram ensaios para avaliar a rigidez de diversos tipos de

ligações. No Brasil, Miotto (2002) e Baldissera (2006) também realizaram ensaios de ligações semirrígidas. Sendo todos com foco na resistência à flexão e melhor explicados no capítulo de ligações.

Havendo então muitos trabalhos referentes a ensaios, pesquisadores começaram a buscar formas de prever a rigidez a flexão das ligações. Ferreira *et al.* (2003) propõe o uso de uma equação para o cálculo do momento resistente da ligação. Alguns autores como Baldissera (2006) fazem uso de modelos analíticos, enquanto outros como Miotto (2002) usam ferramentas numéricas mais sofisticadas como o Método dos Elementos Finitos.

Outro aspecto importante é a necessidade de compreender como sua rigidez influencia na estabilidade das estruturas. Dessa forma, o Método dos Elementos Finitos tem sido a ferramenta de análise para realizar tais simulações. Diversos trabalhos como os de Sekulovic (2001) e Hawileh *et al.* (2010) desenvolveram diferentes elementos finitos de viga que incorporam a ligação semirrígida em sua formulação. Outros pesquisadores salientam a importância da consideração da não linearidade física na análise como forma de uma simulação mais precisa. Mota (2009) dentre diversas contribuições, apresenta um método para o cálculo da rigidez secante dos elementos estruturais. Fonseca (2006) estuda o efeito da não linearidade física de forma mais precisa através de modelos constitutivos encontrados na literatura para o concreto.

Oliveira (2011) realizou um estudo numérico e experimental de um pórtico de concreto pré-moldado. Nesse trabalho foram utilizados elementos de viga corrotacionais e o Método das Lamelas para se obter o efeito da não linearidade geométrica e física respectivamente, fazendo com que a análise fosse bastante refinada. Ressalta-se que a análise física considerou inclusive o efeito da fluência do concreto. Paralelamente, ele realizou o ensaio de um pórtico de concreto armado, o que o permitiu comparar resultados numéricos com experimentais.

Referente ao estudo de estabilidade de estruturas de concreto pré-moldado, Ferreira *et al.* (2005) avalia a estabilidade de um pórtico plano de concreto pré-moldado com diferentes ligações semirrígidas através de análises lineares e geometricamente não lineares. Semelhante a esse estudo, há o trabalho de Jeremias (2007), o qual apresenta exemplos com o intuito de orientar projetistas de estruturas de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas.

Araújo (2006) também estuda a estabilidade de estruturas de concreto pré-moldado. Ele também analisa o mesmo pórtico encontrado em Ferreira *et al.* (2005), mas

considera o efeito da plastificação da ligação e o concreto é representado por um modelo elastoplástico com fissuração disponível no programa ANSYS.

Marin (2009) estudou a estabilidade de um pórtico de concreto pré-moldado com uma ligação específica. A análise considerou a não linearidade geométrica e a não linearidade da curva momento x rotação da ligação. A não linearidade física foi considerada utilizando os diagramas $M \times N \times 1/r$. O programa comercial de elementos finitos ANSYS foi utilizado para análise estrutural.

Baseado nas hipóteses levantadas pela literatura, este trabalho visa o estudo da estabilidade de pórticos planos com ligações semirrígidas entre vigas e pilares através de análises que considerem a rigidez dessas ligações e a não linearidade geométrica e física da estrutura. É importante que fique claro que não se pretende estudar uma tipologia específica de ligação e sim definir a rigidez da conexão de forma paramétrica. A não linearidade física será considerada primeiramente de forma aproximada através da rigidez secante dos elementos e posteriormente de maneira mais precisa através do modelo constitutivo proposto pela NBR 6118:2003. Uma explicação mais aprofundada será feita no capítulo quatro.

1.3. Organização do texto

Este trabalho foi dividido em 6 capítulos. O primeiro capítulo é uma breve introdução sobre as estruturas de concreto pré-moldado, discutindo as vantagens, problemas e estudos realizados sobre esse sistema estrutural.

O segundo capítulo é uma revisão bibliográfica sobre as principais características das ligações semirrígidas. Neste capítulo são apresentados critérios de projeto, classificação e como pode ser feita a modelagem de ligações semirrígidas.

O terceiro capítulo aborda o tema de estabilidade global das estruturas de concreto. Nele são discutidos conceitos teóricos e práticos para avaliar deslocamentos e esforços devidos ao efeito de segunda ordem, bem como as medidas possíveis para o contraentamento de estruturas de concreto pré-moldado.

O quarto capítulo trata da análise estrutural. São vistos conceitos sobre o Método dos Elementos Finitos, formulação de elementos corrotacionais e sobre a consideração da não linearidade física do concreto. Também é detalhado como foi feita a implementação computacional dos elementos de ligação e do Método das Fatias.

O quinto capítulo trata da aplicação da teoria apresentada anteriormente em exemplos de verificação, validação e aplicação. São exemplos de vigas, pilares e pórticos de concreto armado e pré-moldado. Neste capítulo são descritos todos os parâmetros, metodologia e resultados obtidos.

O sexto capítulo trata das conclusões extraídas dos resultados obtidos dos exemplos e propõe temas adicionais para estudos futuros.

Por fim, encontram-se todas as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

2. LIGAÇÕES DE ESTRUTURAS PRÉ-MOLDADAS

Neste capítulo são discutidos diversos conceitos referentes às ligações semirrígidas, tais como classificação, características construtivas, critérios de projeto, representação matemática da rigidez e outros. Será dada ênfase às ligações entre vigas e pilares, devido a importância destas para a estabilidade de estruturas de concreto pré-moldado.

2.1. Critérios de projeto e classificação das ligações entre vigas e pilares

Como os elementos estruturais pré-moldados como vigas, pilares e lajes são produzidos separadamente e ligados entre si apenas durante a montagem da estrutura, o sistema estrutural de concreto pré-moldado requer a conexão dos elementos estruturais através de diferentes dispositivos mecânicos como chumbadores, soldas, traspasse de armaduras e outros. As conexões (ou ligações) devem ser capazes de transferir esforços, restringir os movimentos e proporcionar a estabilidade da estrutura.

O projeto das ligações é um dos aspectos mais importantes no projeto das estruturas de concreto pré-moldado. Atualmente, há a disposição do projetista diversas tipologias que podem ser empregadas nas diferentes situações que uma ligação se encontre, cabendo a ele a seleção da tipologia mais adequada. Contudo, além das tipologias, o projetista deve ser criterioso na escolha ou no desenvolvimento das ligações. Para isso, há muitos critérios a serem verificados tanto para classificação quanto para o projeto das ligações.

Com o intuito de organizar as ligações, pode-se tentar classificá-las em função de algumas características básicas. Essas características estão associadas a conceitos de função estrutural e a maneira de como a ligação é construída.

Como o próprio nome indica, uma ligação é o encontro de dois elementos estruturais, nesse caso, entre vigas e pilares. Como visto em disciplinas básicas de análise estrutural, uma ligação entre esses elementos é capaz de transmitir diversos tipos de esforços como o cisalhamento, tração, compressão, flexão e torção. Contudo, o momento fletor talvez seja o esforço de maior atenção devido à frequência e intensidade com que aparece quando comparado aos demais.

Desta forma, as ligações podem ser classificadas quanto ao tipo de vinculação entre os elementos. Ou seja, podem ser do tipo rígida, as quais restringem todos os

deslocamentos e garantem toda a transferência dos esforços de um elemento para o outro. Opostamente, podem ser articuladas, permitindo a rotação relativa e consequentemente sem transferir o efeito devido ao momento fletor vertical. As ligações podem ser classificadas também como semirrígidas. Nesta situação há uma restrição e transferência parcial dos efeitos devidos à rotação. Uma discussão mais aprofundada sobre as ligações semirrígidas será feita nos próximos itens.

Referente ao uso de concreto ou argamassa com a finalidade de garantir a continuidade da viga no encontro com o pilar, a ligação pode ser classificada em dois tipos. Diz-se que a ligação é do tipo úmida quando a viga é conectada ao pilar através do emprego de concreto ou argamassa produzido na obra. Quando a viga é ligada ao pilar através de chumbadores ou com emprego de concreto apenas na camada da capa da laje, a ligação será do tipo seca. A Figura 3 mostra dois exemplos de ligações viga-pilar do tipo úmida enquanto a Figura 4 mostra ligações do tipo seca.

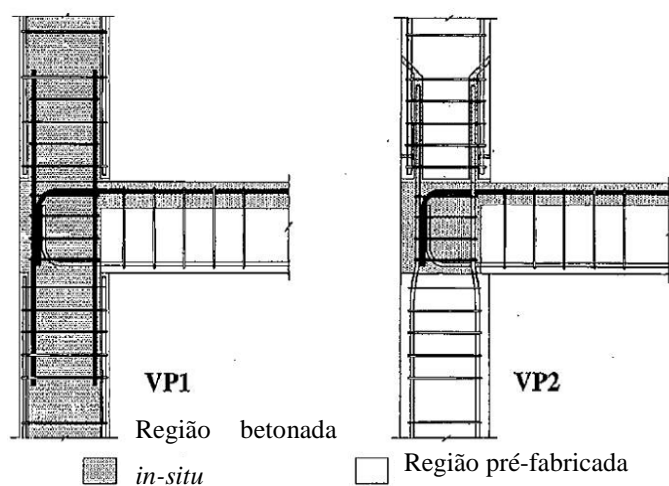


Figura 3 – Ligações do tipo úmida (Fonte: Santos, 1985, *apud* Proença, 2012).

No caso das ligações secas, a viga pode ser conectada por outros elementos que não seja o concreto. Como mostrado na Figura 4, isso pode ser feito através de parafusos ou soldas.

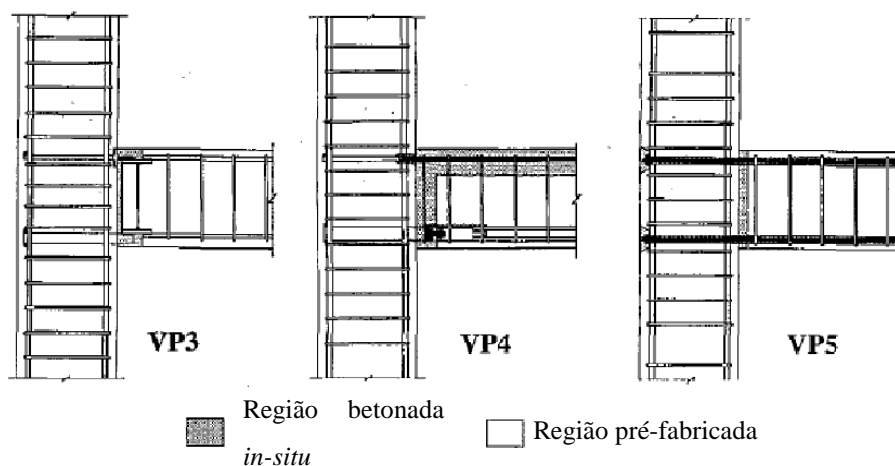


Figura 4 – Exemplo de ligações do tipo seca (Fonte: Santos, 1985, *apud* Proença, 2012).

Uma última classificação é quanto ao tipo de material empregado no apoio da viga com o console do pilar com a finalidade de amortecimento. Em linhas gerais, a ligação é do tipo macia quando há o emprego de material menos rígido entre os elementos pré-moldados. Geralmente este material é um elastômero como neoprene. O uso do elastômero leva a uma distribuição uniforme das tensões e permite a rotação entre os elementos. Quando o material usado nesse contato é o concreto ou alguma solda a ligação passa a ser dita como dura. A Tabela 1 apresenta as várias formas de classificação das ligações de estruturas pré-moldadas discutidas de forma resumida.

CLASSIFICAÇÃO	TIPO DE LIGAÇÃO
Tipo de vinculação	Articulada
	Engastada
	Semirrígida
Emprego do concreto e argamassa	Seca
	Úmida
Esforço principal transmitido	Compressão
	Tração
	Cisalhamento
	Momento fletor
	Momento torçor
Material de amortecimento	Dura
	Macia

Tabela 1 - Classificação das ligações. Adaptado de El Debs (2000).

Definidas as possibilidades de classificação das ligações, é importante conhecer os critérios relevantes para o desenvolvimento seguro de ligações. O PCI (2004) afirma que os principais critérios para o projeto são a resiliência, ductilidade, acomodações devido à mudança de volume, durabilidade, resistência ao fogo, construtibilidade, estética e resistência em zonas sísmicas.

O desenvolvimento de ligações para estruturas pré-moldadas tem sido bastante estudado por diversos pesquisadores. Na literatura há diversos trabalhos disponíveis, tanto acadêmicos (Gorgun 1997) quanto com viés comercial (PCI 2004). No Brasil, Miotto (2002) e Baldisserra (2006) propuseram novos tipos de ligações com características específicas quanto à resistência, ao momento fletor e facilidade de construção.

A questão da deformabilidade das ligações entre vigas e pilares tem sido objeto de estudo tanto na área de concreto pré-moldado quanto na área de estruturas metálicas e mistas. Mota (2009) realizou uma ampla revisão bibliográfica, mostrando diversos trabalhos realizados sobre a deformabilidade de ligações de estruturas pré-moldadas.

Segundo Jeremias (2007), no estudo das ligações semirrígidas, busca-se que a conexão tenha desempenho satisfatório quanto à resistência, rigidez e ductilidade. Elas devem ser resistentes o suficiente tanto para garantir a estabilidade quanto para resistir às forças atuantes. A ligação deve possuir a rigidez necessária para transferir o momento fletor aos elementos a ela conectados como previsto na análise estrutural.

É importante salientar a diferença entre resistência e rigidez, pois são características importantes na etapa do projeto de uma ligação. O conceito de rigidez está relacionado à inclinação da relação tensão-deformação, força-deslocamento ou momento-rotação, enquanto a resistência está relacionada ao nível de carga onde ocorre a ruptura. Portanto, podem existir ligações com a mesma rigidez e resistências diferentes e vice-versa.

Referente à ductilidade, o PCI (2004) a define como a habilidade de sofrer deformações inelásticas sem chegar à ruína. Na fase do projeto da ligação, procura-se aprimorar essa característica a fim que o aço se deforme antes das falhas em soldas ou da ruptura do concreto. É uma propriedade importante a se considerar quando a estrutura está localizada em áreas com maior intensidade e frequência de atividade sísmica.

Na literatura existem diversos trabalhos que propõem novos tipos de ligação e assim realizam ensaios para caracterizá-las. Conseqüentemente, as suas características como resistência, rigidez e ductilidade devem ser avaliadas. Vale citar os trabalhos bastante conhecidos como o de Gorgun (1997) e Dolan et al. (1987). Nessas pesquisas se

encontram considerações e procedimentos sobre como realizar os ensaios necessários. A Figura 5 mostra os tipos de ligações estudados por esses pesquisadores.

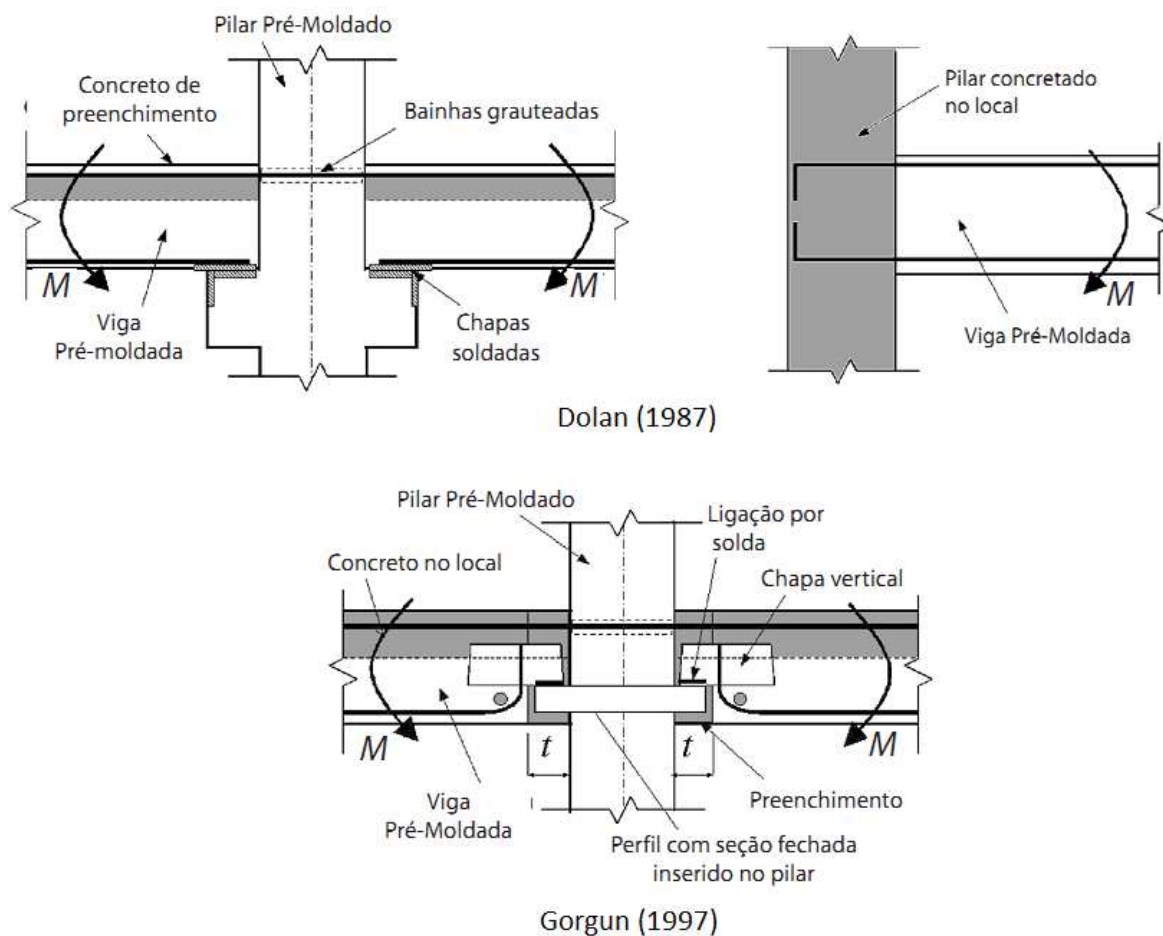


Figura 5 – Tipologias típicas de ligações semirrígidas (Fonte: Araújo *et al.*, 2006).

2.2. Modelagem de Ligações Semirrígidas

Na etapa de análise de um projeto estrutural, o engenheiro deve conceber um modelo matemático que seja o mais fiel possível à estrutura que será executada em campo. Como se sabe, nesta etapa é feito um levantamento de dados, tais como carregamentos, geometria dos elementos e definições dos apoios. A partir destes são considerados a partir do tipo de ligação entre as peças estruturais.

Em um projeto típico, estas ligações geralmente são dadas por engastes ou livres à rotação. Contudo, salvo alguns casos, as ligações, quando executadas, podem não apresentar a rigidez necessária que garanta um perfeito engaste impedindo a rotação relativa entre os elementos ou rigidez nula à rotação como uma articulação perfeita

(rotação relativa livre). Assim, grande parte das ligações reais apresenta um comportamento intermediário entre as ligações rígidas e ligações flexíveis ou articuladas.

Desta forma, as ligações podem ter três tipos de classificação quanto ao tipo de vinculação. Articulada, quando não transmite momento fletor entre os elementos estruturais conectados (e.g viga-pilar) sendo livre a rotação relativa entre estes elementos. Rígida, quando transmite totalmente o momento fletor e a rotação relativa entre os elementos é nula. Semirrígida, quando transmite parte do esforço do momento fletor aplicado sendo permitida a rotação relativa entre os elementos.

A definição para ligações rígidas é entendida que mesmo após o carregamento, o ângulo formado entre os eixos dos elementos não varia, isto é, não há rotação relativa entre os elementos estruturais. Diferentemente, após o carregamento, ligações semirrígidas apresentam alguma rotação relativa ϕ entre os elementos. Isto ocorre por haver uma menor rigidez a flexão. A Figura 6 exemplifica a diferença das ligações para o caso entre pilar e viga.

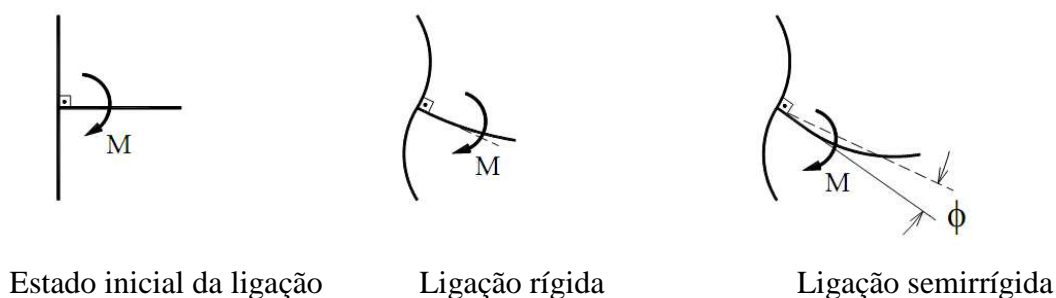


Figura 6 – Deformabilidade das ligações (Fonte: El Debs, 2000).

El Debs (2000) discute os tipos e características das ligações em pré-moldados e apresenta um diagrama genérico que relaciona momentos fletores e rotações das ligações, como se pode ver na Figura 7.

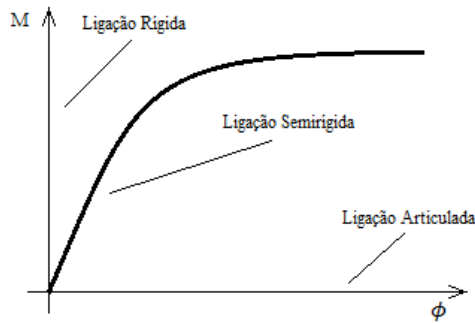


Figura 7 - Momento fletor x rotação das ligações (Fonte: El Debs, 2000).

Lembrando da lei de Hooke e considerando uma relação linear entre o momento e a rotação, é possível relacionar matematicamente estas variáveis através da rigidez à rotação:

$$K = \frac{M}{\phi} \Rightarrow M = K \phi \quad (1)$$

sendo K a rigidez da mola, a qual representa a ligação, M o momento fletor aplicado e ϕ a rotação relativa entre os elementos.

Para maiores deslocamentos, a rigidez K da ligação deixa de ser constante, mas pode ser avaliada através do diagrama momento x rotação, como visto na Figura 7. Caso seja possível traçar esta curva, Aguiar (2010) comenta que a rigidez pode ser obtida através da derivada desta função:

$$K_t = \frac{dM}{d\phi} \quad (2)$$

onde K_t representa a rigidez tangente da ligação semirrígida, que depende da rotação relativa (ϕ). Alguns autores propõem a análise das estruturas com essa rigidez tangente, para tanto, toma-se por base o ponto de origem do gráfico, o que pode ser conhecido como rigidez tangente inicial. A Figura 8 apresenta esse conceito.

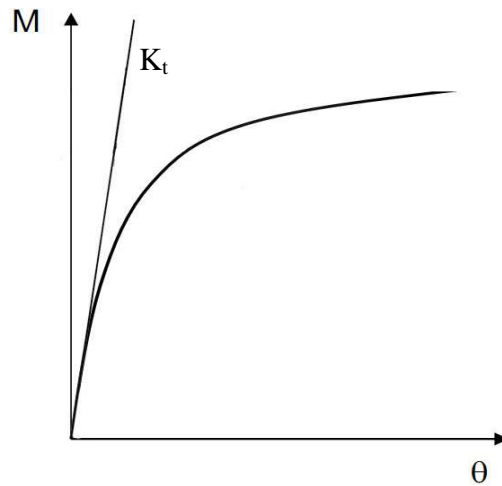


Figura 8 – Rigidez tangente.

“Com o objetivo de simplificação dos cálculos, ao se projetar estruturas de concreto pré-moldado é comum promover uma linearização [...]” (BALDISSERRA, 2006). Como se pode notar da Figura 9, a curva momento x rotação pode apresentar um ponto de plastificação, a partir do qual a rotação sai do regime elástico e passa para o regime plástico. Na verdade, a linearização é uma maneira para descrever esta curva por trechos. Esta linearização poderia ainda ser bi ou tri-linear, como pode ser vista na Figura 9. É interessante notar que a curva da Figura 9(a) a um modelo elastoplástico perfeito.

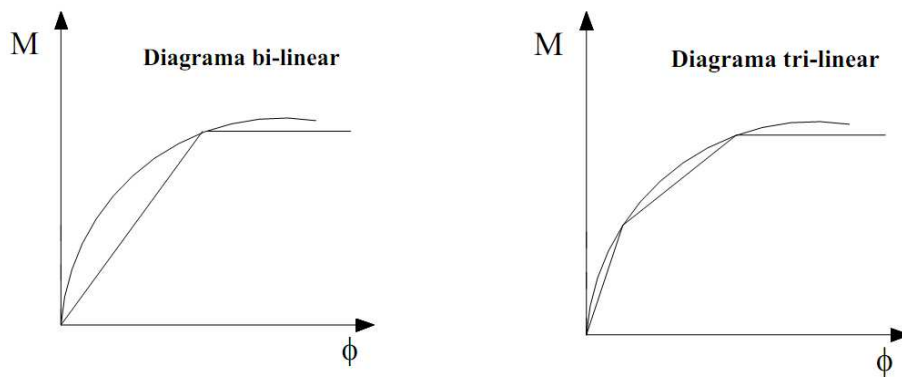


Figura 9 - Linearização das curvas momento fletor – rotação (Fonte: Baldisserra, 2006).

Pode-se notar da Figura 9, que a partir de um dado momento, a rotação começa a aumentar, mantendo o valor do momento constante. Em outras palavras, o carregamento foi grande o suficiente para plastificar a ligação. Porém, como os diagramas estão linearizados, este procedimento se mostra mais conservador e conseqüentemente a favor da segurança.

Outra característica importante da ligação é a capacidade de rotação (*rotation capacity*). Esta capacidade está diretamente relacionada com as propriedades dos materiais e o projeto da ligação, principalmente à ductilidade. Caso uma ligação tenha comportamento frágil, a ruptura será devida à fratura com pequena rotação, enquanto uma ligação dúctil fornece uma curva não linear com maiores rotações.

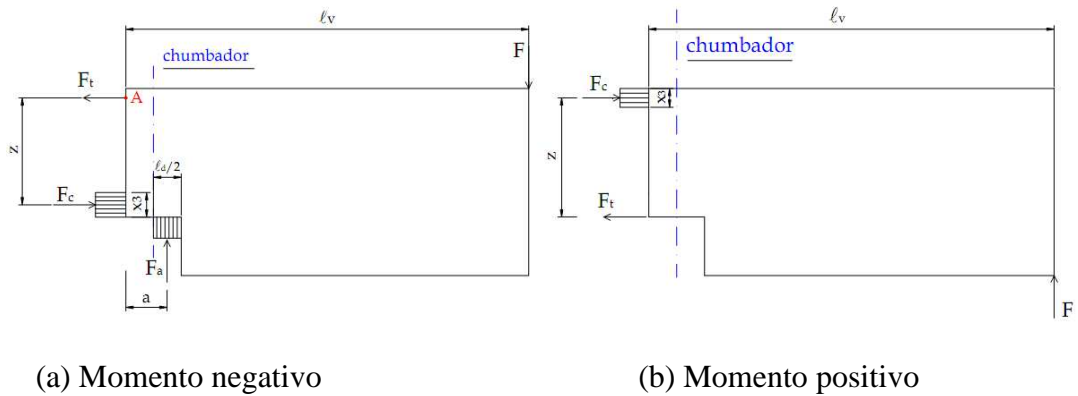
A caracterização da curva momento x rotação de uma ligação pode ser feita de diferentes maneiras:

- Ensaios de laboratório
- Modelos de elementos finitos
- Modelos analíticos simplificados

Seria uma situação desejável que a curva momento x rotação fosse obtida através de ensaios, porém trata-se de um procedimento demorado, oneroso e de pouca praticidade para projetos de estruturas pré-moldados. Alternativamente, a curva de momento x rotação pode ser obtida através de simulação numérica, com auxílio do Método dos Elementos Finitos, o que permite considerar a não linearidade física do material, a geometria espacial da ligação, a influência de conectores, fissuração do concreto, apoios, etc. Contudo, é um processo trabalhoso, demorado e complexo, não sendo também muito adequado para projeto.

Os modelos analíticos simplificados buscam equacionar simultaneamente o conjunto das características dos componentes da ligação que influenciam a deformação. Estes componentes são representados por associações em série e em paralelo de molas, lineares ou não, para redução da complexidade do problema. Miotto (2002) utilizou esses tipos de modelos para o cálculo da rigidez da ligação de seu estudo. Esta metodologia é conhecida na literatura como Método dos Componentes.

Em seu trabalho, Miotto (2002) caracteriza a curva momento x rotação de uma de suas ligações tendo como base o diagrama trilinear. Nessa caracterização, foram utilizados dois sistemas de forças para representar as situações em que a ligação estivesse sob momento negativo e positivo. Dessa maneira, pode-se determinar o momento de plastificação da ligação.



(a) Momento negativo (b) Momento positivo
 Figura 10 – Sistema de forças para a ligação sob momento negativo e positivo (Fonte: Miotto, 2002).

A NBR 9062:2006 propõe o uso do fator de restrição (α_R) como parâmetro de referência para a classificação de uma ligação. Segundo esta norma, “o fator de restrição à rotação pode ser interpretado como a relação da rotação θ_1 da extremidade do elemento em relação à rotação combinada θ_2 do elemento e da ligação devido ao momento de extremidade”. As rotações θ_1 e θ_2 são ilustradas na Figura 11. De acordo com a NBR 9062:2006, caso o fator de restrição esteja compreendido entre 0,15 e 0,85, a ligação é considerada semirrígida.

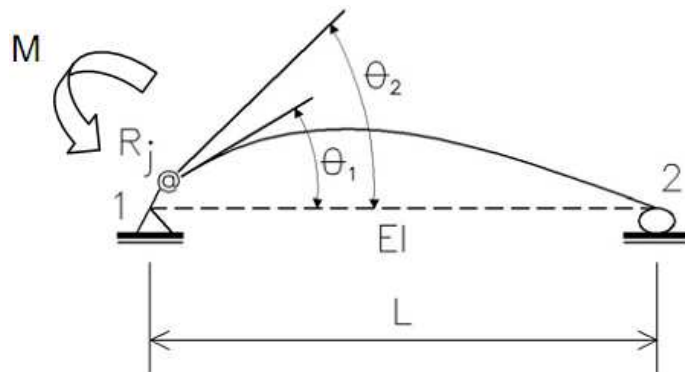


Figura 11 – Rotação relativa do apoio (Fonte: NBR 9062:2006).

A expressão matemática do fator de restrição é definida pela NBR 9062:2006 como:

$$\alpha_R = \frac{1}{1 + \frac{3(EI)_{sec}}{R_{sec} L_{ef}}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (3)$$

onde α_R é o fator de restrição, R_{sec} é a rigidez secante da ligação, $(EI)_{sec}$ é a rigidez secante da viga e L_{ef} é o comprimento efetivo do vão da viga. Entretanto, a rigidez da ligação viga-pilar ao momento fletor, como visto, não é linear. Como recomendação, a NBR 9062:2006 permite que se use a rigidez secante R_{sec} em uma análise linear como forma de considerar a não linearidade física da ligação. A rigidez secante da ligação é tomada como a inclinação de uma reta que passa pela origem e pelo ponto de início de plastificação da ligação, conforme mostra a Figura 12.

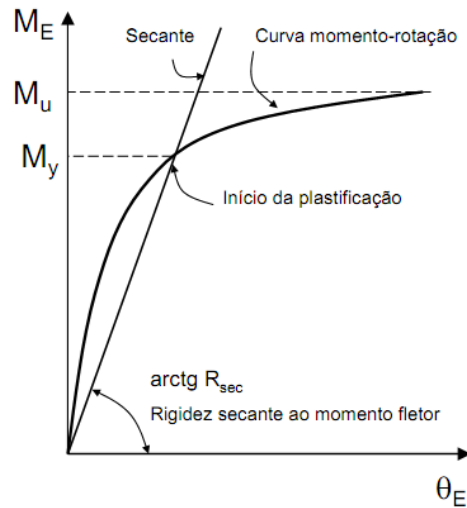


Figura 12 – Definição da rigidez secante da ligação viga-pilar (Fonte: NBR 9062:2006).

Na Equação (3), usa-se a rigidez secante para o cálculo do fator de restrição como forma de classificação da rigidez da ligação. Por outro lado, pode-se querer identificar qual seria o valor da rigidez secante para um dado fator de restrição já especificado. Isto permite que seja investigada a rigidez necessária de uma ligação que garanta a estabilidade e deslocamentos aceitáveis de uma estrutura. Com algumas operações, a Equação (3) pode ser reescrita como:

$$R_{sec} = \frac{3(EI)_{sec}}{L_{ef}} \left(\frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R} \right) \quad (4)$$

Em um trabalho bastante citado, Sekulovic (2001) define a rigidez da ligação semirrígida (K) como:

$$K = \frac{3EI}{L} \left(\frac{\gamma}{1 - \gamma} \right) \quad (5)$$

Verifica-se que a Equação (5) corresponde à Equação (4), com K representando a rigidez secante R_{sec} e γ representando o fator de restrição (*fixity factor*) α_R .

De acordo com as Equações (4) e (5), conclui-se que o fator de restrição pode assumir valores compreendidos entre 0 e 1, os quais representam uma ligação perfeitamente articulada ($K = 0$) e perfeitamente rígida ($K = \infty$), respectivamente. Por serem valores teóricos, a NBR 9062:2006 estabelece o intervalo mencionado anteriormente para a classificação da ligação no momento da análise. Caso α_R seja inferior a 0,15 admite-se uma ligação articulada e caso α_R seja superior a 0,85 considera-se uma ligação rígida.

Depois de realizado um ensaio de uma ligação viga-pilar, Ferreira *et al.* (2003) propuseram um modelo teórico para o cálculo da rigidez secante de uma ligação submetida a momento fletor negativo. Segundo seu modelo, a extremidade da viga próxima é considerada como uma região de distúrbio. Nesta região a rigidez da viga é reduzida e a curvatura é descontínua, o que favorece a formação de mecanismos de rótula plástica. A Figura 13 ilustra a deformação de uma ligação segundo essas hipóteses.

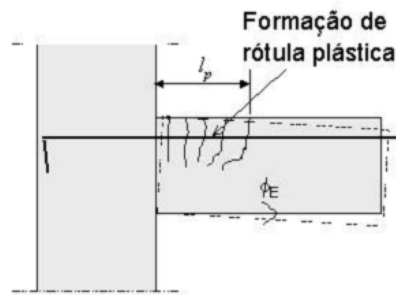


Figura 13 – Mecanismo de formação da rótula plástica (Fonte: Ferreira *et al.*, 2003).

Segundo Ferreira *et al.* (2003), ligações resistentes à flexão deverão apresentar o mecanismo de formação de rótula plástica como ilustrado na Figura 13. Logo, supõe-se que o modelo proposto seja adequado para outras ligações em que haja armadura de continuidade resistindo à flexão. Assim, considerando a fissuração do concreto e o escoamento do aço das barras de continuidade, a rigidez secante da ligação sob a ação de momento negativo é dada pela expressão:

$$K = \frac{M_{RC}}{\phi_C} = \left[\frac{L_e}{0,9E_S A_S d^2} + \frac{L_P}{E_{CS} I_{II}} \right]^{-1} \quad (6)$$

onde L_e é o comprimento de embutimento das barras dentro do pilar, L_P é o comprimento da região da ligação, d é a altura efetiva na extremidade da viga, A_S é a área da seção de aço, E_S é o módulo de elasticidade do aço, E_{CS} é o módulo de elasticidade secante do concreto, I_{II} é o momento de inércia da seção homogeneizada fissurada no estágio II, M_{RC} é

o momento resistente da ligação quando a armadura de continuidade começa a escoar, ϕ_C é a rotação relativa entre a viga e o pilar devida ao momento M_{RC} . Este momento é dado por:

$$M_{RC} = 0,9A_s f_{yk} d \quad (7)$$

onde f_{yk} é a tensão de escoamento das barras de continuidade.

No lugar do fator de restrição, as ligações semirrígidas podem ser também caracterizadas utilizando o conceito do grau de engastamento. De acordo com Mota (2009), “o grau de engastamento (G) é a relação entre o momento fletor na extremidade da viga considerando a ligação semirrígida (M_E) e o momento fletor de engastamento perfeito (M_R)”. É um parâmetro que também varia de 0 a 1, representando uma ligação articulada e uma ligação perfeitamente rígida respectivamente. Contudo, costuma-se empregá-lo na forma percentual, o que passaria a variar de 0% a 100%. A expressão do grau de engastamento pode ser dada em função do fator de restrição:

$$G = \frac{M_E}{M_R} = \frac{3\alpha_R}{2 + \alpha_R} \quad (8)$$

Outro parâmetro utilizado na caracterização de ligações semirrígidas é a rigidez relativa (k), definida a partir da rigidez da ligação e da rigidez à flexão da viga:

$$k = \frac{K}{(EI/L)} \quad (9)$$

Portanto, o fator de restrição pode ser escrito como:

$$\alpha_R = \frac{k}{k + 3} \quad (10)$$

Finalmente, o grau de engastamento pode ser calculado em função da rigidez relativa:

$$G = \frac{M_E}{M_R} = \frac{3k}{3k + 6} \quad (11)$$

Neste trabalho, a rigidez das ligações será caracterizada utilizando o fator de restrição α_R , uma vez que este parâmetro é recomendado pela NBR 9062:2006 e amplamente utilizado na literatura sobre ligações semirrígidas. Caso necessário, a correspondência com os parâmetros G e k , pode ser realizada utilizando as Equações (9) e (11).

Ferreira *et al.* (2002) ressaltou que não basta saber se uma ligação é ou não do tipo semirrígida, pois isso não fornece informações referentes para projeto de ligações e análise da estrutura. Diante disso e procurando um meio de avaliar as ligações de maneira menos qualitativa e mais quantitativa do desempenho das ligações, ele propôs um sistema de classificação, o qual é resumido na Tabela 2.

Tabela 2 - Proposta de classificação das ligações semirrígidas (Fonte: Ferreira *et al*, 2002).

Zonas	Intervalo do fator de restrição
Zona I – Ligação Articulada	$0,00 \leq \alpha_R < 0,14$
Zona II – Ligação semirrígida com baixa restrição a flexão	$0,14 \leq \alpha_R < 0,40$
Zona III – Ligação semirrígida com média restrição a flexão	$0,40 \leq \alpha_R < 0,67$
Zona IV – Ligação semirrígida com alta restrição a flexão	$0,67 \leq \alpha_R < 0,86$
Zona V – Ligação rígida	$0,86 \leq \alpha_R < 1,00$

Segundo esse método, as ligações que estiverem na primeira zona, são consideradas articuladas, não oferecendo rigidez significativa à flexão, mas devem-se tomar cuidados com a rotação sofrida no apoio.

A segunda zona indica ligações semirrígidas e com baixa rigidez à flexão. As ligações enquadradas nessa zona talvez não sejam indicadas para ajudar o contraventamento da estrutura, mas já apresentam grande contribuição para pequenos edifícios (até quatro andares).

A terceira e quarta zona abrangem ligações semirrígidas que possuem rigidez significativa à flexão, mas deve-se ser cauteloso com a resistência das ligações. Por fim, a quinta zona representa as ligações consideradas rígidas.

Adicionalmente ao método de classificação das ligações e da forma como a rigidez pode ser definida, o Método *Beam-Line*, como visto em Jeremias (2007) se revela como ferramenta importante para avaliar os critérios de resistência e rigidez de uma ligação. Através desse método, é possível verificar se a resistência ao momento fletor ou a rigidez relativa da ligação são suficientes para suportar o carregamento atuante. Como o nome desse método sugere, a *beam-line* consiste em uma reta sobre o gráfico momento versus rotação. Este método parte do princípio que a ligação não pode ser o ponto fraco da estrutura. Desta forma, a ruptura da estrutura deve começar pelos elementos estruturais (viga/pilar) e não pela ligação.

Esta reta une o ponto do momento de uma ligação perfeitamente rígida com o ponto de uma rotação de uma ligação articulada. Pelo seu conceito, se a curva que caracteriza a rigidez da ligação ultrapassar a reta *beam-line*, afirma-se que a resistência da

ligação semirrígida é compatível com a rigidez, garantindo que a falha ocorra no elemento estrutural e não na ligação.

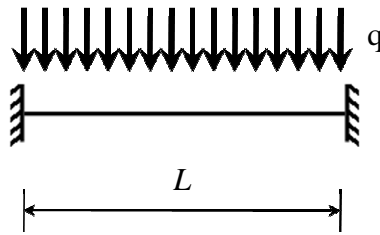


Figura 14 – Exemplo de viga bi-engastada sob carregamento distribuído.

Como é admitido que o carregamento sobre a viga seja distribuído, como mostrado na Figura 14, o momento nos apoios de uma viga bi-engastada é dado por

$$M_R = \frac{qL^2}{12} \quad (12)$$

Para o caso de uma ligação articulada, a rotação relativa é dada por:

$$\theta_R = \frac{M_R L}{2EI} \quad (13)$$

É importante salientar que L é o comprimento da viga e EI é a rigidez à flexão. Assim, dependendo dos critérios de análise, pode-se modificar o valor da rotação através da consideração da não linearidade física do concreto. Caso se deseje considerar a fissuração, pode-se reduzir a rigidez à flexão da viga por meio dos coeficientes redutores. Uma melhor descrição desses coeficientes será feita no Capítulo 4.

A Figura 15 exemplifica o conceito do Método *Beam-Line* com quatro tipos de ligações. Desses tipos, apenas as ligações A e B seriam adequadas, pois a resistência dada pelo momento de plastificação da ligação, M_y , está além da reta *beam-line*. Talvez a rigidez, dada pela inclinação da reta secante, não seja suficiente para assegurar a estabilidade da estrutura, mas garante que a falha ocorra pelo elemento e não pela ligação. Nota-se que a ligação C possui uma rigidez superior à ligação B devido a uma maior inclinação da rigidez secante, porém apresenta uma resistência inferior, abaixo da reta *beam-line*, o que a torna inadequada.

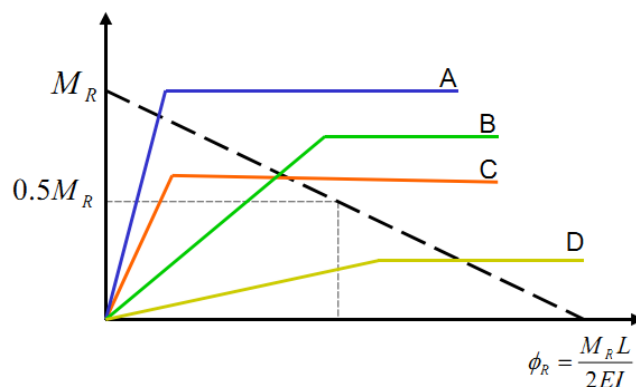


Figura 15 – Critérios de resistência e rigidez (Fonte: Jeremias, 2007).

Obviamente, no caso de uma viga em que só exista carregamento vertical, o momento que aparecerá nas ligações será negativo. Contudo, é possível que haja uma combinação de carregamentos em que o momento na ligação possa ser positivo. Isso leva a deduzir que é importante que a ligação apresente resistência e rigidez adequadas, bem como comportamento não linear, neste caso a capacidade de plastificação, para os dois sentidos em que possa ser solicitada. É o caso da ação do vento sobre a estrutura. Sua atuação proporciona o aparecimento de momento positivo, assim, conclui-se que a rigidez ao momento positivo também possui participação relevante na estabilidade dos edifícios de concreto pré-moldado.

Devido à geometria da ligação e propriedades mecânicas dos materiais, a rigidez da ligação muito provavelmente apresentará diferença comparada à rigidez ao momento negativo. Esta situação é exemplificada na Figura 16, a qual mostra uma ligação com rigidez diferente para os momentos positivo e negativo.

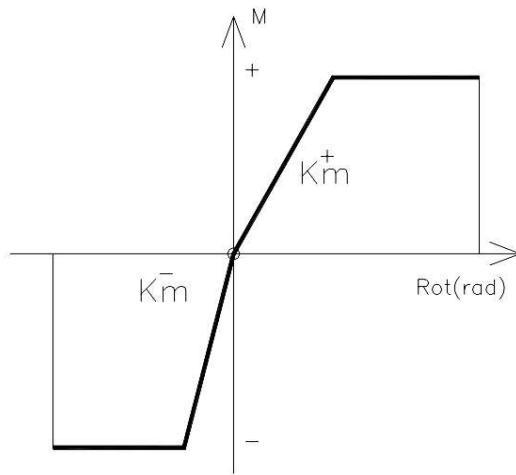


Figura 16 – Valores diferentes de rigidez para momento positivo e negativo (Fonte: Mota, 2009).

3. ESTABILIDADE GLOBAL DE EDIFÍCIOS

Este capítulo aborda conceitos básicos relativos à estabilidade de estruturas com foco nas utilizadas em edifícios de concreto. São discutidos o efeito P-Delta, os sistemas de contraventamento utilizados em edifícios de concreto pré-moldado e o uso dos parâmetros α e γ_z para avaliação da estabilidade global de edifícios.

3.1. Equilíbrio e estabilidade

A Figura 17 ilustra as três situações em que o equilíbrio de sistemas mecânicos pode ocorrer através do exemplo simples de uma bola sobre uma superfície sem atrito e submetida ao seu peso próprio (indicado pela gravidade g). Mesmo que a bola A sofra temporariamente alguma perturbação devido a uma ação externa, ela retornará à sua posição inicial, tendo um equilíbrio estável. Diferentemente, a bola B passará a ter outra configuração quando submetida à perturbação não retornando à sua configuração inicial, mesmo após o final da perturbação externa. Neste caso, tem-se um equilíbrio instável. Por fim, a terceira bola, C , tenderá ficar na posição em que estiver quando a perturbação cessar, sendo esse o equilíbrio neutro.

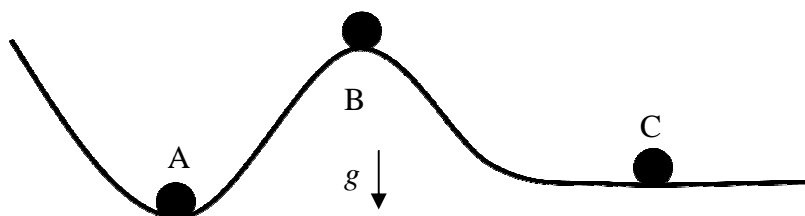


Figura 17 – Situações possíveis para o equilíbrio.

Quando uma estrutura é submetida a um carregamento externo, ela passará a ter uma configuração de equilíbrio, a qual é definida pelos deslocamentos, deformações, tensões e esforços sofridos pela estrutura. O equilíbrio da estrutura então é dito estável quando, após sofrer alguma perturbação externa, a estrutura possui a capacidade de retornar ao seu estado de equilíbrio inicial. Por outro lado, no caso de um equilíbrio instável a estrutura poderia entrar em colapso quando submetida a uma perturbação externa. Por motivos óbvios, o projeto estrutural deve garantir que as estruturas de edifício estejam em equilíbrio estável quando submetidas às ações externas esperadas.

A instabilidade da estrutura pode ocorrer por três formas, as quais podem ocorrer por ponto de bifurcação, ponto limite com reversão e por ponto limite sem reversão. A NBR 6118:2003 faz menção destes três tipos de instabilidade em seu item 15.2 e comenta que estes conceitos são aplicáveis à barras, cascas, paredes e vigas-parede.

No caso de pilares, devido ao fato de serem idealizados como elementos retilíneos submetidos a cargas essencialmente de compressão, a instabilidade é dada por bifurcação do caminho de equilíbrio. Fenômeno mais conhecido no meio técnico pelo termo flambagem. Teoricamente, os pilares são capazes de resistir até uma dada carga de compressão, conhecida como carga crítica ou mais especificamente de carga de flambagem. Ao atingir esse ponto, a configuração reta deixa de ser estável e o pilar sofrerá deslocamentos transversais para tentar manter o equilíbrio. Para o cálculo da carga crítica de um pilar, inicialmente toma-se a coluna de Euler como exemplo, a qual pode ser vista na Figura 18.

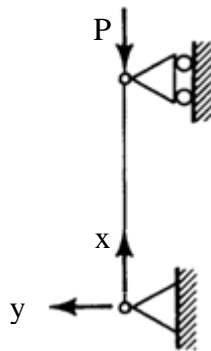


Figura 18 – Pilar sob compressão (Fonte: Chages, 1974).

Utilizando a Equação da Linha Elástica, o momento fletor M em uma seção qualquer, distante de x dos apoios, pode ser relacionado com a curvatura y'' através da expressão:

$$M = -EIy'' \quad (14)$$

Considerando que o momento fletor seja igual a Py , pode-se reescrever a equação anterior como:

$$EIy'' + Py = 0 \quad (15)$$

Para a solução da equação diferencial acima, faz-se a seguinte notação:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (16)$$

Logo a Equação (15) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (17)$$

Sabendo que a solução homogênea de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é da forma $y = e^{mx}$ e usando as relações apropriadas, tem-se a equação da linha elástica:

$$y = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) \quad (18)$$

No caso da coluna de Euler, as condições de contorno do problema são dadas por:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow y = 0 \\ x = L &\rightarrow y = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Assim, a Equação (18) pode ser reescrita como abaixo.

$$y = A \cdot \sin(kx) \quad (20)$$

Contudo, usando a segunda condição, o deslocamento é nulo em $x = L$. Logo:

$$A \cdot \sin(kL) = 0 \quad (21)$$

Analisando essa última equação, há duas condições que podem satisfazer a relação:

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(kL) = 0 \quad (22)$$

Caso o coeficiente A seja zero, teremos uma solução trivial, na qual a coluna permanece reta. Esta solução não é de grande importância ao problema estudado. Por outro lado, se tomarmos kL é igual a zero, então:

$$kL = n\pi \quad (23)$$

Substituindo essa expressão na Equação (16), tem-se a expressão da carga crítica P_{cr} dada por

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (24)$$

Porém, busca-se o valor da carga de flambagem referente ao primeiro modo de flambagem. Fazendo n igual a um, chega-se à expressão final da carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (25)$$

É importante notar que, esta expressão é restrita à coluna de Euler, pois vale lembrar que há outras condições de apoio que um pilar pode se encontrar. Os outros tipos de apoio levam a Equação (18) a ter outras condições de contorno e, conseqüentemente, um valor para carga crítica diferente. Todavia, as equações para as demais cargas críticas são similares, diferindo apenas no comprimento efetivo do pilar. Alguns autores preferem reescrever a Equação (25) da seguinte forma:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (26)$$

onde KL é o comprimento efetivo. Assim, a Tabela 3 resume o comprimento efetivo das demais situações que um pilar pode se encontrar.

Tabela 3 – Comprimento efetivo para diferentes condições de apoio.

Condições de apoio	K
Ambos engastados	0.5
Um engastado e outro simplesmente apoiado	0.7
Ambos simplesmente apoiados	1
Um engastado e outro com restrição a rotação	1
Um engastado e outro livre	2
Um simplesmente apoiado e outro com restrição a rotação	2

É importante esclarecer que essas expressões para o cálculo da carga crítica são deduzidas considerando a hipótese de que as estruturas estão livres de imperfeições. Como essas estruturas são pilares, as imperfeições podem ser geométricas, incluindo desaprumo e curvatura inicial, ou de carregamento, como forças horizontais ou cargas excêntricas.

Estas características devem ser consideradas no estudo da estabilidade, pois acarretam uma redução do valor da capacidade de carga da estrutura. Como exemplo, a Figura 19 apresenta diversos caminhos de equilíbrio influenciado pelo aumento da excentricidade da carga axial. Nota-se que quanto maior o valor da imperfeição, maior o deslocamento transversal (δ) para a mesma carga aplicada, resultando em uma menor capacidade do pilar de suportar a carga de compressão.

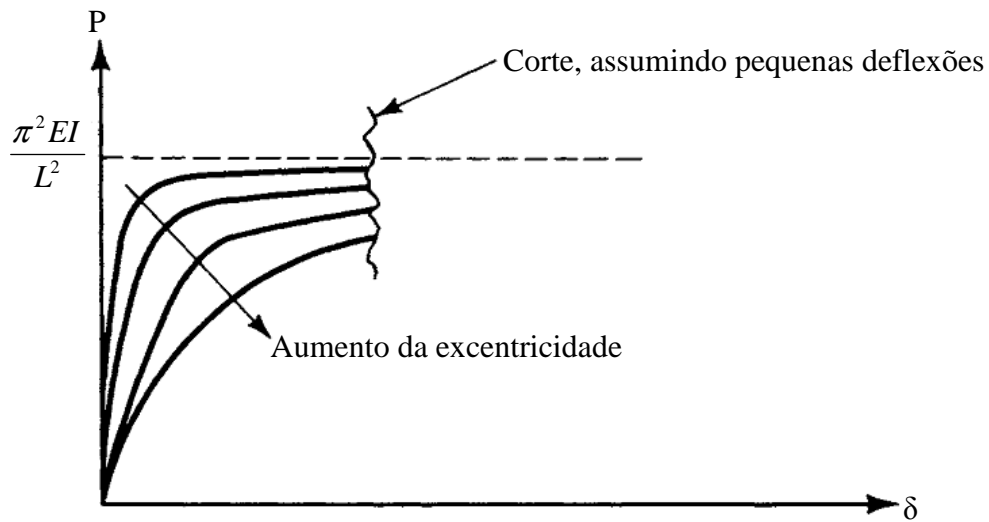


Figura 19 – Efeito da excentricidade. Adaptado de Hodges (2006).

3.1.1. Efeito P-Delta

Considerando a coluna mostrada na Figura 20, na ausência da força vertical, o momento na base do pilar corresponde ao momento de 1ª ordem (M_1), cujo valor é dado por

$$M_1 = H L \quad (27)$$

onde H é a força horizontal atuante no pilar.

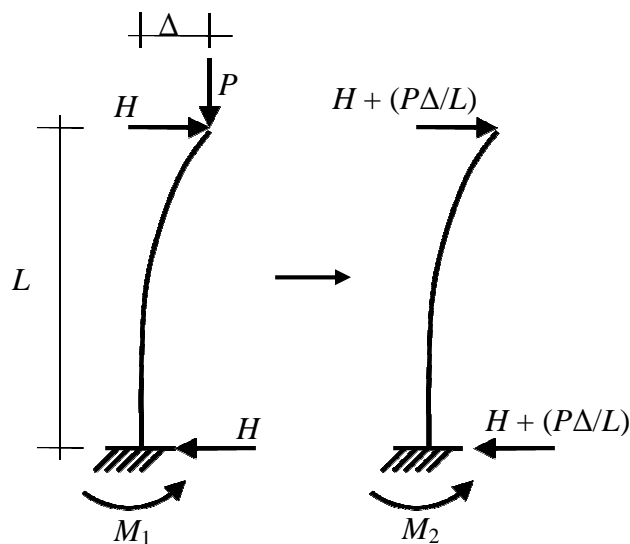


Figura 20 – Efeito P- Δ .

Obviamente, sob a ação das forças H e P o pilar sofrerá um deslocamento horizontal Δ . Portanto, o momento total (M_{tot}) atuante na base do pilar será:

$$M_{tot} = H L + P \Delta = M_1 + M_2 \quad (28)$$

onde o momento

$$M_2 = P \Delta \quad (29)$$

corresponde ao momento de 2ª ordem. Note que o efeito P-Delta é não linear, uma vez que a atuação da força P gera um momento de 2ª ordem que tende a aumentar o valor de Δ , o que por sua vez aumenta o momento de 2ª ordem. Portanto, o deslocamento Δ é maior que o deslocamento devido a atuação apenas da força horizontal H .

A análise linear ou de 1ª ordem fornece os deslocamentos e esforços de reação tomando como referência a configuração inicial da estrutura. Porém, o carregamento inicial continua atuando na configuração deformada, ocasionando os efeitos de segunda ordem, como mostrado nas equações anteriores.

Em estruturas muito rígidas, os deslocamentos sofridos (Δ) são pequenos, resultando em uma configuração deformada semelhante à inicial. Neste caso, os efeitos de 2ª ordem podem ser desprezados e a análise linear fornecerá bons resultados. Contudo, o contrário ocorre em estruturas muito esbeltas (i.e. flexíveis). Neste caso, os deslocamentos podem ser grandes, gerando esforços de 2ª ordem significativos. Portanto, nestes estruturas o efeito P-Delta deve ser considerado.

Havendo a necessidade de se avaliar os esforços de segunda ordem e tendo como ferramenta apenas a análise linear, desenvolveu-se o estudo do efeito P- Δ . Este efeito é assim conhecido por ocorrer em estruturas que estão submetidas a cargas axiais de compressão. Resumidamente, o efeito P- Δ é uma maneira de utilizar a análise linear a fim de obter os esforços de 2ª ordem. Provavelmente, a maneira mais simples de considerá-lo é o Método da Carga Fictícia (Lopes, 2005), ilustrado na Figura 20.

O Método da Carga Lateral Fictícia realiza uma primeira análise linear. Obtido o deslocamento Δ , busca-se uma carga lateral fictícia que exerça um momento fletor na base do pilar equivalente ao momento de segunda ordem $M_2 = P \cdot \Delta$. Essa carga é obtida dividindo esse momento pela altura onde a carga vertical P é aplicada ($P \cdot \Delta / L$). Calculada a carga fictícia, soma-se esta à carga H , calcula-se o deslocamento Δ e o momento de segunda ordem M_2 . Este é um processo iterativo, uma vez que o deslocamento Δ aumenta com a carga fictícia. Portanto, é necessário avaliar a convergência dos resultados. Admite-

se que a análise está concluída quando a diferença entre os momentos de segunda ordem em duas análises consecutivas é desprezível.

O Método da Carga Fictícia é um método simples de se obter os efeitos de 2ª ordem decorrentes da posição deformada através da análise linear e do efeito P-Delta. Os resultados obtidos são satisfatórios para estruturas cujos deslocamentos laterais são pequenos. Um método mais preciso de considerar este efeito é através da utilização de elementos finitos capazes de representar grandes deslocamentos e rotações será apresentado no Capítulo 4.

3.2. Contraventamento de estruturas pré-moldadas

Na etapa análise estrutural, é comum avaliar a estabilidade do edifício através de subestruturas de contraventamento, cuja finalidade é o aumento da rigidez da estrutura, limitando os deslocamentos horizontais e os efeitos de 2ª ordem. Como o assunto de estabilidade em estruturas de concreto pré-moldado recebe grande atenção, as subestruturas de contraventamento foram bastante estudadas.

Os edifícios de concreto pré-moldado podem ser construídos através de dois tipos de sistemas estruturais: com elementos reticulares ou com paredes portantes. Assim, dependendo do tipo do sistema estrutural, as subestruturas de contraventamento são constituídas por elementos diferentes. As mais frequentes em edifícios de concreto pré-moldado são os painéis de cisalhamento, núcleos de rigidez, pilares engastados na base e os pórticos.

Quando o contraventamento é definido exclusivamente por pilares, admite-se que as vigas são articuladas. Conseqüentemente não há a contribuição da rigidez de pórticos na estabilidade do edifício de concreto pré-moldado. Logo, para reduzir a deslocabilidade lateral e até por questão de equilíbrio, é necessário o engaste nas bases dos pilares. Dessa maneira, os pilares estarão se comportando como vigas em balanço. El Debs (2000) comenta que esta forma de contraventamento é limitada e ocorre mais em edifícios de altura pequena. Contudo há vantagens construtivas como ligações entre vigas e pilares mais fáceis de serem executadas e pilares contínuos.

Existem basicamente três tipos de ligações, as quais podem ser executadas com cálice, com emenda da armadura através de graute e bainha e com emendas de armaduras salientes. A Figura 21 apresenta resumidamente esses tipos de ligações.

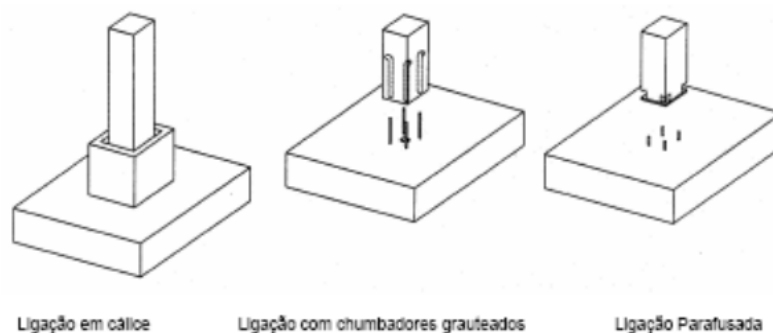


Figura 21 – Tipos de ligações entre pilares e fundações (Fonte: Jeremias, 2007).

Por ser também uma ligação, o encontro da base do pilar com a fundação pode apresentar um comportamento semirrígido. Esse fato pode fazer com que a estrutura apresente maiores deslocamentos e conseqüentemente problemas de estabilidade. Como foi mencionado, os pilares passam a se comportar como vigas em balanço. Uma consequência da adoção desse tipo de contraventamento é a tendência dos pilares se tornarem mais robustos que o usual para que garantam uma maior rigidez às ações laterais sobre a edificação. A Figura 22 mostra duas situações para um edifício contraventado por pilares engastados na base. Inicialmente o edifício está indeformado, mas após a aplicação do carregamento os pilares se deformam enquanto as vigas não sofrem deformações. Isso se deve às articulações entre vigas e pilares.

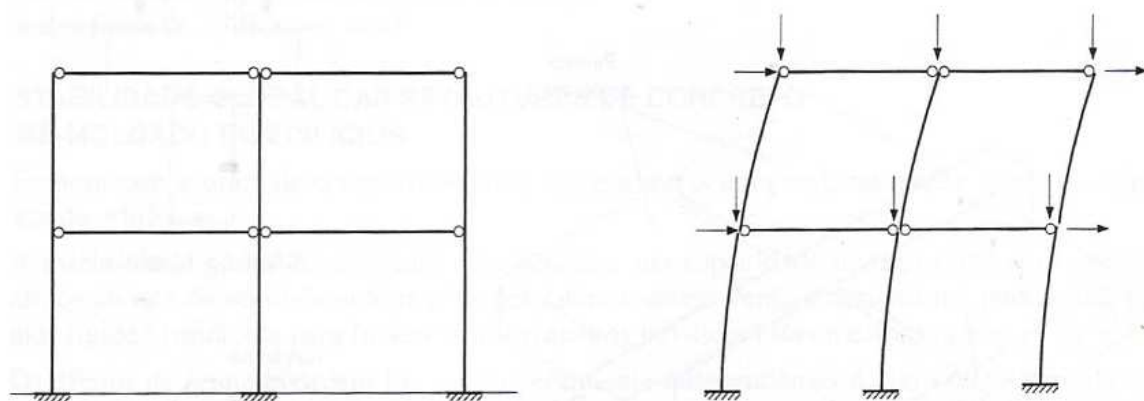


Figura 22 – Contraventamento por pilares engastados na base (Fonte: El Debs, 2000).

Novamente, é importante que se garanta o engaste da base ou aumente ao máximo a rigidez da ligação entre o pilar e a fundação. Tendo em vista essa importância, o PCI (2004) propõe um método de análise das estruturas considerando a rigidez da ligação para o caso de uma chapa de base, bem como maneiras de como considerar os apoios.

Semelhante a esse tipo de contraventamento, há a rigidez devida à contribuição de pórticos. Neste caso, as ligações entre vigas e pilares apresentam alguma resistência à flexão, formando assim os pórticos e fornecendo um maior travamento da estrutura. Há também a necessidade de se avaliar a rigidez da base dos pilares, mas também a importância da avaliação da rigidez e resistência das ligações semirrígidas viga-pilar.

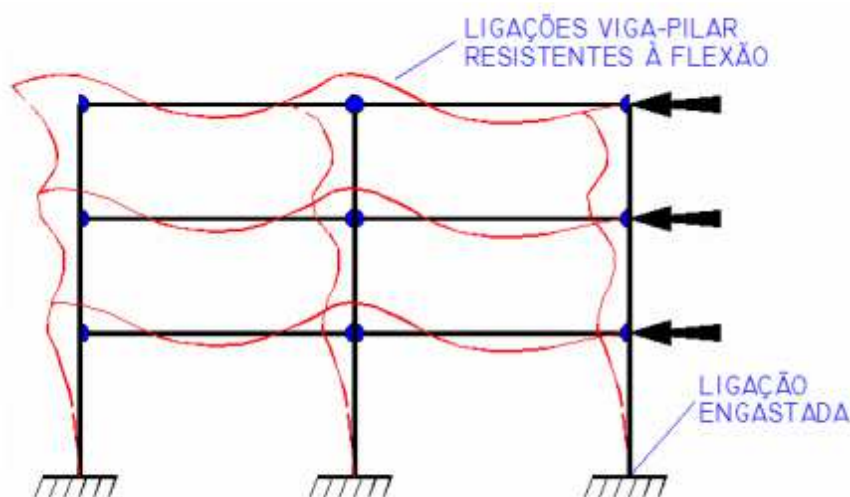


Figura 23 – Contraventamento por pórticos (Fonte: Jeremias, 2007).

Nota-se pela Figura 23 que as vigas passam a se deformarem junto com os pilares. Isso se deve ao fato da transferência dos esforços dos pilares às vigas. Logo, percebe-se que pilares e vigas passam a trabalhar em conjunto, conferindo uma menor deslocabilidade lateral ao edifício. É importante ressaltar que são necessários os mesmos cuidados com os encontros dos pilares com as fundações como no caso do contraventamento provido apenas por pilares.

Outra forma de melhorar a estabilidade da estrutura é através dos painéis de cisalhamento (*shear walls*). Assim, o emprego desses elementos constitui o principal sistema de garantia da estabilidade global. Eles podem ser produzidos no local da obra ou pré-moldados. Devido a sua geometria, os painéis apresentam grande resistência de compressão no plano das duas maiores dimensões, o que os tornam atrativos. Contudo, devido se comportarem como chapas, pode haver a possibilidade de instabilidade local, o que torna necessário uma verificação preventiva desse fenômeno. Através das ligações entre os painéis, há uma interação entre eles, garantido o trabalho conjunto para resistir às ações horizontais. A Figura 24 compara a estrutura inicial com a deformada e mostra a distribuição dos esforços gerados pela ação horizontal.

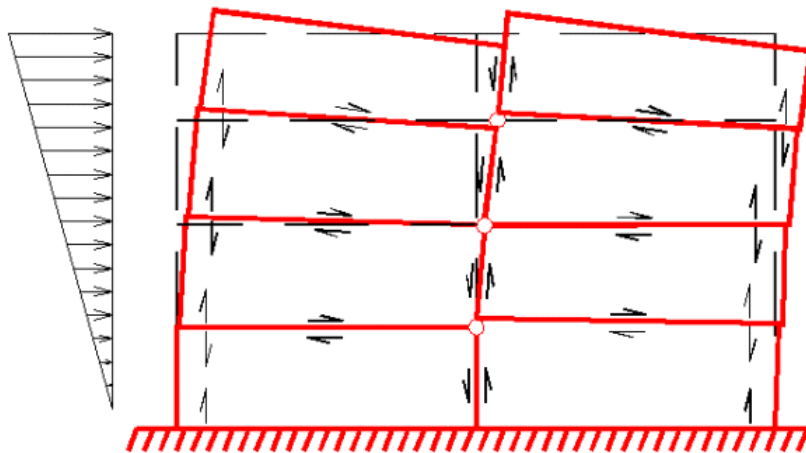


Figura 24 – Distribuição dos esforços da estrutura deformada (Fonte: Jeremias, 2007).

Finalmente, uma última opção viável a ser adotada para garantir a estabilidade global de uma estrutura de concreto pré-moldado é o núcleo de rigidez. Considerando que a laje não possui deformações em seu plano devido a sua grande rigidez, efeito conhecido como diafragma rígido, as ações horizontais devido ao vento serão transmitidas das fachadas aos núcleos de rigidez. A Figura 25 mostra o caminho dos esforços das vigas aos núcleos, sendo resistidos por estes.

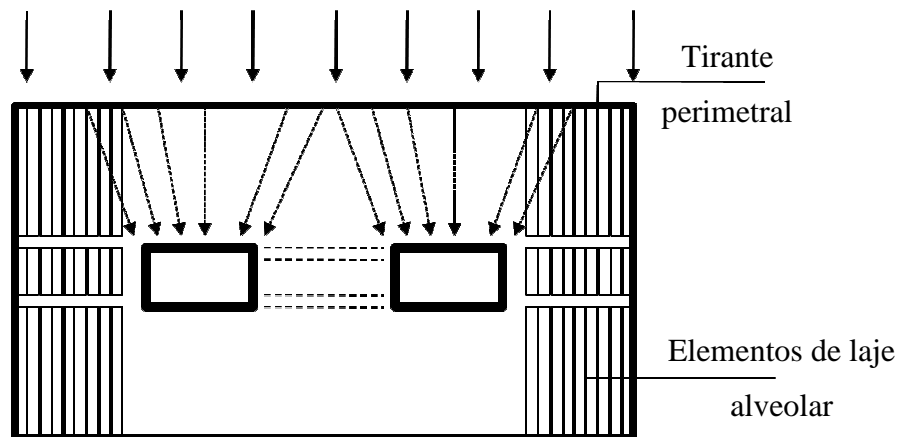


Figura 25 – Contribuição dos núcleos de rigidez.

Complementarmente, podem ser utilizados sistemas mistos de contraventamento. A título de exemplo, a Figura 26 apresenta o modelo estrutural de um pórtico plano combinado a um núcleo de rigidez.

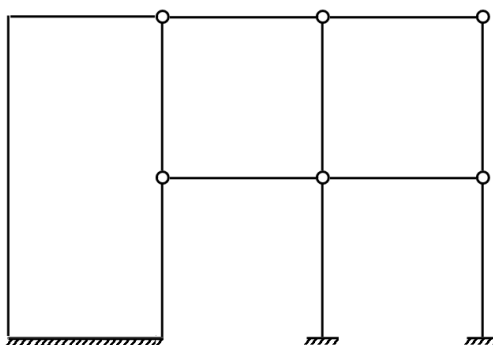


Figura 26 – Modelo do núcleo de rigidez.

3.3. Avaliação do contraventamento de estruturas

As condições de equilíbrio de uma estrutura deformada podem ser totalmente distintas das condições de uma estrutura no estado inicial. Ou seja, o equilíbrio do estado deformado pode se dar em uma posição bastante diferente do estado inicial da estrutura, caso os deslocamentos sejam excessivamente elevados. Estes deslocamentos podem ocasionar esforços de segunda ordem, o qual consiste em esforços gerados a partir dos deslocamentos de primeira ordem, como discutido no item 3.1.1.

Dependendo da magnitude dos deslocamentos, é necessária a análise de segunda ordem, na qual se considera o equilíbrio na configuração deformada. Contudo, a NBR 6118:2003 afirma que é possível dispensar a análise de segunda ordem caso a estrutura seja considerada de nós fixos. Para fazer esta classificação a norma propõe o uso do parâmetro α e do coeficiente γ_z . Caso o valor do parâmetro ou do coeficiente da estrutura sejam maiores que os prescritos por norma, a estrutura é definida como de nós móveis e é necessária uma análise mais rigorosa. Ressalta-se que a norma brasileira que aborda o projeto e execução de estruturas pré-moldadas, a NBR 9062:2006, permite que se apliquem as mesmas regras e processos de análise nas estruturas moldadas no local. Assim, é possível tomar o parâmetro α e o coeficiente γ_z como referência também para estruturas pré-moldadas.

3.3.1. Parâmetro α

De forma sucinta, este parâmetro serve como indicador da necessidade de uma análise de segunda ordem. Caso a estrutura possua esse parâmetro maior que o prescrito por norma, é classificada como estrutura de nós móveis. Caso seja menor, é classificada

como estrutura de nós fixos e é dispensada a análise de segunda ordem. O parâmetro α é calculado através da expressão

$$\alpha = H \sqrt{\frac{N}{E_{cs} I_c}} \quad (30)$$

onde H é a altura total da obra, N é o somatório de todas as cargas verticais, $E_{cs} I_c$ é o somatório de todos os valores de rigidez dos pilares. Ressalta-se que E_{cs} é o módulo de elasticidade secante.

A estrutura será considerada de nós móveis caso o valor de α seja superior ao limite α_1 definido pela equação:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,2 + 0,1n \quad \text{para } n \leq 3 \\ \alpha_1 &= 0,6 \quad \text{para } n > 4 \end{aligned} \quad (31)$$

onde n é o número de andares.

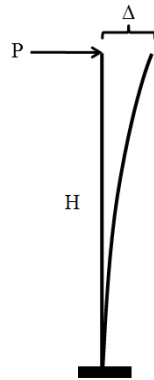


Figura 27 – Pilar equivalente sob carga concentrada.

Quando a estrutura de contraventamento é formada por pórticos, a rigidez é calculada com um pilar de rigidez equivalente. Este pilar é engastado e livre com carga concentrada na extremidade, como mostrado na Figura 27. A rigidez equivalente é determinada igualando o deslocamento Δ do pórtico ao deslocamento do pilar:

$$\Delta = \frac{PH^3}{3EI} \Rightarrow EI_{eq} = \frac{PH^3}{3\Delta} \quad (32)$$

Vale ressaltar outro caso para obter a rigidez à flexão do pilar. Devido ao fato da ação do vento não ser uma carga concentrada no topo e sim uma carga distribuída ao longo do edifício, alguns pesquisadores deduzem que seja mais adequado considerar uma carga unitária distribuída uniformemente para essa análise.

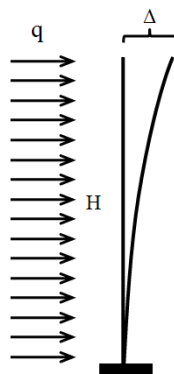


Figura 28 – Pilar equivalente sob carga distribuída.

A Figura 28 apresenta a forma de como o carregamento q é distribuído ao longo do pilar e o deslocamento que é tomado como referência para o cálculo da rigidez à flexão. Sendo q um carregamento distribuído uniformemente, a rigidez à flexão do pilar pode ser calculada igualando o deslocamento do pórtico ao deslocamento do pilar:

$$\Delta = \frac{qH^4}{8EI} \Rightarrow EI_{eq} = \frac{qH^4}{8\Delta} \quad (33)$$

3.3.2. Parâmetro γ_z

Este parâmetro foi proposto por Franco e Vasconcelos (1991). Com ele é possível identificar se a estrutura é de nós fixos ou móveis, além de calcular aproximadamente o valor dos esforços de segunda ordem. Com o auxílio da análise linear e dos esforços de primeira ordem, o valor do parâmetro de estabilidade γ_z é dado por:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_d}{M_{1d}}} \quad (34)$$

onde ΔM_d é o momento oriundo do produto das forças verticais pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, enquanto M_{1d} é o momento de tombamento devido às ações horizontais. Considerando o esquema da Figura 20, $\Delta M = \sum P_i \Delta_i$. O subscrito d indica que devem ser utilizados os valores de cálculo das ações.

Caso o valor do coeficiente γ_z seja menor que 1,10, a estrutura em questão é tida como de nós fixos e os esforços de segunda ordem podem ser desprezados. Segundo Franco e Vasconcelos (1991), quando γ_z está no intervalo de 1,10 a 1,20, os esforços

aproximados de segunda ordem podem ser obtidos através do produto entre o parâmetro e o momento de tombamento:

$$M_{2d} = \gamma_z M_{1d} \quad (35)$$

onde M_{2d} e M_{1d} são os momentos de cálculo de segunda e primeira ordem, respectivamente. Contudo, de acordo com NBR 6118:2003 não deve ser usado o valor total de γ_z , sendo os momentos de segunda ordem avaliados dados por:

$$M_{2d} = 0,95\gamma_z M_{1d} \quad (36)$$

É importante notar que esta equação só pode ser utilizada se $\gamma_z \leq 1,3$.

A princípio, pode-se indagar sobre as diferenças entre as expressões utilizadas para cálculo dos momentos de segunda ordem. Obviamente, o uso da Equação (36) resulta em esforços menores que a Equação (35), proposta por Franco e Vasconcelos (1991). É interessante notar que, caso uma edificação possua um parâmetro γ_z igual a 1,07; significa que os esforços de segunda ordem devem ser 7% maiores que o de primeira, mas a norma não requer a consideração desta diferença, pois ela não atinge 10%. É possível interpretar que utilizar 95% do γ_z venha do fato de compensar essa diferença.

Por fim, ocorre com alguma frequência dúvidas sobre em que tipo combinação das ações deve-se aplicar o γ_z . Segundo a NBR 6118:2003, os esforços de segunda ordem podem ser obtidos “*a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por $0,95\gamma_z$.*”. Logo, conclui-se que esse parâmetro pode ser utilizado com qualquer combinação, já que o seu objetivo é avaliar a contribuição dos efeitos dos deslocamentos laterais sobre os esforços.

3.4. Colapso progressivo

Um dos problemas que podem surgir devido à falta de estabilidade é o colapso progressivo. Esse é um fenômeno em que um dano ou falha inicialmente localizada em um único elemento se propaga para outros elementos estruturais, podendo levar ao colapso total do edifício. É um fenômeno de grande importância e possui menção em diversas normas americanas, européias e brasileiras. A NBR 6118:2003 discute na seção 19.5.4 que o colapso progressivo em lajes pode ser evitado garantindo-se a ductilidade. No caso das estruturas de concreto pré-moldado, a NBR 9062:2006, na seção 5.1.1.4, reconhece que se devem tomar cuidados especiais na organização e detalhes construtivos, apesar de não especificar claramente que tipos de cuidados.

Um caso bastante conhecido desse problema foi o que ocorreu em 1968 em Londres. Um edifício composto por painéis portantes (painéis de cisalhamento) de concreto pré-moldado sofreu uma explosão de gás no 18º andar, dando início ao colapso progressivo de outras lajes dos demais pavimentos. Este foi um dos primeiros casos de colapso progressivo e que serviu como alerta para estudos referentes a esse fenômeno. A Figura 29 mostra o estado final do edifício após a ruína das lajes devido à explosão de gás.



Figura 29 – Colapso do edifício Ronan Point (Fonte: Wikipedia, 2012).

Devido ao próprio modo de como as estruturas de concreto pré-moldado são construídas, as ligações entre os elementos influenciam fortemente no colapso progressivo, tornando estas mais suscetíveis que as estruturas de concreto moldado in loco. Assim, para se ter uma estrutura mais robusta, ou seja, segura contra o colapso progressivo, deve-se projetar as ligações adequadamente. Como mencionado, isso pode ser conseguido através da ductilidade entre as peças. A NBR 6118:2003 comenta que essa característica pode ser melhorada através das armaduras de continuidade entre os elementos e apoios. Jeremias (2007) apresenta resumidamente que a ductilidade também pode ser trabalhada por meio de tirantes, pois dessa maneira aumenta a união entre os elementos estruturais.

4. ANÁLISE ESTRUTURAL

Neste capítulo, são apresentados conceitos básicos sobre os tipos de análises necessários para o estudo do efeito das ligações semirrígidas em estruturas de concreto pré-moldado. A formulação de elementos finitos de pórtico plano para análise não linear geométrica e física é apresentada detalhadamente, bem como a maneira de modelar a ligação semirrígida entre vigas e pilares. Ao final, discute-se as implementações computacionais realizadas neste trabalho.

4.1. Análise não linear

Na tentativa de estudar o comportamento das estruturas, a engenharia desenvolveu diversos tipos de análises ao longo do tempo. Naturalmente, a análise linear surgiu como primeira ferramenta para os estudos das estruturas, mas foram percebidos casos em que essa análise não era suficiente, pois não apresentava resultados coerentes com a realidade. Havia a necessidade de tipos de análises mais sofisticadas que melhor representasse o comportamento as estruturas. Assim, ao longo do tempo, surgiram as análises não lineares geométricas e físicas. A análise linear fornece apenas uma única solução, em termos de deslocamentos e esforços, para um dado carregamento. Por outro lado, a análise não linear pode fornecer mais de uma solução para um mesmo carregamento aplicado.

A análise linear considera que as estruturas sofram pequenos deslocamentos e que o material é linear elástico. Quando alguma destas condições deixa de ser satisfeita, o problema é dito não linear. Quando os deslocamentos são grandes e as mudanças de geometria da estrutura não podem ser desprezadas tem-se a não linearidade geométrica (NLG). Por outro lado, quando o material apresenta comportamento tensão-deformação não linear tem-se a não linearidade física (NLF). É importante notar que estruturas de concreto podem apresentar as duas não linearidades simultaneamente.

Na elaboração de projetos estruturais, os engenheiros comumente utilizam a análise linear elástica de primeira ordem como ferramenta para avaliar esforços devido aos carregamentos atuantes na estrutura. Todavia, a análise de primeira-ordem despreza os esforços adicionais causados pelos deslocamentos horizontais da estrutura. Em outra mão, a análise não linear geométrica considera os efeitos dos esforços sobre a estrutura à medida que sua geometria muda devido aos deslocamentos. Esforços estes também conhecidos como de segunda ordem.

O estudo sobre a não linearidade física é um tema bastante pesquisado pela comunidade científica, visto que existe uma infinidade de tipos de materiais que podem ser usados em estruturas e cada um com um comportamento mecânico diferente. A representação do comportamento tensão-deformação de um material é conhecida como modelo constitutivo. O modelo constitutivo mais simples é a lei de Hooke:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \quad (37)$$

onde σ é a tensão normal, E é o módulo de elasticidade do material e ε é a deformação linear. Ressalta-se que devido ao fato de ser uma equação linear, existe uma relação proporcional entre as tensões e deformações. Esta relação é válida para muitos materiais submetidos a tensões baixas. Contudo, à medida que as tensões crescem, a relação entre tensões e deformações passa a ser não linear. No caso do concreto armado, a não linearidade está associada à plastificação do aço e ao esmagamento e fissuração do concreto.

Este trabalho optou pela adoção do Método dos Elementos Finitos (MEF) para análise estrutural, devido a relativa simplicidade com que as não linearidades física e geométrica são consideradas. As equações de equilíbrio do Método dos Elementos Finitos (MEF) podem ser escritas como:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (38)$$

onde \mathbf{g} é o vetor de forças internas, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, \mathbf{r} é o vetor de forças desbalanceadas ou resíduo, \mathbf{f} é vetor de forças externas de referência e λ é o fator de carga. O fator de carga é um escalar que permite controlar o nível de carregamento aplicado.

Uma ferramenta poderosa no estudo do comportamento de estruturas com comportamento não linear é a curva carga-deslocamento, também conhecida como caminho de equilíbrio. Esta curva corresponde a representação gráfica da relação entre os deslocamentos e o fator de carga que satisfazem a Equação (38). A Figura 30 ilustra três caminhos de equilíbrio diferentes.

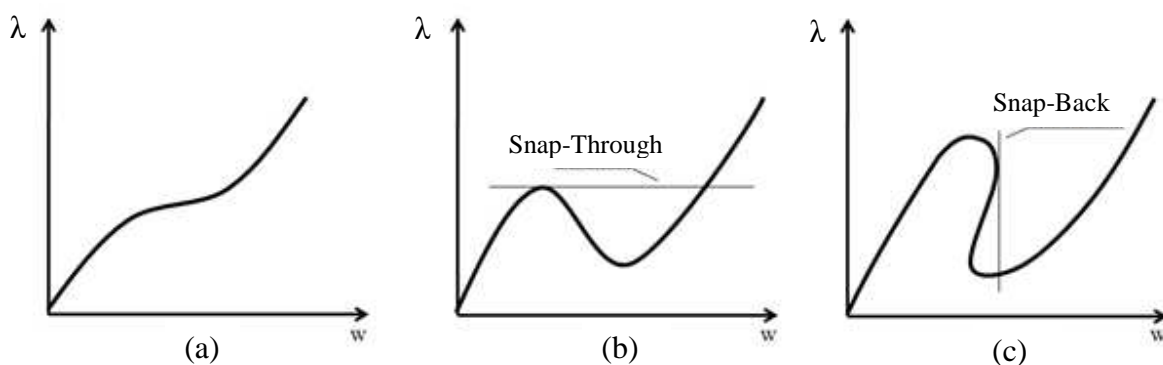


Figura 30 – Caminhos não lineares de equilíbrio.

A fim de traçar o caminho de equilíbrio é necessário resolver o sistema de equações não lineares descrito pela Equação (38) para diferentes fatores de carga (λ). Contudo, a solução não é simples, pois este sistema possui n equações e $n+1$ incógnitas (\mathbf{u} e λ), onde n é o número de graus de liberdade da estrutura.

O Método do Controle de Carga é um método incremental-iterativo que utiliza o Método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equilíbrio não linear reduzindo o número de incógnitas ao prescrever o valor do fator de carga λ a cada incremento e mantendo este fator constante enquanto realiza as iterações de equilíbrio. Neste caso, a Equação (38) é linearizada em relação ao incremento de deslocamentos $\delta\mathbf{u}$ e determina-se o incremento que anula a nova aproximação do resíduo:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_t \delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_t \delta\mathbf{u} = -\mathbf{r}_i \quad (39)$$

Nesta equação i corresponde ao índice da iteração e \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente definida a partir da derivação da Equação (38):

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \quad (40)$$

Após o cálculo do incremento de deslocamento, o vetor de deslocamentos nodais é atualizado através da expressão:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} \quad (41)$$

As iterações devem continuar até que o resíduo seja menor que uma dada tolerância:

$$|\mathbf{r}_i| \leq \text{TOL} \quad (42)$$

Após a convergência do processo iterativo, incrementa-se novamente o fator de carga e repete-se o processo pelo número de incrementos (passos) necessários para traçar o caminho de equilíbrio.

Estruturas com problemas de estabilidade podem apresentar curvas carga-deslocamento complexas, incluindo fenômenos de *snap-through* e *snap-back*. Assim, o Método do Controle de Carga, o qual trabalha com incremento de carga, não é capaz de traçar o caminho de equilíbrio de todas as estruturas.

Na Figura 30(a) se encontra um caminho de equilíbrio em que pode ser traçado com o Método do Controle de Carga, pois o caminho de equilíbrio é sempre crescente. A estabilidade ocorre porque a tangente da curva carga-deslocamento é positiva, ou seja, é necessário aumentar a carga para que o deslocamento aumente. Todavia, é preciso outro método para traçar os caminhos das outras figuras.

A Figura 30(b) apresenta um caminho com *snap-through*. Nesta situação, o Método do Controle de Carga não é capaz de traçar o caminho após o ponto limite, pois se baseia em incrementos pré-definidos de carga, enquanto a carga deveria ser reduzida para a obtenção do trecho instável após o ponto limite de máximo. Por outro lado, pode-se utilizar o Método do Controle de Deslocamento para traçar este caminho, pois é um método em que o parâmetro de controle passa a ser o deslocamento, determinando-se o fator de carga correspondente. É interessante notar que esta estrutura é estável antes do ponto limite de máximo (tangente positiva) e instável deste ponto até o ponto limite de mínimo, tornando-se novamente estável depois deste ponto.

Finalmente, a Figura 30(c), além de possuir um caminho com *snap-through*, apresenta o *snap-back*. Nesta situação ambos os Métodos de Controle de Carga e Controle de Deslocamento não são capazes de obter este tipo de caminho de equilíbrio. Como método mais avançado, há o Método do Comprimento de Arco Crisfield (1991) que é capaz de representar esta terceira situação, curvas com *snap-through* e *snap-back*. É importante notar que estes três métodos incrementais-iterativos para determinação do caminho não linear de equilíbrio já estavam disponíveis no programa FAST, que é o programa utilizado neste trabalho para análise estrutural.

4.2. Não linearidade geométrica

A análise com não linearidade geométrica com elementos finitos possui a disposição três tipos de descrições cinemáticas, as quais são a lagrangiana total, lagrangiana atualizada e a corrotacional. É importante salientar que os métodos incrementais-iterativos mencionados anteriormente podem ser usados em qualquer que seja a descrição adotada.

Resumidamente, a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) baseada na descrição cinemática lagrangiana total possui um sistema referencial fixo. Segundo Silva (2011), costuma-se adotar como referencial a configuração inicial da estrutura.

A descrição cinemática lagrangiana atualizada possui uma pequena diferença, pois o equilíbrio da estrutura é atingido a cada incremento do processo iterativo, tomando como referência a configuração do passo anterior.

Diferentemente, a descrição corrotacional visa separar os deslocamentos de corpo rígido das deformações sofridas pelo elemento através de um sistema de coordenadas que acompanha o elemento. A formulação de elementos de pórticos com esta descrição cinemática pode ser encontrada em Crisfield (1991), Battini (2002), Yshii (2002) e Monteiro (2004).

Nesta formulação, considera-se que a estrutura possa sofrer grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. A questão das pequenas deformações não é uma grande limitação, visto que os materiais usuais nas construções civis não suportam deformações excessivas sem falharem. Os elementos formulados com esta descrição possuem algumas vantagens, dentre elas, pode-se citar a facilidade de consideração da não linearidade física juntamente com a não linearidade geométrica e eficiência na análise de estruturas com grandes rotações. Devido a suas vantagens a formulação corrotacional foi adotada neste trabalho.

É importante notar que o programa FAST já dispunha de uma implementação do elemento de pórtico plano corrotacional baseado na formulação apresentada por Crisfield (1991). Contudo, esta formulação era limitada a materiais elástico lineares (análise fisicamente linear) e sua modificação para considerar a NLF era bastante complexa. Com objetivo de considerar simultaneamente a NLG e a NLF foi desenvolvida uma nova implementação deste elemento, baseada na formulação apresentada por Battini (2002).

A Figura 31 apresenta um elemento de pórtico plano corrotacional sofrendo o deslocamento de corpo rígido e deformação, bem como o acompanhamento do sistema de coordenadas local e os parâmetros adotados por Battini (2002).

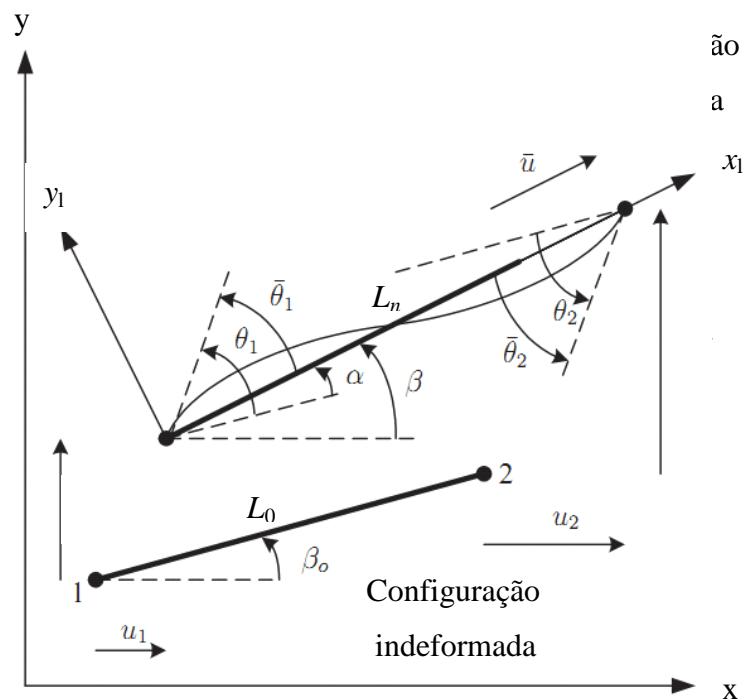


Figura 31 - Descrição cinemática corrotacional (Adaptado de Battini, 2002).

As notações usadas nos itens a seguir são definidas como na Figura 31. Salientando que as coordenadas dos nós 1 e 2 no sistema global são dadas por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , respectivamente.

Semelhante à anterior, a Figura 32 mostra os graus de liberdade do elemento corrotacional em seu sistema local bem como suas forças internas associadas. Verifica-se portanto que existem apenas três modos de deformação para o elemento de pórtico plano, sendo um associado à deformação axial do elemento (\bar{u}) e dois associados às deformações de flexão ($\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$).



Figura 32 – Graus de liberdade e esforços respectivos do elemento.

4.2.1. Deformações

Com base nos parâmetros da Figura 31 e nos modos de deformação da Figura 32, pode-se definir que os deslocamentos devidos às deformações do elemento como:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= L_n - L_0 \\
\bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \alpha \\
\bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \alpha
\end{aligned}
\tag{43}$$

Onde L_n e L_0 são os comprimentos final e inicial, respectivamente, e θ_1 e θ_2 são as rotações totais (i.e. em relação ao sistema global) dos nós 1 e 2, respectivamente. Por outro lado, \bar{u} , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são o deslocamento axial e as rotações dos nós no sistema local. Por fim, α representa a rotação de corpo rígido do elemento dada por

$$\alpha = \beta - \beta_0 \tag{44}$$

em que β e β_0 são os ângulos de inclinação do elemento no sistema global nas configurações final e inicial, respectivamente.

Durante o processo de cálculo da deformação do elemento, recorre-se frequentemente aos seus comprimentos iniciais e finais. Para isso, é necessário fazer a projeção dos elementos sobre os eixos x e y, como pode ser visto a seguir.

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_2 - x_1 \\
\Delta y &= y_2 - y_1 \\
\Delta x' &= x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) + (u_2 - u_1) \\
\Delta y' &= y'_2 - y'_1 = (y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)
\end{aligned}
\tag{45}$$

Definidas as projeções, os comprimentos dos elementos podem ser calculados como:

$$\begin{aligned}
L_0 &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\
L_n &= \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}
\end{aligned}
\tag{46}$$

Um importante passo da formulação corrotacional é a separação das rotações totais na parcela de corpo rígido e na parcela associada às deformações. Partindo da Equação (44), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\text{sen } \alpha &= \text{sen}(\beta - \beta_0) = s \cdot c_0 - c \cdot s_0 \\
\text{cos } \alpha &= \text{cos}(\beta - \beta_0) = c \cdot c_0 + s \cdot s_0
\end{aligned}
\tag{47}$$

em que os senos e cossenos dos ângulos de inclinação dos elementos são calculados como:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \text{cos } \beta_0 = \Delta x / L_0 \\
s_0 &= \text{sen } \beta_0 = \Delta y / L_0 \\
c &= \text{cos } \beta = \Delta x' / L_n \\
s &= \text{sen } \beta = \Delta y' / L_n
\end{aligned}
\tag{48}$$

É importante notar que a Equação (47) é capaz de determinar a rotação rígida da barra desde que α esteja dentro do intervalo de $-\pi$ a π , que é um intervalo grande para rotações quando comparadas às rotações sofridas pelas estruturas.

Contudo, para determinar a rotação rígida, independente da amplitude do ângulo, pode-se atualizar a rotação rígida a cada incremento de carga pela expressão:

$$\alpha = \alpha_a + \Delta\alpha \quad (49)$$

onde α_a corresponde a rotação de corpo rígido do passo anterior e o incremento de rotação $\Delta\alpha$ é definida como:

$$\Delta\alpha = \beta - \beta_a \quad (50)$$

em que β_a é o ângulo de inclinação do passo anterior. Comparando essas duas últimas equações, pode-se perceber que o incremento da rotação $\Delta\alpha$ pode ser obtido a partir da Equação (47), desde que se faça a substituição de β por β_a e α por $\Delta\alpha$. Isso é permitido, pois apesar da rotação rígida total poder ser grande, o incremento da rotação a cada passo de carga deve ser pequeno.

4.2.2. Transformação local-global e matriz de rigidez tangente

A análise com não linearidade geométrica será realizada no sistema global, assim é necessário que se calcule o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento e se faça a transformação para o sistema global. Com essa definição e com o auxílio do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), desenvolver-se-á a transformação dos sistemas. Logo, o vetor de deslocamentos no sistema local é dado por:

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2]^T \quad (51)$$

enquanto o vetor de deslocamentos no sistema global é dado por:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (52)$$

Utilizando a Equação (43), pode-se escrever os deslocamentos virtuais no sistema local como:

$$\delta\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{\theta}_1 \\ \delta\bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta\theta_1 - \delta\alpha \\ \delta\theta_2 - \delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta\theta_1 - \delta\beta \\ \delta\theta_2 - \delta\beta \end{bmatrix} \quad (53)$$

Utilizando as Equações (45) e (46), tem-se:

$$L_n^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 \quad (54)$$

Conseqüentemente:

$$2L_n \delta L_n = 2\Delta x'(\delta u_2 - \delta u_1) + 2\Delta y'(\delta v_2 - \delta v_1) \quad (55)$$

Considerando a Equação (48), pode-se escrever a variação do comprimento como:

$$\delta L_n = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta L_n = \delta \bar{u} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u} \quad (56)$$

A determinação da variação do ângulo β é dada a partir da Equação (48):

$$\text{sen} \beta = \frac{\Delta y'}{L_n} = \frac{\Delta y + v_2 - v_1}{L_n} \quad (57)$$

Fazendo a variação desta expressão:

$$\cos \beta \delta \beta = \frac{\delta v_2 - \delta v_1}{L_n} - \frac{\Delta y'}{L_n^2} \delta L_n = \frac{1}{L_n} \left((\delta v_2 - \delta v_1) - \text{sen} \beta \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u} \right) \quad (58)$$

Colocando $\delta \mathbf{u}$ em evidência, chega-se em:

$$c \delta \beta = \frac{1}{L_n} \begin{bmatrix} cs & -1+s^2 & 0 & -cs & 1-s^2 & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} \quad (59)$$

Após algumas manipulações algébricas, pode-se escrever:

$$\delta \beta = \frac{1}{L_n} \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} \Rightarrow \delta \beta = \frac{\mathbf{z}^T}{L_n} \delta \mathbf{u} \quad (60)$$

A transformação entre os deslocamentos globais e locais é obtida com a substituição das Equações (56) e (60) na Equação (53). O resultado desta operação pode ser escrita de forma matricial:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T} \delta \mathbf{u} \quad (61)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L_n & c/L_n & 1 & s/L_n & -c/L_n & 0 \\ -s/L_n & c/L_n & 0 & s/L_n & -c/L_n & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Alguns autores como Crisfield (2001) e Battini (2002) definem essa matriz como \mathbf{B} , o que pode ocasionar dúvidas, pois na literatura do MEF é mais comum encontrar a matriz \mathbf{T} com o objetivo de transformar sistemas de local para global e a matriz \mathbf{B} como a relação de deformação-deslocamento.

De acordo com a Figura 32 o vetor de forças internas no sistema local é dado por

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Como o trabalho é um escalar, o trabalho virtual interno é indiferente para qualquer sistema, assim, pode-se defini-lo como:

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (64)$$

Substituindo a Equação (61) na equação acima, obtém-se uma equação capaz de transformar o vetor de forças internas do elemento (sistema local) para o sistema global (da estrutura):

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (65)$$

Contudo, para que seja possível calcular a expressão acima, o vetor de forças do elemento $\bar{\mathbf{g}}$ precisa ser definido e sua formulação será apresentada no próximo item. Também no sistema local, será definida a possibilidade de incluir a não linearidade física, assim como parte da não linearidade geométrica.

Como explicado anteriormente, existe mais de um algoritmo para resolver numericamente as equações de equilíbrio que não são lineares. Para o caso do Método de Newton-Raphson, a solução do sistema de equações de equilíbrio requer a utilização da matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t , definida pela Equação (40). Esta matriz relaciona o incremento de forças internas com o incremento de deslocamentos:

$$d\mathbf{g} = \mathbf{K}_t d\mathbf{u} \quad (66)$$

Portanto, a determinação da matriz de rigidez no sistema global pode ser realizada diferenciando a Equação (65):

$$d\mathbf{g} = \mathbf{T}^T d\bar{\mathbf{g}} + d\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{K}_e d\mathbf{u} + \mathbf{K}_g d\mathbf{u} \quad (67)$$

onde \mathbf{K}_e corresponde à matriz de rigidez clássica e \mathbf{K}_g à matriz de rigidez geométrica.

A matriz de rigidez tangente do sistema local $\bar{\mathbf{K}}_t$ relaciona o incremento de deslocamentos e forças neste sistema:

$$d\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{K}}_t d\bar{\mathbf{u}} \quad (68)$$

Assim como o vetor de forças internas, a matriz de rigidez tangente local depende de como é feita a formulação do elemento local empregado. Logo, a definição dos elementos dessa matriz será dada no item da formulação do elemento corrotacional.

Através da Equação (61), pode-se escrever o incremento de forças como:

$$d\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T} d\mathbf{u} \quad (69)$$

Utilizando esta expressão e a Equação (67), chega-se:

$$\mathbf{K}_e d\mathbf{u} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T} d\mathbf{u} \quad (70)$$

Portanto:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T} \quad (71)$$

Conclui-se dessa expressão que a matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e será simétrica se a matriz de rigidez tangente for simétrica no sistema local. Outra observação é a incorporação do efeito da não linearidade geométrica na matriz global, a qual é dada através da matriz de transformação \mathbf{T} . Já a não linearidade física, caso haja, é incorporada através da matriz de rigidez tangente local $\bar{\mathbf{K}}_t$ dependendo da formulação utilizada.

A matriz de rigidez geométrica vem da segunda parcela da Equação (67) correspondente à variação da matriz de transformação:

$$\mathbf{K}_g d\mathbf{u} = d\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \bar{g}_1 d\mathbf{t}_1 + \bar{g}_2 d\mathbf{t}_2 + \bar{g}_3 d\mathbf{t}_3 \quad (72)$$

em que \bar{g}_k indica o elemento k do vetor coluna $\bar{\mathbf{g}}$ e \mathbf{t}_k indica a coluna k da matriz \mathbf{T}^T . Logo, a matriz de rigidez geométrica é dependente dos esforços internos que estão atuando no elemento.

Para determinar a variação da matriz de transformação, trabalha-se com os vetores \mathbf{r} e \mathbf{z} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \\ \mathbf{z} &= [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \end{aligned} \quad (73)$$

Estes vetores possuem relações entre si:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{z} d\beta \\ d\mathbf{z} &= -\mathbf{r} d\beta \end{aligned} \quad (74)$$

Assim, utilizando esses vetores para reescrever as linhas da matriz \mathbf{T} , definida na Equação (62), e derivando as expressões resultantes, chega-se à matriz de rigidez geométrica dos elementos de pórticos planos corrotacionais:

$$\mathbf{K}_g = \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L_n} + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \frac{1}{L_n^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) \quad (75)$$

4.2.3. Elementos de viga Corrotacional

Este item abordará a formulação local de dois tipos de elementos corrotacionais que serão utilizados na análise de exemplos do próximo capítulo. O primeiro elemento é chamado de PLFRAMECR1, o qual admite pequenas deslocamentos no sistema local. O segundo elemento é chamado de PLFRAMECR2, o qual possui uma formulação melhorada que considera grandes deslocamentos em seu sistema local. Ambos os elementos são baseados na teoria clássica de vigas (Euler-Bernoulli) e podem considerar a não linearidade física. A formulação e maiores explicações são mostradas a seguir.

4.2.3.1. Elemento PLFRAMECR1

Como é possível perceber, a descrição corrotacional demonstrada anteriormente é independente do tipo de elemento empregando no sistema local. Assim, neste item, demonstra-se a formulação de um elemento de viga simples baseado na teoria clássica de vigas. Segundo essa teoria, as seções transversais das vigas continuam planas e perpendiculares ao eixo longitudinal quando as vigas se deformam e a deformação devido ao cisalhamento não é considerada, pois a deformação de cisalhamento é desprezada. Utilizando esta hipótese pode-se mostrar que a deformação na direção do eixo de barra (ϵ_x) pode ser escrita como

$$\epsilon_x = \epsilon_m - y\kappa \quad (76)$$

onde ϵ_m é a deformação no centroide da seção transversal (deformação de membrana), κ é a curvatura da barra e y é a distância vertical do ponto considerado até o centroide da seção. A deformação de membrana e a curvatura são conhecidas como deformações generalizadas. Portanto, pode-se definir o vetor de deformações generalizadas como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (77)$$

Na análise de estruturas reticuladas é mais cômodo trabalhar com esforços internos (resultante de tensões ou tensões generalizadas) do que com as tensões propriamente ditas. A força normal N é a força resultante das tensões na direção do eixo da barra:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (78)$$

σ_x é a tensão normal na direção do eixo da barra e A é a área da seção transversal. O momento fletor M é a resultante dos momentos gerados pelas tensões em torno do eixo horizontal da seção transversal:

$$M = \int_A (-y \sigma_x) dA \quad (79)$$

Assim, pode-se definir o vetor de tensões generalizadas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (80)$$

A formulação de elementos finitos não lineares é normalmente desenvolvida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. No caso da teoria clássica de vigas pode-se escrever:

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_V (\delta \varepsilon_m - y \delta \kappa) \sigma_x dV = \int_L (N \delta \varepsilon_m + M \delta \kappa) dx \quad (81)$$

Utilizando os vetores de tensões e deformações generalizadas o trabalho virtual interno pode ser escrito como

$$\delta U = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (82)$$

A formulação deste elemento inclui o cálculo das deformações, forças internas e matriz de rigidez tangente. Este elemento não possui não linearidade geométrica em sua formulação local, sendo esta não linearidade incluída apenas na transformação local-global discutida anteriormente. Assim, admitindo que os deslocamentos sejam pequenos no sistema local, as deformações do elemento são funções lineares dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= u_{,x} \\ \kappa &= v_{,xx} \end{aligned} \quad (83)$$

onde u é o deslocamento axial e v o deslocamento transversal da barra.

O primeiro passo da formulação do elemento é a obtenção das deformações sofridas e isso se dá através da interpolação dos deslocamentos no sistema local com auxílio das funções de forma. Devido a ordem das derivadas que aparecem na Equação (83), o deslocamento axial u requer funções de interpolação com continuidade C^0 e deslocamento transversal v requer funções com continuidade C^1 (Cook *et al.*, 2002). Portanto, o deslocamento axial será interpolado de forma linear, enquanto para o deslocamento transversal serão utilizados polinômios cúbicos:

$$\begin{aligned} u &= L_2 \bar{u} \\ v &= H_2 \bar{\theta}_1 + H_4 \bar{\theta}_2 \end{aligned} \quad (84)$$

onde L_2 é um polinômio de Lagrange linear e H_2 e H_4 são os polinômios de Hermite. As variáveis \bar{u} , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são os deslocamentos e rotações nodais respectivamente, como mostrados na Figura 32.

No intervalo de $0 \leq x \leq L$, a função de interpolação dos deslocamentos axiais pode ser definida por:

$$L_2 = \frac{x}{L} \quad (85)$$

De acordo com Cook *et al.* (2002) os polinômios de Hermite são usados para fazer a interpolação do deslocamento transversal podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} H_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ H_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (86)$$

Utilizando a Equação (83), pode-se calcular a deformação de membrana ε_m como:

$$\varepsilon_m = u_{,x} = L_{2,x} \bar{u} \quad (87)$$

Enquanto a curvatura é dada por:

$$\kappa = v_{,xx} = H_{2,xx} \bar{\theta}_1 + H_{4,xx} \bar{\theta}_2 \quad (88)$$

Escrevendo as deformações generalizadas de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & H_{2,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (89)$$

Substituindo as derivadas das funções de forma, pode-se escrever a matriz \mathbf{B} como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix} \quad (90)$$

Assim, pode-se verificar que neste caso a deformação axial é constante e a curvatura varia linearmente dentro do elemento.

Pode-se expressar o trabalho virtual interno como:

$$\delta U = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (91)$$

Portanto, o vetor de forças internas é dado por:

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (92)$$

A consideração da não linearidade física é feita integrando o vetor de forças internas através da quadratura de Gauss. Salienta-se que a quadratura de Gauss é definida em um sistema de coordenadas paramétrico no intervalo de -1 a 1. Como a integração é feita no intervalo de 0 a L , faz-se necessário uma correlação entre a variável da integral com a coordenada paramétrica r :

$$x = \frac{L}{2}(1+r) \Rightarrow dx = \frac{L}{2} dr \quad (93)$$

Assim, o vetor de forças internas é calculado como:

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \frac{L}{2} dr = \sum_{i=1}^{npg} (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma})_i w_i \frac{L}{2} \quad (94)$$

onde npg representa o número de pontos de Gauss e w_i são os pesos de Gauss. Quando o material é considerado linear elástico, as forças internas podem ser calculadas de forma analítica, ou seja, sem o uso da quadratura de Gauss. Assim, o vetor de forças local pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (95)$$

Logo, nota-se que a relação entre forças internas e deslocamentos no sistema local é linear dada pela conhecida expressão $\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{u}}$, onde a matriz de rigidez elástica local é definida por:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (96)$$

Contudo, para a não linearidade física ser considerada, a relação entre forças internas e deslocamentos deixa de ser linear, fazendo com que a matriz de rigidez tangente seja obtida a partir da derivada da expressão do vetor de forças internas (Equação (92)) em relação aos deslocamentos nodais:

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \int_0^L \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (97)$$

Logo, a matriz de rigidez no sistema local $\bar{\mathbf{K}}_t$ pode ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{C}_t \mathbf{B} dx \quad (98)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva que relaciona os incrementos de tensão e deformação e que pode ser definida como:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (99)$$

Como também pode ser escrita matricialmente:

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Os elementos desta matriz podem ser obtidos diferenciando as tensões generalizadas $\boldsymbol{\sigma}$ em relação às deformações generalizadas $\boldsymbol{\varepsilon}$. Pode-se reescrever estes elementos como:

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\varepsilon_m} dA \Rightarrow \overline{EA} = \int_A E_t dA \\ \overline{ES} &= \frac{\partial N}{\partial \kappa} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \kappa} dA \Rightarrow \overline{ES} = - \int_A E_t y dA \\ \overline{EI} &= \frac{\partial M}{\partial \kappa} = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \kappa} dA \Rightarrow \overline{EI} = \int_A E_t y^2 dA \end{aligned} \quad (101)$$

Nestas equações o termo E_t corresponde ao módulo de elasticidade tangente da curva tensão-deformação do material:

$$E_t = \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} \quad (102)$$

4.2.3.2. Elemento PLFRAMECR2

Este é um elemento mais complexo que o anterior, pois considera a NLG tanto no sistema local quanto na transformação local-global. Neste elemento a deformação de membrana considera o efeito dos deslocamentos transversais através da deformação de Green-Lagrange:

$$\varepsilon_m = u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \quad (103)$$

A fim de evitar o travamento de membrana devido ao desbalanceamento dos termos axiais e transversais (Crisfield, 1991), utiliza-se a deformação de membrana média:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{L} \int_L \left(u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \right) dx \quad (104)$$

Utilizando a Equação (84) e integrando as expressões resultantes chega-se a:

$$\varepsilon_m = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{30} \left(2\bar{\theta}_1^2 - \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + 2\bar{\theta}_2^2 \right) \quad (105)$$

Esta expressão pode ser escrita matricialmente como

$$\varepsilon_m = \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{u}} \quad (106)$$

onde

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_{m0} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{mL} \quad (107)$$

com

$$\mathbf{B}_{m0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (108)$$

e

$$\mathbf{B}_{mL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{30} & \frac{4\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{30} \end{bmatrix} \quad (109)$$

Para calcular o vetor de forças internas, é necessário determinar as deformações virtuais. A deformação de membrana virtual pode ser obtida a partir Equação (105):

$$\delta \varepsilon_m = \frac{\delta \bar{u}}{L} + \frac{1}{30} \quad (110)$$

Esta expressão pode ser escrita de forma matricial como

$$\delta \varepsilon_m = \bar{\mathbf{B}}_m \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (111)$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}}_m = \mathbf{B}_{m0} + \mathbf{B}_{mL} \quad (112)$$

A parcela de flexão deste elemento é idêntica ao elemento anterior (PLFRAMECR1), portanto todas as expressões relativas a esta parcela podem ser aproveitadas. Juntando as partes de membrana e flexão, as deformações virtuais podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_m \\ \delta \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}} \Rightarrow \delta \varepsilon = \bar{\mathbf{B}} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (113)$$

Desta forma, o vetor de forças internas é calculado como

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (114)$$

Caso, a NLF seja considerada deve proceder a mesma forma discutida para o elemento PLFRAMECR1. Por outro lado, caso o material seja linear elástico é possível integrar este vetor de maneira analítica.

A matriz de rigidez tangente é obtida diferenciando a equação acima em relação aos deslocamentos nodais:

$$\bar{\mathbf{K}}_t = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{K}}_e + \bar{\mathbf{K}}_g \quad (115)$$

A matriz de rigidez $\bar{\mathbf{K}}_e$ é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (116)$$

Utilizando a Equação (113), esta matriz pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dx \quad (117)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente, calculada conforme as equações do elemento anterior. Se o material for linear elástico, esta matriz é constante. Neste caso, é possível integrar exatamente esta matriz. Por outro lado, se a NLF for incluída, esta matriz deve ser integrada usando a Quadratura de Gauss como visto no elemento anterior.

Finalmente, a matriz de rigidez geométrica deste elemento no sistema local é dada por:

$$\mathbf{K}_g = \int_0^L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} dx = \int_0^L N \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx + \int_0^L M \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_b^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (118)$$

A matriz $\bar{\mathbf{B}}_b$ não depende dos deslocamentos, logo sua derivada é nula. O outro termo pode ser facilmente calculado diferenciando as Equações (112) e (109):

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/30 & -1/30 \\ 0 & -1/30 & 4/30 \end{bmatrix} \quad (119)$$

Como a matriz \mathbf{A} é constante, a matriz de rigidez geométrica local pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{K}}_g = \mathbf{A} \int_0^L N dx \quad (120)$$

Quando a NLF é considerada, a força normal é variável e a integral acima deve ser calculada utilizando a Quadratura de Gauss. Se o material for linear elástico, a força

normal é constante no elemento, correspondendo à força nodal \bar{N} mostrada na Figura 32. Neste caso, a matriz de rigidez geométrica local pode ser calculada de forma exata através da expressão:

$$\bar{\mathbf{K}}_g = N L \mathbf{A} \quad (121)$$

4.3. Não linearidade física

Este item está dividido em duas partes, os quais discutem os métodos mais frequentes para se considerar o efeito da não linearidade física nos elementos de pórtico. Vale salientar que a formulação do elemento com não linearidade geométrica apresentada anteriormente está preparada para poder incluir a relação tensão-deformação do material, ou seja, o modelo constitutivo.

4.3.1. Rigidez secante dos elementos

O método mais adequado que aborde a não linearidade física seria o que estivesse baseado na relação tensão-deformação do material em estudo. Contudo, é um processo que requer um maior custo computacional devido ao processo numérico. Assim, para evitar esse custo e simplificar a consideração das características do material, neste caso o concreto, desenvolveu-se o método da rigidez secante dos elementos. Neste método, considera-se o material como linear, mas se adota parâmetros que reduzam a rigidez do elemento estrutural como forma aproximada de consideração da não linearidade física do elemento.

A NBR 6118:2003 permite que, na ausência de ensaios, o módulo de elasticidade inicial pode ser determinado através da expressão:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}} \quad (122)$$

onde E_{ci} é o módulo de elasticidade inicial e f_{ck} é a resistência característica do concreto, ambos em MPa.

Por ser complicado e trabalhoso obter os dados de um modelo constitutivo que represente de maneira mais fiel o comportamento do concreto armado, a NBR 6118:2003 e pesquisadores como Mota *et al.* (2009) propõem a adoção de fatores que reduzam a rigidez do elemento estrutural analisado. Como se sabe, o concreto fatura quando submetido a tensões de tração, reduzindo a inércia da peça. Assim, na tentativa de representar a

fissuração e a conseqüente redução da inércia, esses fatores de redução de rigidez foram propostos. Desta maneira, a análise estaria adotando uma rigidez secante e não mais a rigidez inicial do elemento.

Em elementos em que o concreto é o material constituinte, a redução da rigidez à flexão dos elementos é dada por:

$$EI_{\text{sec}} = \beta \cdot E_{ci} \cdot I_c \quad (123)$$

onde β é o fator de redução da rigidez, E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial, e I_c é o momento de inércia à flexão da seção bruta de concreto. De acordo com a NBR 6118 (2003) em seu item 15.7.3, para a análise dos esforços globais de 2ª ordem, permite-se que β possa assumir diferentes valores dependendo da peça estrutural. Valores que são resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 – Valores para β

Peça estrutural	Valores de β	Condição
Lajes	0,3	Nenhuma
Vigas	0,4	Se $As' \neq As$
	0,5	Se $As' = As$
Pilares	0,8	Nenhuma

Vale ressaltar que essa norma, no item 15.7.3, também permite que se use o valor de 0,7 para β desde que a estrutura de contraventamento seja composta exclusivamente por pilares e vigas e o valor do coeficiente γ_z seja inferior a 1,3.

Sabe-se que os esforços de solicitação variam ao longo do elemento, o que implica que a resposta do material também pode variar. Paralelamente, a NBR 9062:2006, em seu item 5.1.2.2, recomenda que a consideração da não linearidade física (NLF) seja considerada conforme a NBR 6118:2003. Dessa maneira, a norma de concreto pré-moldado permite o emprego desse método para a análise das estruturas. Conclui-se que esses valores devam representar uma média dessas variações e que estão passíveis de serem imprecisos, pois foram originalmente propostos para estruturas de concreto monolíticas.

Adicionalmente, há a influência do efeito das ligações semirrígidas, pois os esforços atuantes nos pilares são inversamente proporcionais à rigidez das ligações. A medida que o grau de engastamento diminui, a ligação tende a ser articulada e

consequentemente os pilares serão mais responsáveis pelo contraventamento da estrutura. Isso implica que os pilares estarão sofrendo maiores esforços de flexão e assim propiciará o aparecimento de fissuras, mudando a inércia desses elementos. Diante dessa situação, alguns autores, como El Debs (2000) sugerem valores para β diferentes dos recomendados por norma.

4.3.2. Método das Fatias

O Método das Fatias é também outra forma de consideração aproximada da não linearidade física, porém mais preciso que o uso da rigidez secante dos elementos como visto anteriormente. Isto acontece devido ao fato da possibilidade de se considerar as curvas tensão-deformação não lineares do aço e do concreto.

Este método é simples e pode ser usado para se obter as tensões desde seções de geometria simples a geometrias complexas. Pode ser usado tanto em situações com flexão simples quanto em flexão oblíqua. É um método largamente utilizado com diversos trabalhos, ver Fonseca (2006) e as referências aí citadas.

Nesse método, a seção é dividida em n fatias horizontais e em cada uma dessas fatias toma-se a deformação e a tensão constantes e iguais aos valores correspondentes ao ponto no centro da fatia, como ilustrado na Figura 33. Nesta figura Δy_i é a espessura da fatia, \bar{y}_i é a coordenada do centro da fatia em relação ao centro geométrico da seção e b_i é a largura da fatia.

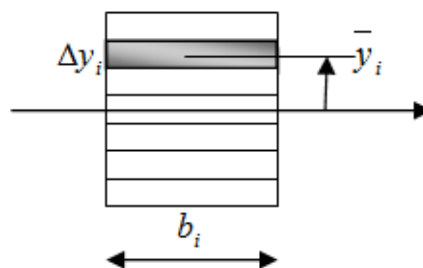


Figura 33 – Divisão da seção transversal em fatias.

Com o objetivo de facilitar o cálculo das integrais mostradas nas Equações (78) e (79) para calcular os esforços internos, as deformações e tensões são admitidas como constantes em cada fatia. Isso permite uma discretização da seção transversal do elemento

e conseqüentemente as integrais passam a ser somatórios. Logo, os esforços internos podem ser calculados como:

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^n \int_{y_i}^{y_{i+1}} \sigma(y) b(y) dy = \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i (y_{i+1} - y_i) \\
 M &= - \sum_{i=1}^n \int_{y_i}^{y_{i+1}} \sigma(y) b(y) y dy = - \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i \frac{1}{2} (y_{i+1}^2 - y_i^2)
 \end{aligned}
 \tag{124}$$

onde σ_i é a tensão no centro da fatia e b_i é a largura de cada fatia. Alternativamente, os esforços internos podem ser reescritos de forma mais simples e compacta:

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i \Delta y_i \\
 M &= - \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i \bar{y}_i \Delta y_i
 \end{aligned}
 \tag{125}$$

ou simplesmente

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^n \sigma_i A_i \\
 M &= - \sum_{i=1}^n \sigma_i A_i \bar{y}_i
 \end{aligned}
 \tag{126}$$

onde A_i é a área da i -ésima fatia.

Ressalta-se que, pelas equações mostradas, as fatias podem ter alturas variáveis, contudo é mais frequente adotar uma altura constante para todas as fatias. Altura esta obtida pela divisão da altura da seção pelo número de fatias. Verifica-se ainda que no caso de seções retangulares a largura das fatias é constante. Assim como o vetor de forças internas, a matriz constitutiva \mathbf{C}_t pode ser calculada por um somatório. Assim, utilizando o Método das Fatias a Equação (101) pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned}
 \overline{EA} &= \sum_{i=1}^n E_t A_i \\
 \overline{ES} &= - \sum_{i=1}^n E_t A_i \bar{y}_i \\
 \overline{EI} &= \sum_{i=1}^n E_t (I_i + A_i \bar{y}_i^2)
 \end{aligned}
 \tag{127}$$

Seções de concreto armado são formadas por 2 materiais: concreto e aço. Contudo, as Equações (126) e (127) podem ser utilizadas sem problema alteração alguma, desde considera-se o material correspondente a cada área A_i . Neste caso é necessário conhecer o comportamento destes dois materiais. Como exemplo de modelo constitutivo, a

Figura 34 mostra o diagrama parábola-retângulo proposto pela NBR 6118:2003 como representação do comportamento do concreto na compressão para ensaios uniaxiais.

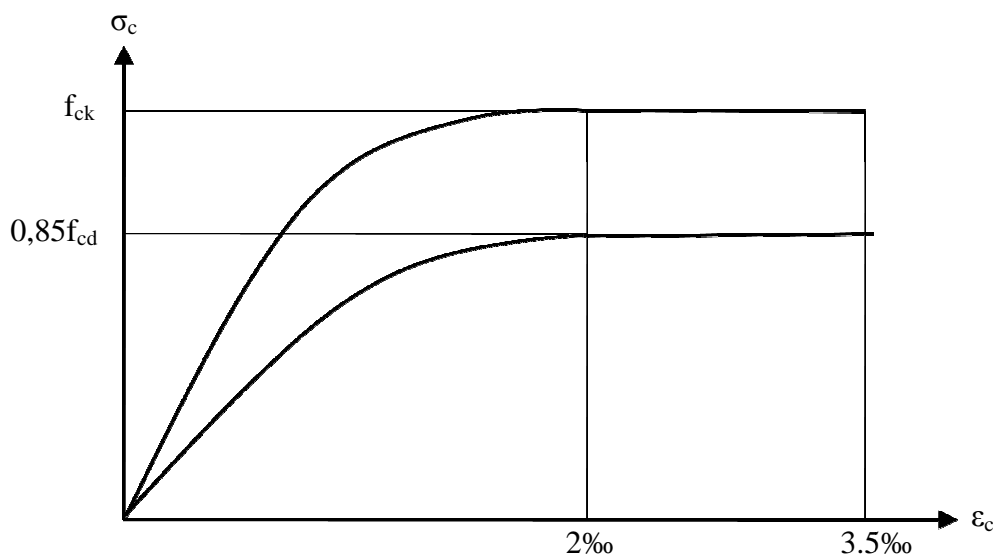


Figura 34 - Comportamento do concreto na compressão (Fonte: NBR 6118:2003).

O trecho inicial da curva superior desse diagrama é descrita pela expressão quadrática

$$\sigma_c = f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (128)$$

Contudo, a curva que deve ser considerada para projeto deve ser reduzida pelos coeficientes de segurança. Assim, a Equação (128) passa a ser:

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (129)$$

onde σ_c , f_{ck} , f_{cd} e ε_c é a tensão de compressão, a resistência característica à compressão, a resistência à compressão para projeto e a deformação do concreto, respectivamente. Apesar de ser dispensada, a resistência do concreto à tração existe quando este não está fissurado. Considerando essa hipótese, a NBR 6118:2003 permite que se considere essa resistência adotando a relação tensão-deformação descrita na Figura 35. Nesta figura, f_{ctk} e E_{ci} são as resistências características à tração e o módulo de elasticidade inicial do concreto, respectivamente. É importante ressaltar que de acordo com o item 8.2.10.1 desta norma, só é permitido a consideração desses modelos para a verificação das estruturas no Estado Limite Último (ELU).

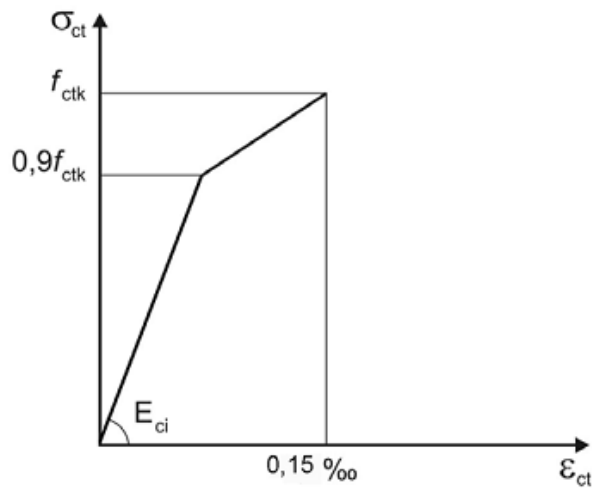


Figura 35 – Comportamento do concreto na tração (Fonte: NBR 6118:2003).

Como se sabe, o concreto e o aço possuem resistências e comportamentos diferentes quando submetidos à tração. Fato evidente no dimensionamento de peças de concreto armado, em que o concreto resiste principalmente à compressão, enquanto o aço é responsável por resistir à tração. Logo, é vital que se considere a participação do aço na análise com o Método das Fatias.

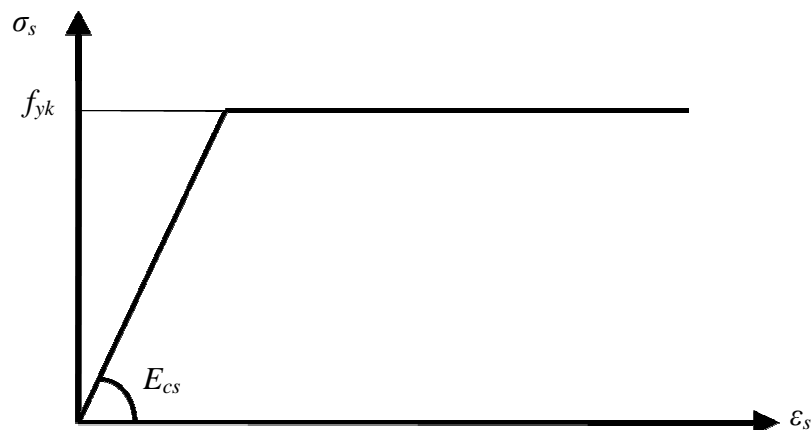


Figura 36 – Diagrama tensão-deformação para o aço (Fonte: NBR 6118:2003).

Assim, a NBR 6118:2003 também permite que se use para o aço o modelo elastoplástico mostrado na Figura 36. Os parâmetros f_{yk} e E_{cs} são a tensão de escoamento e módulo de elasticidade do aço, respectivamente. Percebe-se que o modelo de aço proposto pela norma possui um trecho elástico até a tensão de escoamento e, a partir desse ponto, torna-se perfeitamente plástico. Ou seja, não há a contribuição do encruamento.

4.4. Ligação semirrígida

A representação das ligações semirrígidas por elementos finitos pode ser feita através de duas maneiras. A primeira maneira é através da técnica de condensação estática, a qual permite o desenvolvimento de elementos de pórticos com a ligação semirrígida incorporada em sua formulação (força interna e matriz de rigidez). Estes elementos também são conhecidos como elementos híbridos. Esta abordagem tem sido utilizada por diversos autores (McGuire, 1999; Sekulovic *et al.*, 2001).

A segunda maneira é a utilização direta de um elemento de ligação semirrígida (mola) sobre as conexões entre os elementos de pórtico convencionais, que podem lineares ou não lineares, dependendo do tipo de análise.

4.4.1. Elementos híbridos

Quando elementos finitos básicos passam a incorporar propriedades adicionais em sua formulação, o elemento passa a ser do tipo híbrido. Esta forma de abordagem é baseada na técnica de condensação estática (Cook *et al.*, 2002), proporcionando um menor custo computacional. Contudo, a formulação de elementos híbridos possui um grau de sofisticação mais elevado que um elemento básico, o que resulta em uma implementação mais complexa.

Um exemplo de elemento híbrido é o proposto por Sekulovic (2001). A formulação deste elemento já possui o comprimento de excentricidade e a rigidez das molas simultaneamente. A Figura 37 apresenta as variáveis com a mesma nomenclatura do autor, mas com algumas equivalências ao elemento de ligação da Figura 39.

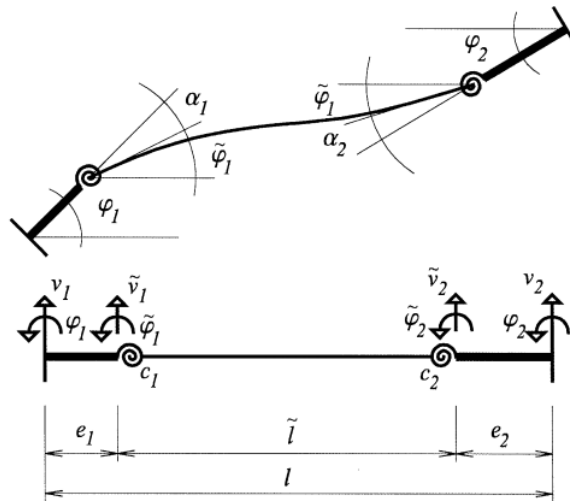


Figura 37 – Elemento híbrido de pórtico plano (Fonte: Sekulovic, 2001).

O estudo das ligações semirrígidas já é bastante desenvolvido na área de estruturas metálicas. Muitas vezes, quando se estuda esse tipo de ligação, encontram-se trabalhos propondo novos elementos tendo como contexto as estruturas em aço. Diante desse fato, é possível citar tanto trabalhos internacionais como de Sekulovic (2001) e Chan e Chui (2000), quanto nacionais de Pinheiro (2003) e Santos (2007). Devido às características do aço, alguns autores preferem colocar mais de uma mola para representar melhor o comportamento do aço. Isso pode ser visto na Figura 38.

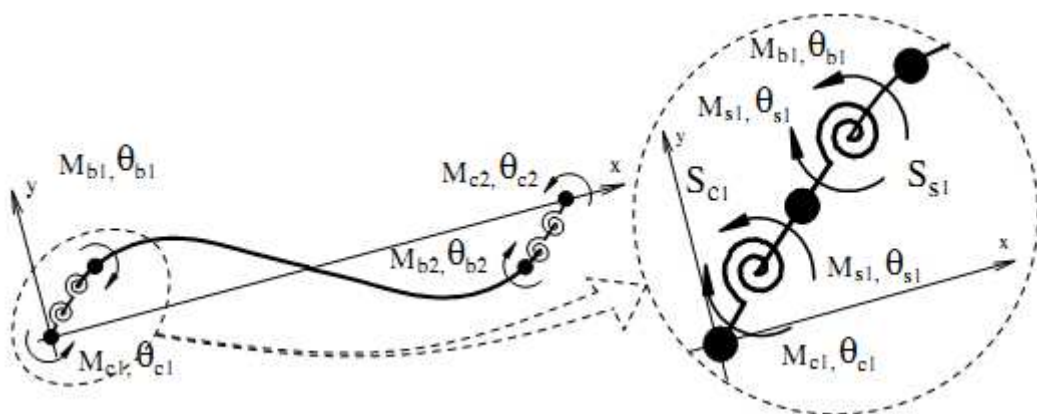


Figura 38 – Elemento híbrido de pórtico plano (Fonte: Chan e Chui, 2000 *apud* Santos, 2007).

Apesar dessas ligações estarem no contexto de estruturas de aço, é perfeitamente possível adotar a formulação matemática para a representação das ligações de estruturas de

concreto pré-moldado. Obviamente, deve-se fazer as devidas adaptações, como as propriedades do material.

4.4.2. Elemento de ligação

Como o próprio nome sugere, este método está baseado na ideia de haver um elemento específico fazendo a união de outros elementos. Em outras palavras, há uma mola de rigidez k associada a um grau de liberdade dos elementos ligados. No caso deste trabalho, a mola influencia a rigidez de rotação relativa entre elementos de vigas.

Esta maneira de modelagem permite que se usem os elementos de pórticos não lineares já conhecidos, bastando apenas que se definam as restrições de translações entre as vigas e pilares (rótula) e aplicação de uma mola com resistência à rotação relativa da ligação (ϕ):

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \quad (130)$$

onde θ_1 e θ_2 são as rotações absolutas do nós do elemento de ligação semirrígida, como mostrado na Figura 39.

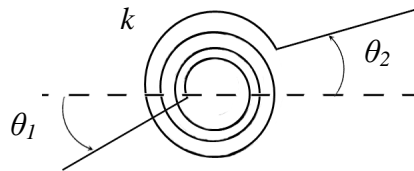


Figura 39 – Elemento de ligação semirrígida.

Considerando que a rigidez relativa da ligação é constante, a energia interna do elemento de ligação semirrígida é dada por:

$$U = \frac{1}{2}k\phi^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (131)$$

Assim, o vetor de forças internas (\mathbf{g}) deste elemento é obtido por derivação da energia interna:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} \Rightarrow \mathbf{g} = \begin{bmatrix} k(\theta_1 - \theta_2) \\ k(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \quad (132)$$

Finalmente, a matriz de rigidez (\mathbf{K}) é obtida por derivação do vetor de forças internas:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (133)$$

É importante notar que neste caso a ligação foi admitida como linear. Assim, o valor de k na Equação (133) pode ser obtido pela Equação (4).

O emprego deste tipo de elemento possui como vantagem uma relativa facilidade de ser implementado e pode ser usado em conjunto com elementos de pórtico, planos ou espaciais, sem a necessidade de alterá-los. Contudo, a modelagem exige um maior trabalho, pois há uma maior demanda de tempo para definição dos graus de liberdade e restrições. Ressalta-se que esses detalhes serão abordados no item 4.5.

Como consideração final, ressalta-se que esse elemento é pontual, o que significa que não possui comprimento a ser considerado. Alguns autores, como Sekulovic (2001), consideram um valor de excentricidade, a qual é caracterizada pela distância entre o eixo da coluna e o ponto de contato da viga com a ligação semirrígida. A excentricidade das ligações não será considerado neste trabalho.

O processo de modelagem consiste em definir dois nós de elementos de vigas a serem restringidos. A restrição desses nós consiste em compatibilizar os graus de translação e permitir a rotação relativa. Após a definição das restrições entre as vigas e pilares, insere-se o elemento de ligação. Este elemento possui dois graus de liberdade, os quais representam a rotação relativa ($\phi = \theta_2 - \theta_1$). No caso do exemplo da Figura 40, este elemento conecta-se aos graus de liberdade 12 e 13. Portanto neste exemplo $\theta_2 = u_{12}$ e $\theta_1 = u_{13}$, onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais (graus de liberdade da estrutura).

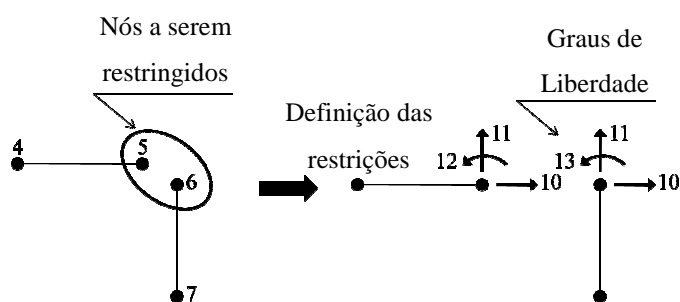


Figura 40 – Compatibilização dos deslocamentos da ligação.

4.5. Implementação computacional

Como visto na introdução, este trabalho possui duas vertentes de estudo. A primeira visa a implementação computacional do elemento de ligação e consideração simultânea da NLG e NLF para analisar pórticos de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas. A

segunda vertente visa estudar a estabilidade desses pórticos tomando o fator de restrição das ligações semirrígidas como variável.

Desta forma, foi adotado o programa acadêmico de elementos finitos *Finite element AnalysyS Tool* (FAST) escrito em linguagem C++ utilizando as técnicas de Programação Orientada a Objetos (POO). Este programa tem sido desenvolvido por professores e alunos do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), ligados ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará. No início deste trabalho o FAST já possuía várias ferramentas necessárias para o estudo de estabilidade de pórticos. Os métodos incrementais iterativos como Newton-Raphson, controle de deslocamento e o método de comprimento de arco já haviam sido implementados em seu código.

Inicialmente foi implementado o elemento de ligação semirrígida. Como visto em sua formulação, este é um elemento especial, pois possui a única finalidade de fazer a conexão entre dois elementos de viga e atribuir uma rigidez específica ao grau de liberdade associado. Devido a essa característica, optou-se por criar uma classe exclusiva ao elemento de ligação.

A segunda implementação no código do FAST foi a consideração da NLF. Até então, todos os elementos possuíam suas matrizes de rigidez obtidas analiticamente e consequentemente o único tipo de material que havia era o linear elástico. Contudo, para a consideração da NLF, foi necessário utilizar uma abordagem diferente da utilizada para a formulação dos elementos corrotacionais da utilizada anteriormente. A abordagem desenvolvida foi detalhada neste capítulo.

Adicionalmente, foi necessário implementar um método para calcular o esforços internos e a matriz constitutiva \mathbf{C}_t considerando os modelos constitutivos do concreto e do aço propostos pela NBR 6118:2003. A solução adotada foi a implementação do Método das Fatias. Ressalta-se que este método é independente do modelo constitutivo proposto por esta norma. Caso seja necessário, é simples definir uma nova curva tensão-deformação e utilizar esta curva nas análises estruturais.

4.6. Estados limites

Todo projeto estrutural, independente do sistema estrutural adotado, obrigatoriamente deve passar pelas avaliações de estados limites, as quais visam

essencialmente à segurança e em seguida o conforto dos usuários ou desempenho da estrutura.

Como a prioridade em um projeto estrutural é a preservação da segurança da construção e acima de tudo a das pessoas, primeiramente devem ser avaliados os Estados Limites Últimos (ELU). Um estado limite último é caracterizado pelo esgotamento da resistência dos elementos estruturais. Segundo a NBR 6118:2003, uma estrutura pode apresentar diversos ELUs devido a diferentes solicitações. Alguns desses estados são os provocados por ações dinâmicas, ocorrência do colapso progressivo, efeito de segunda ordem e casos especiais. Enfim, segundo essa mesma norma, o ELU é definido como o estado relacionado ao colapso ou ruína que seja necessário paralisar o uso da estrutura.

Tendo verificado o limite da ruína de uma estrutura, também é necessário que ela garanta um desempenho satisfatório e conforto, pois isto indica que o projeto a ser construído evite custos com manutenções corretivas e aborrecimentos por parte dos usuários. Nesse contexto, define-se a ideia do Estado Limite de Serviço (ELS), o qual busca essencialmente estabelecer a estrutura valores máximos para deslocamentos, deformações e fissuras.

No caso das estruturas de concreto pré-moldado, a NBR 9062:2006 diz que a verificação dos elementos referente ao ELU e ELS deve ser feita de acordo com as recomendações da NBR 6118:2003. Contudo, aquela norma define quais os deslocamentos horizontais máximos que uma estrutura de concreto pré-moldado pode sofrer e que são resumidos na Tabela 5.

Tabela 5 – Limites de deslocamentos horizontais globais (Fonte: NBR 9062:2006).

Caso	Tipo de edificação	Deslocamentos horizontais globais máximos (Combinação Frequente)
A	Edifício térreo	$H/600^{(1)}$
B	Edifício com um pavimento (mezanino)	$H/600$ ou $H_i/750^{(2)}$
C	Edifício com múltiplos pavimentos	$H/1200$ ou $H_i/750^{(2)}$ ou $H_2/600^{(3)}$

onde:

(1) H corresponde a altura total do edifício;

(2) H_i corresponde ao desnível entre dois pisos consecutivos;

(3) H_2 corresponde ao desnível entre o último piso e face inferior da laje da cobertura

Nota-se que no Caso C uma estrutura de concreto pré-moldado pode sofrer no máximo um deslocamento de $H/1200$ na primeira situação. Já uma estrutura de concreto moldado in loco, o deslocamento máximo passa a ser $H/1700$ para que não haja danos em

paredes de vedação. São valores interessantes quando comparados entre si, pois assim é visto que não há a obrigatoriedade das estruturas de concreto pré-moldado serem tão rígidas quanto as de concreto moldado in loco.

Na prática, a estrutura é primeiramente dimensionada para que resista às ações no ELU e, em seguida, verificada se atende aos critérios do ELS. Vale ressaltar que a combinação das ações do ELU não são as mesmas do ELS, pois seria uma atitude antieconômica e desnecessária. Para isso são definidas combinações de carregamentos para cada estado limite. Resumidamente, as ações permanentes e variáveis são majoradas por 1,4 quando se está avaliando a estrutura no ELU, podendo esse valor ser reduzido a 1,3 para estruturas de concreto pré-moldado. No capítulo 5 será apresentada uma situação numérica exemplificando as combinações para ELU.

Por fim, a estrutura deve ser avaliada referente às ações permanentes indiretas. Uma delas é quanto às imperfeições geométricas. Este tipo de ação pode vir a ser bastante acentuado nas estruturas constituídas por elementos reticulares caso haja grande desaprumo, seja entre pavimentos ou global. Novamente, a NBR 9062:2006 reconhece essa importância, mas recomenda que isso deve ser avaliado conforme exposto na NBR 6118:2003. Nela, entre os efeitos devidos ao vento e os devidos ao desaprumo, deve-se escolher o que provocar maior momento nas fundações.

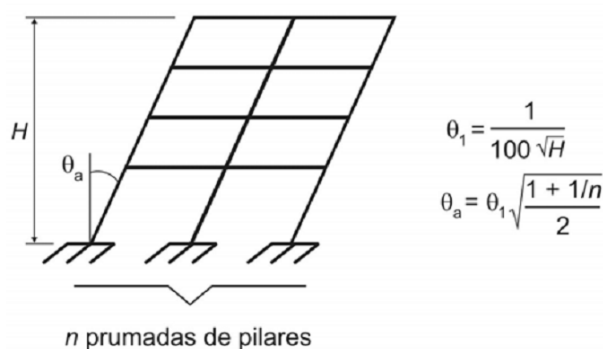


Figura 41 – Desaprumo (Fonte: NBR 6118:2003).

A Figura 41 mostra uma imperfeição geométrica global, ou seja, um desaprumo entre a fundação e o último pavimento, bem como a maneira de ser considerado na análise, sendo H é a altura total da edificação em metros e n é o número de prumadas de pilares. O valor mínimo de θ_1 é igual a 1/400 para o caso de estruturas de nós fixos ou a 1/300 para estruturas de nós móveis e imperfeições locais; sendo 1/200 seu valor máximo permitido.

5. EXEMPLOS

Este capítulo visa apresentar exemplos de aplicação da teoria apresentada anteriormente. Para isso, está dividido em três partes. A primeira discute exemplos que tem por finalidade a verificação e validação da implementação computacional realizada no programa acadêmico de elementos finitos FAST. A segunda parte apresenta um estudo inicial do efeito que as ligações semirrígidas causam sobre a estabilidade de pórticos planos de concreto pré-moldado. Por fim, a terceira parte apresenta um estudo mais abrangente da estabilidade de pórticos planos de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas. Esse último estudo é mais aprofundado e é baseado em um modelo de pórtico desenvolvido no presente trabalho.

5.1. Exemplos de verificação e validação

Este item apresenta quatro exemplos com o intuito de avaliar a implementação da não linearidade geométrica, ligações semirrígidas e dos modelos constitutivos do concreto e do aço. São três exemplos de caráter numéricos para realizar a verificação do programa FAST e um experimental com o objetivo de realizar a validação dos modelos propostos pela NBR 6118:2003.

5.1.1. Exemplo de verificação da não linearidade física

Este primeiro exemplo foi proposto por Fonseca (2006) e consiste em verificar a implementação tanto do método das fatias quanto dos modelos constitutivos do concreto e do aço propostos pela norma de concreto brasileira NBR 6118:2003.

O modelo estudado é de uma viga de concreto armado em balanço de um metro de comprimento com armadura longitudinal de 12 cm^2 de área transversal. O carregamento, geometria, posição da armadura e número de fatias q da viga são resumidos pela Figura 42.

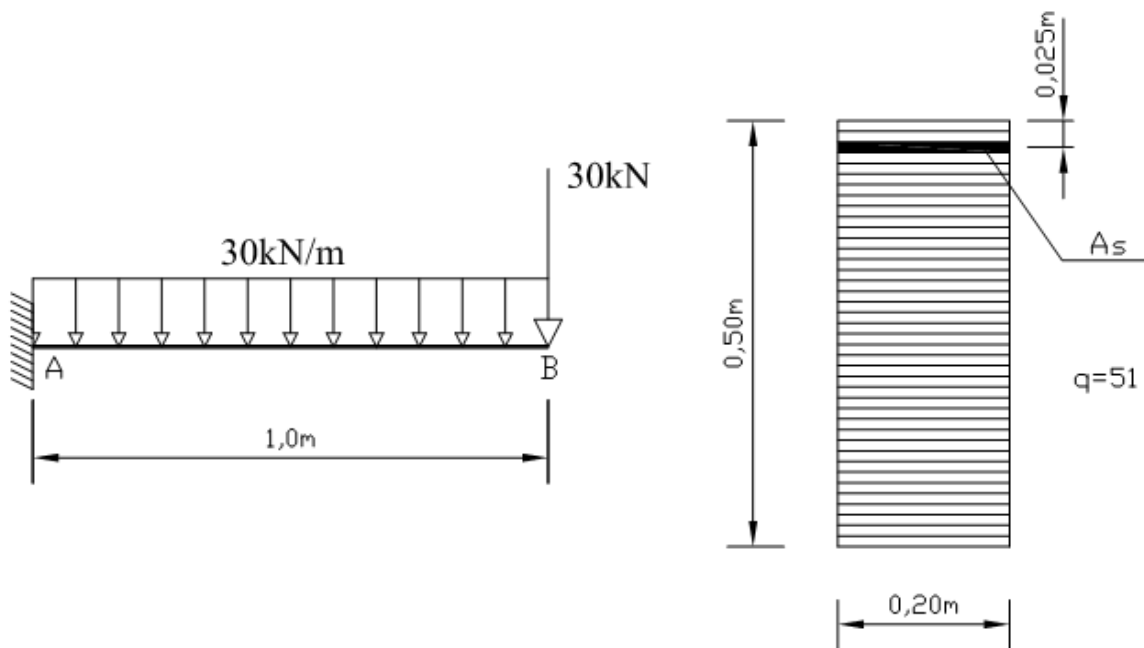


Figura 42 – Viga em balanço de concreto armado (Fonseca, 2006).

O concreto possui uma resistência à compressão equivalente a 20 MPa e sua relação tensão-deformação segue conforme as recomendações da NBR 6118:2003. É importante salientar que Fonseca (2006) considerou a resistência do concreto à tração e que este material é capaz de se deformar até 1,5‰ quando tracionado. O aço possui o módulo de elasticidade inicial igual a 210 GPa e a tensão de escoamento com o valor de 420 MPa.

A viga foi modelada com 16 elementos de Euler-Bernouli, sendo cada um com dois nós e dois pontos de integração em seu comprimento. Para a análise com NLF da viga, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos com incremento de -1×10^{-4} m para o deslocamento vertical e tolerância de 1×10^{-4} . Assim, Figura 43 apresenta os deslocamentos verticais na extremidade livre da viga obtidos por Fonseca (2006) e pelo programa FAST utilizado neste trabalho.

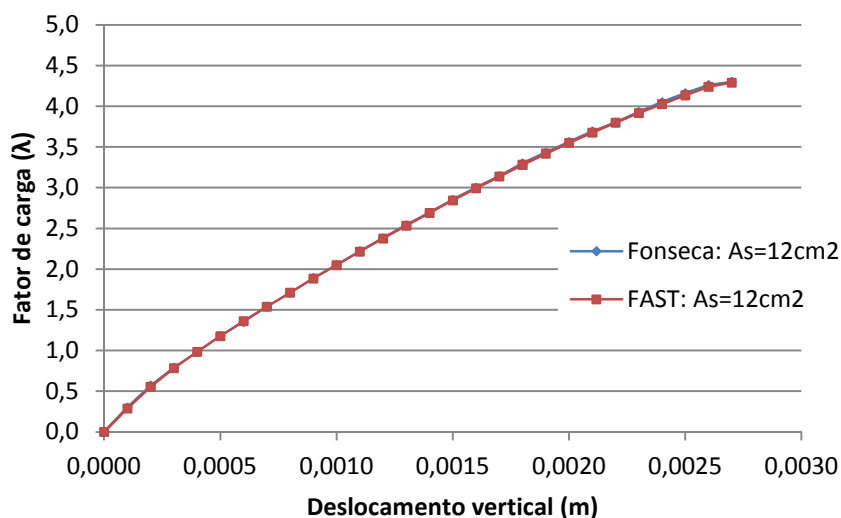


Figura 43 – Caminho de equilíbrio da viga.

Avaliando a Figura 43, conclui-se que a implementação do material no programa FAST foi bem sucedida, pois as curvas estão praticamente superpostas. Isso significa que não há diferenças significativas entre os resultados obtidos. Estruturalmente, entende-se que é uma viga super-armada, pois o caminho de equilíbrio cessa bruscamente, indicando pouca ductilidade da viga.

5.1.2. Exemplo de verificação da não linearidade geométrica e física

Este segundo exemplo foi proposto por Garcia (1974) *apud* Melo (2000) e visa a verificação simultânea da implementação tanto do modelo constitutivo dos materiais quanto da não linearidade geométrica.

O modelo estudado é um pórtico plano de concreto armado submetido a duas cargas verticais fixas P igual a 1280kN e duas forças horizontais variáveis F , sendo esta inicialmente igual a 100kN. O número de fatias q utilizado para discretizar a seção transversal dos pilares e da viga foi de 51. A geometria, ponto de aplicação das cargas e posição das armaduras estão resumidas na Figura 44.

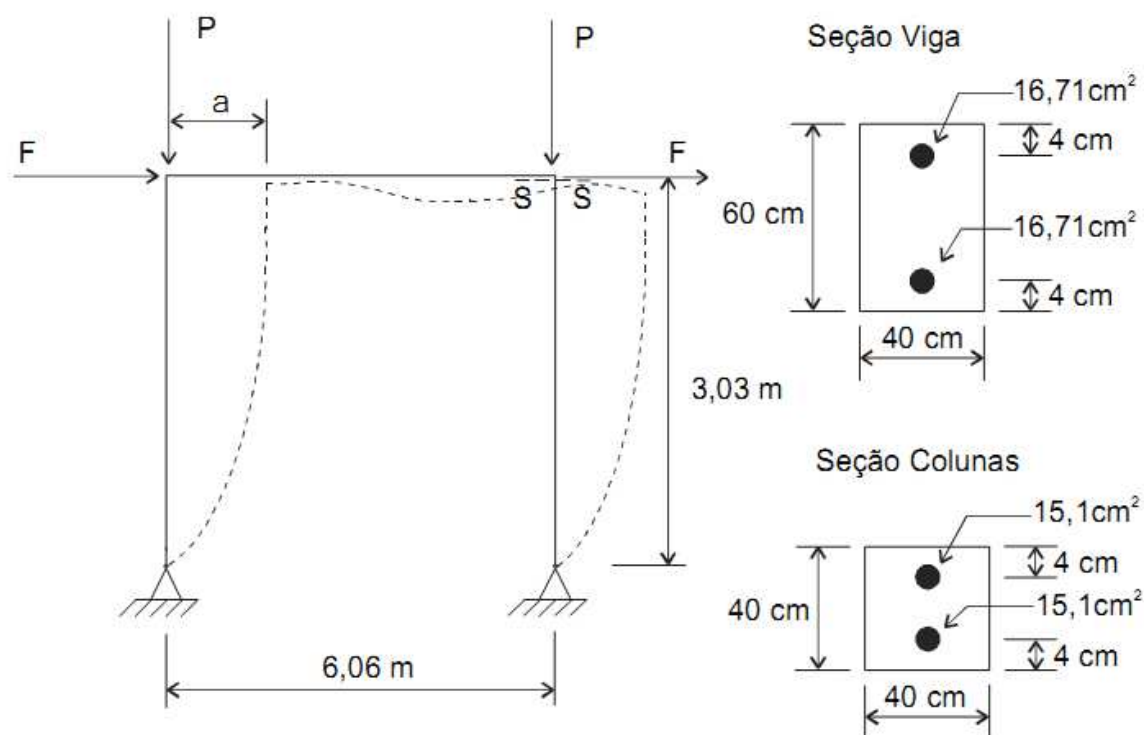


Figura 44 – Pórtico exemplo para verificação da NLG e NLF (Fonte: Melo, 2000).

O concreto possui uma resistência à compressão equivalente a 20 MPa e sua relação tensão-deformação segue conforme as recomendações da NBR 6118:2003. Contudo, a resistência à tração do concreto foi desprezada, pois foi considerado que o concreto só resistisse a esforços de compressão. O aço possui o módulo de elasticidade inicial igual a 210 GPa e a tensão de escoamento com o valor de 420 MPa.

O pórtico foi modelado com nove elementos (três por barra) corrotacionais básicos (PLFRAMECR1) em uma primeira análise e co-rotacionais melhorados (PLFRAMECR2) em uma segunda análise. Ressalta-se que cada um dos elementos possui dois nós e dois pontos de integração em seu comprimento. Em ambas as análises, o Método do Controle de Deslocamento foi adotado com incremento de 10^{-1} para o deslocamento vertical e tolerância de 10^{-6} para convergência. Assim, Figura 45 apresenta os deslocamentos no topo do pórtico obtidos por Melo (2000) e pelo programa FAST.

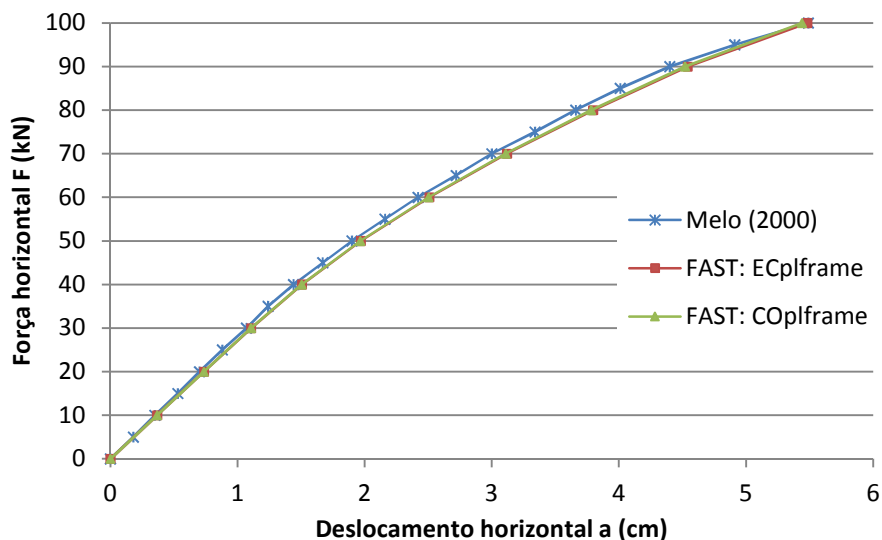


Figura 45 – Caminho de equilíbrio do pórtico.

Avaliando a Figura 45, conclui-se que os resultados obtidos pelo presente trabalho foram satisfatórios e coerentes aos obtidos por Melo (2000). Ressalta-se que os dados de Melo (2000) foram extraídos graficamente, o que pode explicar parte da pequena diferença entre os caminhos de equilíbrio. Outra explicação é o fato de Melo (2000) empregar elementos de pórtico plano para rotações moderadas e integração analítica das tensões no cálculo dos esforços internos.

5.1.3. Exemplo de validação

Diferentemente dos anteriores, este exemplo visa validar a metodologia de análise não linear física e geométrica apresentada no Capítulo 4 através da comparação com resultados experimentais. Este exemplo consiste em um pilar de concreto armado submetido a uma carga de compressão excêntrica. Foi ensaiado por Espion (1993) e utilizado por Bratina (2004) como referência de validação de modelos constitutivos de concreto armado.

O pilar possui um comprimento de 2,25m e é comprimido por uma carga P com uma excentricidade e de 1,5cm. A área de aço tracionada é igual à que está sob compressão e ambas equivalem a 2,26 cm². O número de fatias q utilizado para discretizar a seção transversal dos pilares e da viga foi de 51. A geometria da seção e a posição da armadura são resumidas na Figura 46.

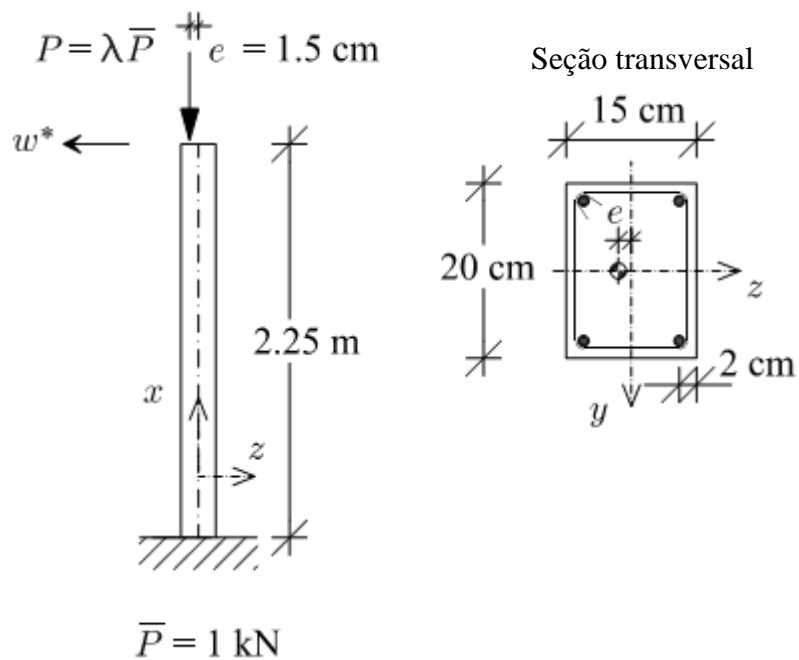


Figura 46 – Coluna de Foure (Fonte: Bratina, 2004).

O concreto possui uma resistência à compressão equivalente a 38,3 MPa e o modelo constitutivo adotado obedece as recomendações da NBR 6118:2003. Novamente, a resistência à tração do concreto foi desprezada, pois Bratina (2004) adotou para o concreto o modelo constitutivo proposto pelo Eurocode 2 (1999), o qual não considera essa influência. O aço possui o módulo de elasticidade inicial igual a 200 GPa e a tensão de escoamento com o valor de 465 MPa.

O pilar foi modelado com quatro elementos corrotacionais melhorados. Cada um dos elementos possui dois nós e dois pontos de integração em seu comprimento. Na análise, o Método do Comprimento de Arco foi adotado com tolerância de 10^{-6} para convergência e incremento de carga inicial igual a 10 kN. Assim, Figura 47 apresenta os deslocamentos no topo do pilar obtidos por Bratina (2004) e pelo programa FAST.

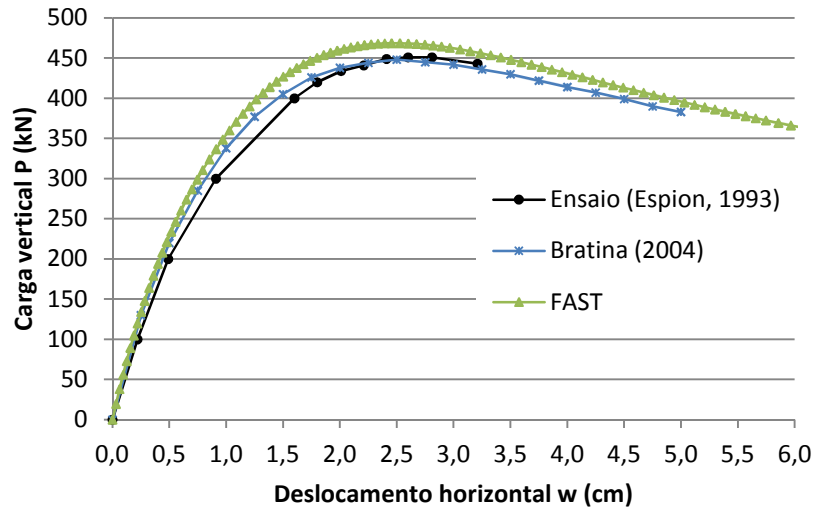


Figura 47 – Caminho de equilíbrio do pilar.

Com as curvas mostradas na Figura 47, é possível comparar os resultados entre a teoria e a realidade da estrutura. Primeiramente, conclui-se que ambos os modelos constitutivos propostos pelas normas são adequados à representação do comportamento não linear do concreto, visto que as curvas estão próximas aos resultados de laboratório. Contudo, o modelo do Eurocode foi o que mais se aproximou dos resultados experimentais. Ressalta-se que a curva obtida pelo programa FAST foi baseada no modelo proposto pela norma brasileira de concreto e que se mostra bom para descrever o comportamento do material.

5.1.4. Exemplo de verificação das ligações.

Este é o último exemplo com finalidade de verificação. Este exemplo visa verificar a implementação das ligações semirrígidas e consiste em um pórtico plano submetido a cargas verticais e horizontais. Apesar de ter sido proposto por Sekulovic (2001) para avaliar estruturas metálicas com ligações semirrígidas, a implementação computacional de uma ligação com mola é basicamente a mesma.

O modelo estudado é um pórtico plano de aço submetido a duas cargas verticais fixas P igual a 450kN e uma forças horizontal H equivalente a $0,005P$. A geometria, ponto de aplicação das cargas e propriedades do material estão resumidas na Figura 48.

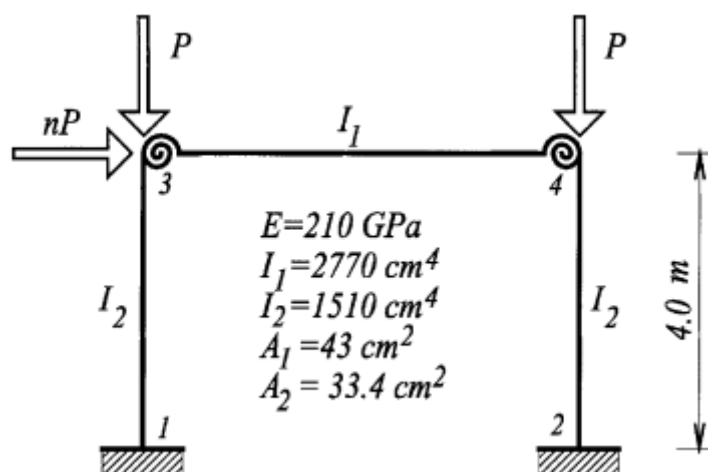


Figura 48 – Pórtico plano com ligações semirrígidas (Fonte: Sekulovic, 2001).

O pórtico foi modelado com duas malhas distintas para se avaliar a convergência dos resultados. Na primeira, utilizou-se dois elementos por barra, enquanto na segunda malha, quatro elementos por barra. Em todas as análises foram utilizados elementos de Euler-Bernouli em que a matriz de rigidez elástica é obtida analiticamente. As ligações do pórtico se encontram em quatro situações: articulada, engastada e duas semirrígidas. Segundo Sekulovic (2001), as ligações semirrígidas são conhecidas por *double web angle* (DWA) e *top and seat angle with double web angle* (TSDWA), cada uma possuindo rigidez a rotação de 6021,5 kN/rad e 11286,2 kN/rad respectivamente. Ressalta-se que Sekulovic (2001) desenvolveu um elemento híbrido com as ligações semirrígidas já incorporadas em sua formulação enquanto este trabalho utiliza elementos de viga lineares conectados por elementos de mola. Assim, as tabelas a seguir apresentam os deslocamentos no topo, os momentos na base e as cargas críticas do pórtico obtidas por Sekulovic (2001) e pelo programa FAST.

Tabela 6 – Deslocamentos e momentos para dois elementos por barra.

	Deslocamentos horizontais no ponto 3 (m)				Momentos no ponto 1 (kN.m)			
	Linear		Não linear		Linear		Não linear	
	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST
Rígida	2.579E-03	2.579E-03	3.642E-03	3.635E-03	2.52E+03	2.524E+03	3.38E+03	3.48E+03
TSDWA	2.870E-03	2.869E-03	4.239E-03	4.231E-03	2.64E+03	2.639E+03	3.66E+03	3.78E+03
DWA	3.095E-03	3.097E-03	4.749E-03	4.747E-03	2.73E+03	2.729E+03	3.91E+03	4.04E+03
Articulada	7.573E-03	7.572E-03	9.519E-02	9.214E-02	4.50E+03	4.502E+03	4.77E+04	4.80E+04

Tabela 7 - Deslocamentos e momentos para quatro elementos por barra.

	Deslocamentos horizontais no ponto 3 (m)				Momentos no ponto 1 (kN.m)			
	Linear		Não linear		Linear		Não linear	
	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST
Rígida	2.579E-03	2.579E-03	3.642E-03	3.636E-03	2.52E+03	2.524E+03	3.38E+03	3.41E+03
TSDWA	2.870E-03	2.869E-03	4.239E-03	4.233E-03	2.64E+03	2.639E+03	3.66E+03	3.70E+03
DWA	3.095E-03	3.097E-03	4.749E-03	4.748E-03	2.73E+03	2.729E+03	3.91E+03	3.95E+03
Articulada	7.573E-03	7.572E-03	9.519E-02	9.258E-02	4.50E+03	4.502E+03	4.77E+04	4.67E+04

Tabela 8 – Carga crítica em ambas as análises.

	Carga crítica (N)			
	2 elementos		4 elementos	
	Sekulovic	FAST	Sekulovic	FAST
Rígida	1.530E+06	1.54E+06	1.530E+06	1.530E+06
TSDWA	1.395E+06	1.39E+06	1.395E+06	1.383E+06
DWA	1.289E+06	1.28E+06	1.289E+06	1.282E+06
Articulada	4.890E+05	4.89E+05	4.890E+05	4.890E+05

Estudando os resultados obtidos, conclui-se que a implementação do elemento de mola no FAST foi bem sucedida devido a proximidade dos resultados. Nota-se também que a rigidez das ligações afeta diretamente na capacidade de carga do pórtico. À medida que a ligação se enrijece, o pórtico se desloca menos, aumenta a carga crítica e os momentos na base. Percebe-se também que o refinamento da malha proporcionou resultados mais próximos aos obtidos por Sekulovic (2001). Sendo análises lineares, espera-se que os resultados sejam idênticos. Contudo, houve pequenas diferenças, mas é possível que isso ocorra devido a alguma consideração não explicitada no artigo estudado ou na formulação do elemento híbrido utilizado.

5.2. Análise linear e não linear geométrica com ligações semirrígidas

Este item tem como objetivo um estudo inicial sobre como as ligações afetam a estabilidade de pórticos planos de concreto pré-moldado e identificar a eficiência do coeficiente γ_z como ferramenta de aproximação dos resultados lineares com os não lineares. Esse estudo é baseado no exemplo proposto por Ferreira *et al.* (2005) e estudado por Jeremias (2007). Ressalta-se que é um exemplo conhecido e por possuir várias considerações em análises, é importante tê-lo como referência.

Este modelo consiste em um pórtico plano de concreto pré-moldado e com ele são realizadas diversas análises com o intuito de se obter os deslocamentos e momentos de reação nos apoios. Essas variáveis servem de parâmetros de avaliação do efeito das ligações semirrígidas sobre a estabilidade. A metodologia para a obtenção dessas variáveis consiste na comparação de diferentes análises. A primeira é uma simples análise linear. A segunda análise também é linear, mas possui a majoração das forças horizontais pelo coeficiente γ_z . A terceira análise utiliza os elementos co-rotacionais para se avaliar o efeito da não linearidade geométrica.

O pórtico possui 20 metros de altura por 19,5 metros de largura, sendo cinco vigas de seção 30 cm x 60 cm e quatro pilares de 50 cm x 50 cm. O material considerado obedece a lei de Hooke, ou seja, é linear e seu módulo de elasticidade é de 35 GPa. A geometria do pórtico, ponto de aplicação e intensidade do carregamento são resumidas pela Figura 49.

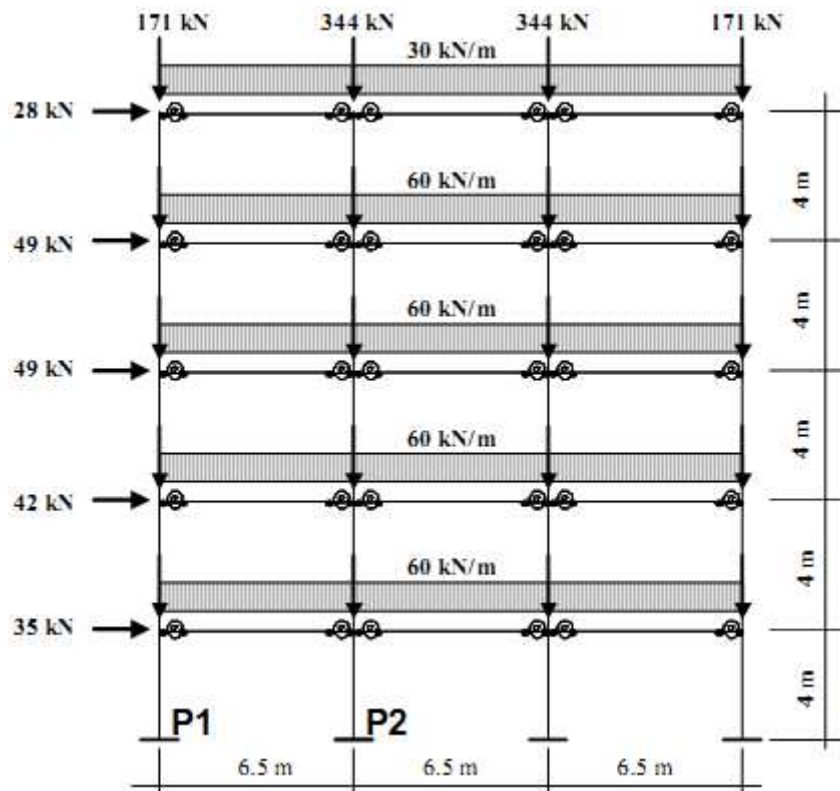


Figura 49 – Modelo do pórtico analisado (Fonte: Ferreira *et al*, 2005).

Como mencionado, são utilizados três tipos de análises para o estudo desse exemplo: análise de primeira ordem, de segunda ordem através da majoração das forças horizontais pelo γ_z e de segunda ordem considerando a não linearidade geométrica. Nos

três tipos de análises, considerou-se quatro elementos por barra e a não linearidade física através da rigidez secante dos elementos estruturais. Assim, adotou-se $0,4EI$ e $0,8EI$ como rigidez à flexão para vigas e pilares respectivamente. A rigidez das ligações foi considerada através da rigidez secante da relação momento-rotação das ligações viga-pilar. Essa rigidez foi obtida variando o fator de restrição de zero (ligação articulada) a um (ligação engastada).

A Figura 50 apresenta os deslocamentos horizontais no topo da estrutura obtidos por Ferreira *et al.* (2005) e pelo programa FAST. Nesse gráfico encontram-se os deslocamentos obtidos pela análise linear, análise de segunda ordem com uso do γ_z e análise não linear com uso de elementos PLFRAMECR2.

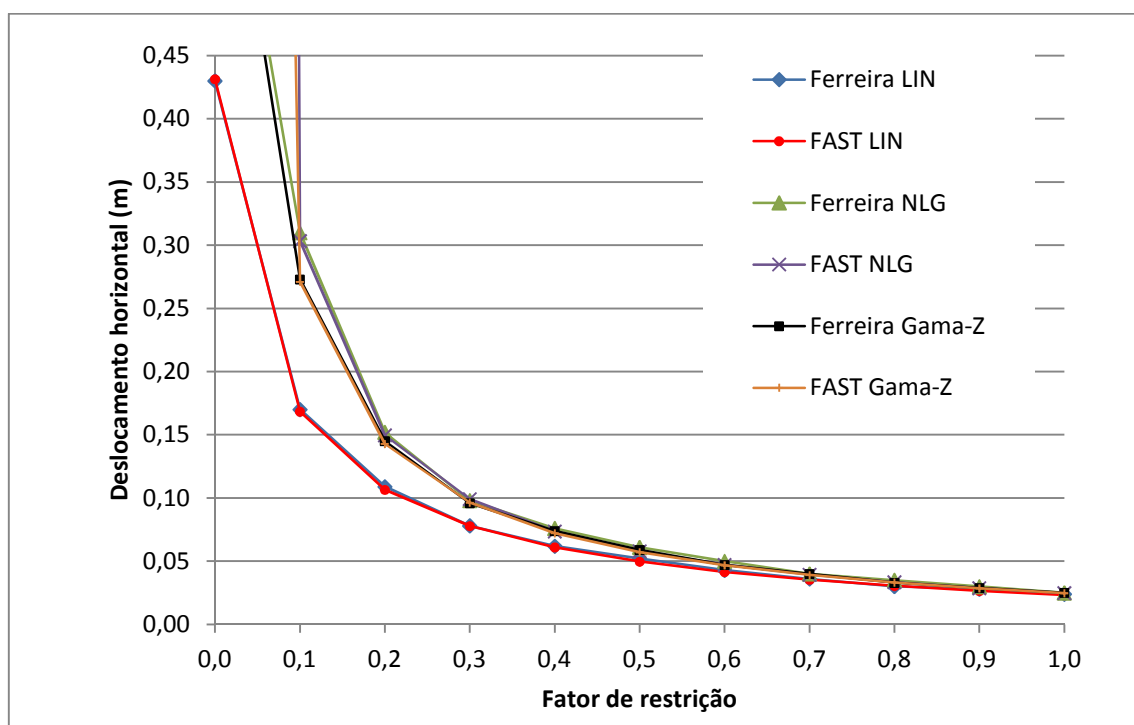


Figura 50 – Deslocamentos horizontais.

Nota-se pelos resultados, que as análises lineares (LIN) são idênticas. De modo semelhante, as análises com uso do γ_z são bastante próximas, havendo divergência de resultados quando a ligação é totalmente articulada. Esta observação também é válida quando se compara as análises com não linearidade geométrica (NLG). Conclui-se que a análise linear deste pórtico diferencia-se da não linear à medida que a ligação se torna menos rígida. Dessa forma, o coeficiente γ_z se mostra uma ferramenta bastante prática para aproximar os resultados da análise linear com os obtidos da análise não linear. Deduzem-se

as mesmas observações para os gráficos da Figura 51 e da Figura 52, visto que se comportam de maneira análoga.

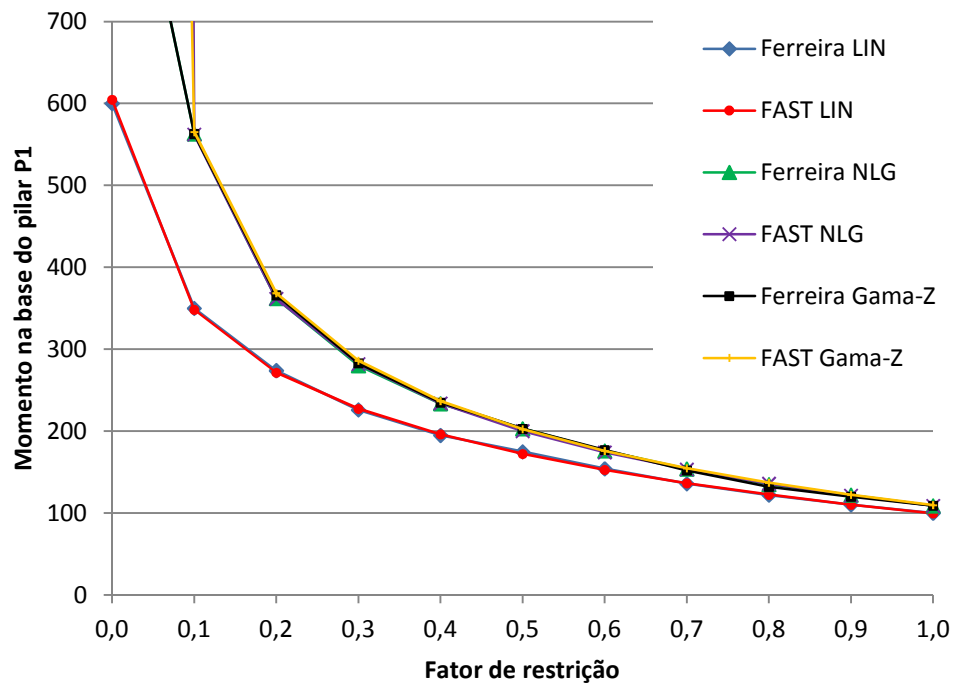


Figura 51 – Momentos na base do pilar P1.

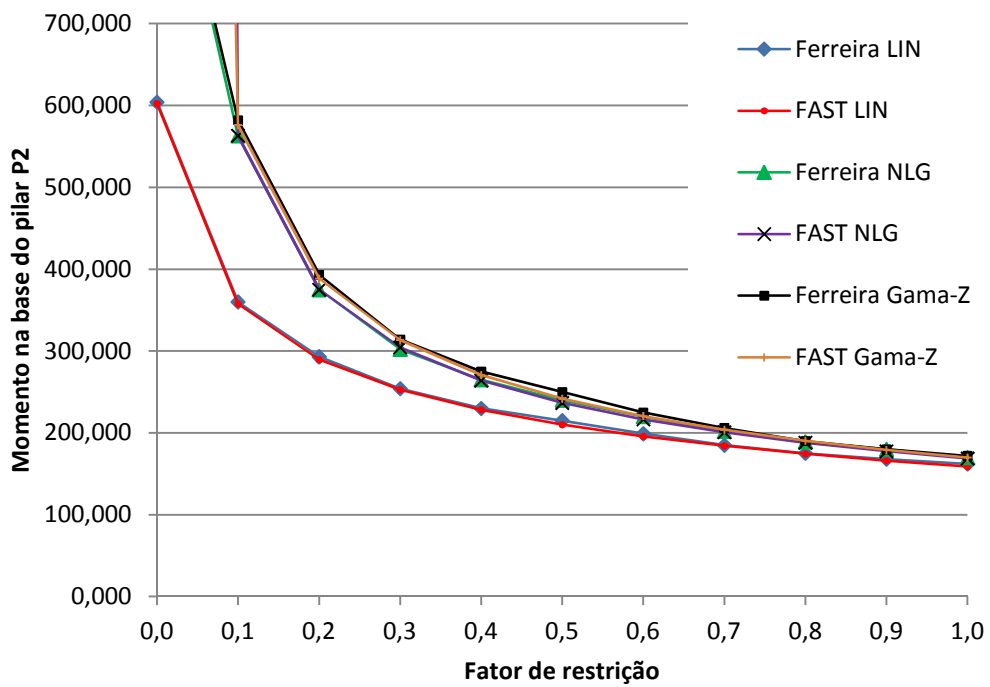


Figura 52 – Momentos na base do pilar P2.

De posse de todos os resultados e admitindo que uma análise não linear geométrica seja mais realista, conclui-se que o coeficiente γ_z se mostra uma ferramenta prática e eficiente para se obter deslocamentos e esforços mais precisos que uma análise linear, devendo ser usado dentro do intervalo previsto em norma. A estabilidade avaliada por deslocamentos e esforços está diretamente influenciada pela rigidez das ligações, mas a simples análise linear não se mostra eficaz para estruturas com ligações mais flexíveis. Como solução a esse problema, deve-se utilizar uma aproximação através do coeficiente γ_z ou empregar a análise não linear geométrica. Contudo, a não linearidade física foi considerada de maneira aproximada, o que motiva um estudo mais aprofundado de seu efeito na estrutura.

5.3. Pórtico de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas

Este exemplo trata de um edifício fictício com estrutura de concreto pré-moldado que será utilizado para estudo da influência das ligações sobre a estabilidade global da estrutura. O sistema estrutural responsável pelo contraventamento da estrutura de concreto pré-moldado a ser analisada é composto por pórticos com pilares engastados na fundação. Como se pretende avaliar o grau de continuidade necessária da ligação viga-pilar, as ligações têm a rigidez variável desde uma situação articulada à engastada. Inicialmente, a rigidez da ligação será obtida em função do fator de restrição, variando-o de 0 a 1.

Os pilares da estrutura estudada possuem seções quadradas de 50 cm por 50 cm. As vigas dessa estrutura são retangulares, possuindo 81 cm de largura e 48 cm de altura. Para todos os elementos, o concreto possui uma resistência característica de 40 MPa. Não se pretende estudar o edifício como um pórtico espacial e sim conhecer o comportamento de um pórtico plano isolado. Assim, a Figura 53 apresenta a geometria do edifício de concreto pré-moldado e como os pórticos planos estão posicionados.

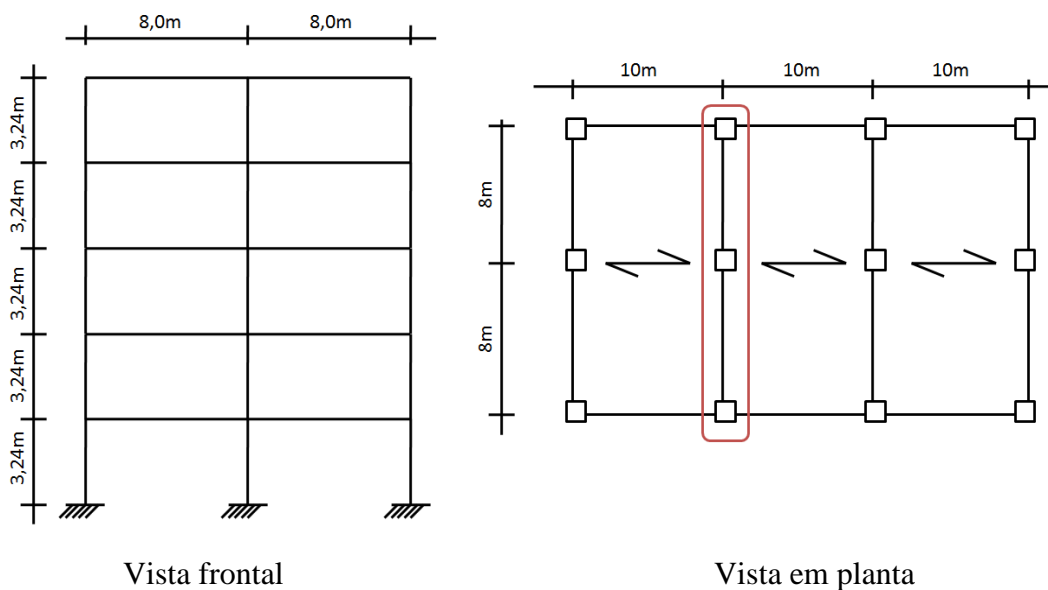


Figura 53 – Geometria e posição do pórtico analisado.

Pela figura acima, conclui-se que o carregamento dos pórticos da extremidade é diferente dos centrais, visto que estes estão servindo de apoio para duas lajes. Devido a esse fato, optou-se pelos pórticos centrais para estudo, pois estão mais carregados.

5.3.1. Ações verticais e horizontais

Sabe-se pela literatura que uma estrutura de concreto pré-moldado deve ser analisada para cada estágio de sua construção, visto que o carregamento e a solidarização entre os elementos mudam no decorrer de sua execução. Para este exemplo, admitiu-se que a estrutura está finalizada. Dessa maneira, são apresentados neste item os carregamentos característicos verticais e horizontais.

Considerando uma laje alveolar de concreto pré-moldado de 21cm de altura já pronta com 10m de comprimento, como visto na Figura 53, a Tabela 9 resume as cargas permanentes atuantes em cada viga do pórtico a ser analisado.

Tabela 9 – Composição do carregamento permanente.

Peso próprio da laje pronta de 21cm de altura	31,40 kN/m
Pavimento e revestimento	20,00 kN/m
Paredes	20,00 kN/m
Capa de 5cm de concreto	17,50 kN/m
Peso próprio da viga	9,72 kN/m

Como parte do processo de projeto, também deve-se considerar as cargas acidentais atuantes sobre a estrutura. Por ser um edifício comercial, recomenda-se que se adote 40 kN/m². Com esse dado, a Tabela 10 resume o total das cargas permanentes e acidentais distribuídas ao longo das vigas oriundas de uma laje de 10m de comprimento.

Tabela 10 – Resumo dos carregamentos permanentes e acidentais.

Carregamentos permanentes	98,63 kN/m
Carregamento acidental	40,00 kN/m

Neste trabalho, as análises são voltadas para o estado limite último da estrutura. Assim, torna-se necessário empregar a combinação apropriada de cargas permanentes e acidentais conforme a NBR 6118:2003. Conforme esta norma, os coeficientes utilizados para a combinação de cargas para o ELU são dados na expressão:

$$F_d = 1,3F_{gk} + 1,4(0,7F_{qk} + 0,6F_{vk}) \quad (134)$$

Onde F_{gk} , F_{qk} e F_{vk} são as ações permanentes, acidentais e de vento respectivamente. Ressalta-se que em estruturas de concreto é usual utilizar um coeficiente majorador igual a 1,4 para F_{gk} , mas a NBR 6118:2003 permite que se reduza esse coeficiente para 1,3 em estruturas de concreto pré-moldado, pois se entende que há uma menor variação de cargas. A Tabela 11 resume os valores de cálculo para os carregamentos permanentes e acidentais.

Tabela 11 Carregamentos de cálculo finais.

Carregamentos permanentes (F_{gd})	128,21 kN/m
Carregamento acidental (F_{qd})	39,2 kN/m
Carregamento final ($F_{gd} + F_{qd}$)	167,41 kN/m

Como últimas ações a serem consideradas, apenas as forças devido ao vento foram admitidas como ação horizontal. Ressalta-se que, por norma, deve-se considerar na análise a ação das atividades sísmicas caso a estrutura fique localizada em uma região sujeita a terremotos. Como este trabalho propõe apenas análises estáticas, a ação horizontal devido às atividades sísmicas foi desconsiderada. A Tabela 12 resume as forças horizontais

atuantes no nível de cada pavimento obtidos a partir das recomendações da NBR 6123:1988 para um edifício localizado na cidade de Fortaleza sob baixa turbulência.

Tabela 12 – Ação do vento de cálculo.

Pavimento	F_{vk}	F_{vd}
5°	6,8 kN	5,7 kN
4°	13,1 kN	11,0 kN
3°	12,4 kN	10,4 kN
2°	11,6 kN	9,7 kN
1°	10,2 kN	8,6 kN

A Figura 54 resume o pórtico exemplo com os carregamentos finais utilizados com suas ligações semirrígidas representadas simbolicamente por um círculo com um “x”.

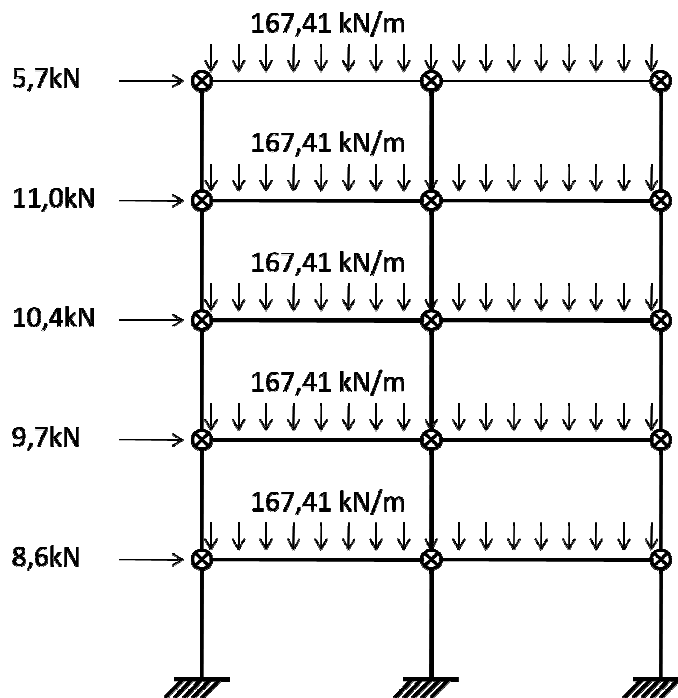


Figura 54 – Pórtico plano analisado.

Para todas as análises, foram considerados quatro elementos por barra para a discretização da malha do pórtico exemplo. Esta decisão foi tomada a partir dos estudos de outros exemplos, pois este grau de refinamento se mostra adequado na obtenção de

resultados consistentes. Os métodos incrementais utilizados foram o Método de Newton-Raphson e o Método do Controle de Deslocamento, sendo seus parâmetros discutidos mais a frente nos itens das análises.

5.3.2. Tipos de análises realizadas

Neste trabalho, buscou-se estudar o pórtico exemplo proposto através de diferentes tipos de análises para se obter os deslocamentos e os momentos nos apoios. Isto permite avaliar as diferenças dos resultados obtidos e então apontar os tipos de análises mais adequadas ao projeto de estruturas de concreto pré-moldado. Os tipos de análises utilizadas foram linear, linear com γ_z , não linear geométrica e não linear geométrica e física juntas. Mais a frente são mostrados os parâmetros utilizados nessas diferentes análises.

- Análise Linear

Para a análise linear, adotou-se como coeficiente β o valor de 0,8 e 0,4 para calcular o módulo de elasticidade secante (E_{cs}) de pilares e vigas, respectivamente. O módulo de elasticidade inicial foi obtido através da Equação (122). O elemento finito utilizado foi o elemento de viga linear de Bernoulli.

Realizada esta primeira análise, calculou-se o parâmetro γ_z para cada modelo com ligação semirrígida diferente. Este processo permite a majoração das ações do vento pelo parâmetro γ_z e assim fazer com que os resultados se aproximem com os de uma análise não linear geométrica.

- Análise com não linearidade geométrica

Para a análise com não linearidade geométrica, adotou-se como coeficiente β o valor de 0,8 e 0,4 para calcular o módulo de elasticidade secante (E_{cs}) de pilares e vigas respectivamente. O módulo de elasticidade inicial foi obtido através da Equação (122). O elemento finito utilizado foi o elemento de viga corrotacional melhorado de Bernoulli.

O método incremental utilizado nesta análise foi o Método de Newton-Raphson com um incremento de carga de 0,1 em 10 passos e uma tolerância de 10^{-4} .

- Análise com não linearidade geométrica e física

Para a análise com não linearidade geométrica e física simultâneas, foi empregado o método das fatias para representar de forma mais precisa a fissuração do concreto. A curva utilizada para o modelo do concreto foi a de cálculo, conforme a Equação (129). Isso implica que a resistência dos materiais foi reduzida conforme as recomendações da NBR 6118:2003. A resistência característica do concreto é de 40 MPa e seu coeficiente minorador é de 1,4, obtendo a resistência a compressão de cálculo do concreto (f_{cd}). O aço utilizado possui uma tensão de escoamento de 500 MPa e módulo de elasticidade igual a 210 GPa. Isso corresponde ao aço CA-50 produzido pelas indústrias brasileiras. Seu coeficiente minorador adotado foi de 1,15 e o modelo constitutivo considerado foi de uma material elasto-plástico perfeito com uma deformação máxima de 10%. Ressalta-se que apesar de existir, a resistência à tração do concreto foi desconsiderada.

O método incremental utilizado nesta análise foi o Método de Controle de Deslocamentos com um incremento de deslocamento de 10^{-3} m com um máximo de 200 passos e uma tolerância de 10^{-4} .

Ressalta-se que a armadura foi dimensionada com o auxílio do programa comercial TQS, o qual é voltado para o projeto de estruturas de concreto armado. Contudo, as armaduras obtidas foram para a situação de um pórtico com ligações perfeitamente rígidas, sendo o ideal a obtenção de um tipo de armadura para cada situação de ligações semirrígidas, visto que os esforços solicitantes variam em função da rigidez da ligação. A Figura 55 apresenta como ficou a malha utilizada nesta análise com dimensões em metro, bem como a identificação dos elementos e suas respectivas propriedades. A Tabela 13 resume as 5 propriedades utilizadas. Cada uma possui as armaduras e cobrimentos inferiores e superiores dos elementos.

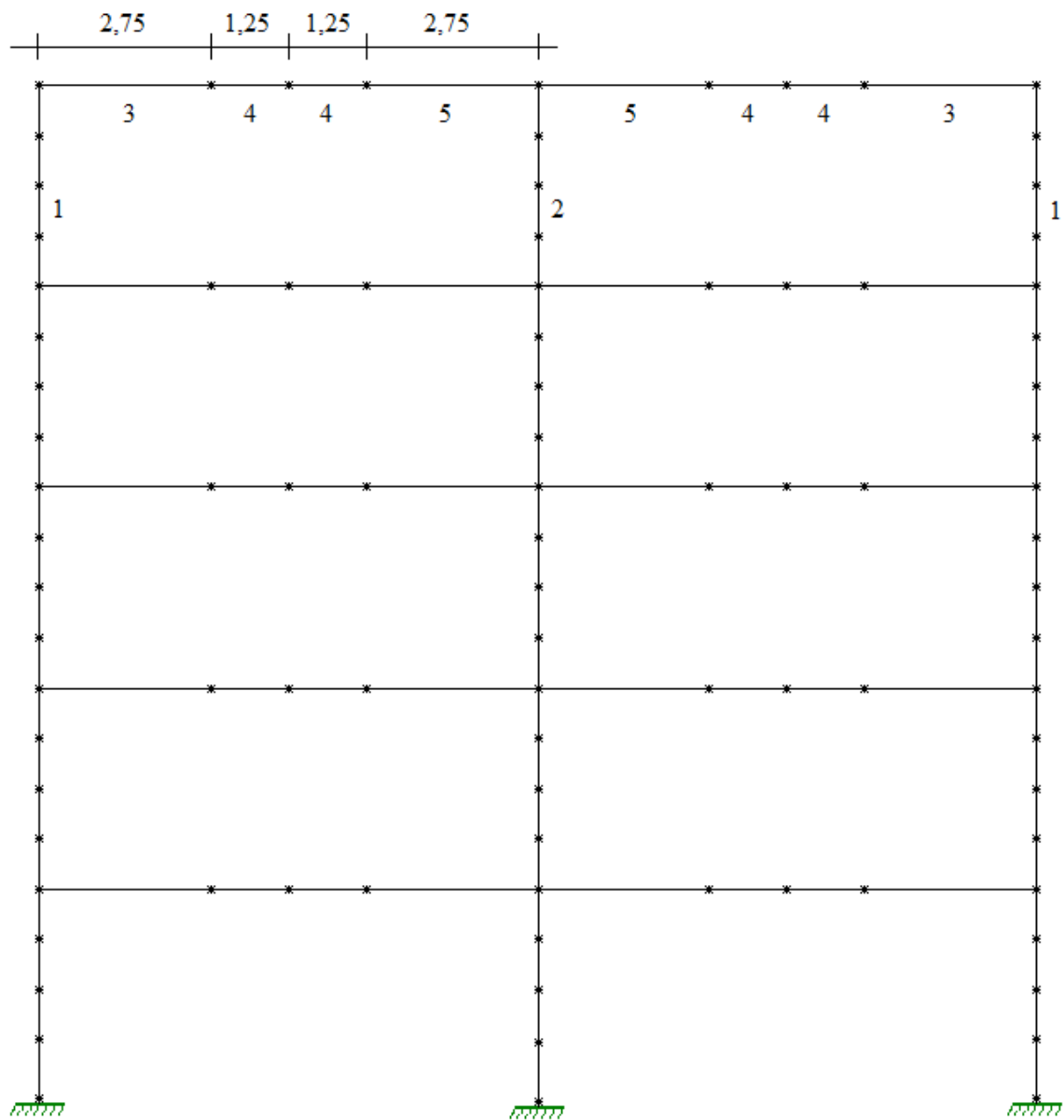


Figura 55 – Malha da análise não linear geométrica e física.

Nota-se por esta figura que os pilares das extremidades possuem as mesmas propriedades, enquanto o pilar central possui uma propriedade diferente. Isso se deve ao fato de ser um pilar mais solicitado e conseqüentemente possuir uma maior taxa de armadura. Todas as vigas possuem as mesmas propriedades e são simétricas.

Tabela 13 – Propriedades dos elementos.

Propriedade	Base (m)	Altura (m)	As inf. (m)	C. inf (m)	As sup. (m)	C. sup (m)
1	0,5	0,5	5,00E-04	0,04	5,00E-04	0,04
2	0,5	0,5	5,40E-03	0,05	5,40E-03	0,05
3	0,81	0,48	5,63E-03	0,05	6,15E-04	0,04
4	0,81	0,48	5,63E-03	0,05	4,92E-04	0,04
5	0,81	0,48	5,63E-03	0,05	8,04E-03	0,05

5.3.3. Resultados

Tendo definido os parâmetros das análises anteriormente, este item visa a apresentação e comparação dos deslocamentos e momentos obtidos. Ressalta-se que o referencial para a obtenção dos deslocamentos horizontais foi do topo do pilar P1.

A metodologia adotada para o desenvolvimento das análises foi de começar com a mais simples (análise linear) e prosseguir com as mais complexas, como análise linear com γ_z , não linear geométrica e finalizando com a análise não linear geométrica e física simultaneamente.

- Deslocamentos

Realizada a análise linear e obtido os deslocamentos, prosseguiu-se com o cálculo do parâmetro γ_z para então majorar as ações do vento. Isto permite uma aproximação dos resultados da análise linear com os resultados que a análise não linear geométrica fornece. Assim, a Tabela 14 resume os parâmetros γ_z para cada pórtico com o fator de restrição α_r diferente.

Tabela 14 – Parâmetros γ_z em função de α_r .

α_r	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
γ_z	-31,85	1,95	1,5	1,34	1,26	1,21	1,17	1,15	1,13	1,11	1,09

Observa-se pelos resultados que o parâmetro γ_z reduz seu valor acentuadamente para os primeiros valores de α_r . Entre 0,4 e 0,7, o decréscimo ocorre de maneira menos acentuada e a partir de 0,8 os valores são próximos.

Obtidos esses parâmetros, deu-se prosseguimento às demais análises para se obter os deslocamentos horizontais no topo da estrutura. Dessa forma, a Figura 56 resume os

deslocamentos obtidos em todas as análises. Observa-se pela legenda que há uma análise chamada $0,95\gamma_z$, pois significa que se utilizou 95% do valor de γ_z como forma de aproximação dos resultados lineares com os não lineares. Isto se deve ao fato de ser uma recomendação normativa da NBR 6118:2003.

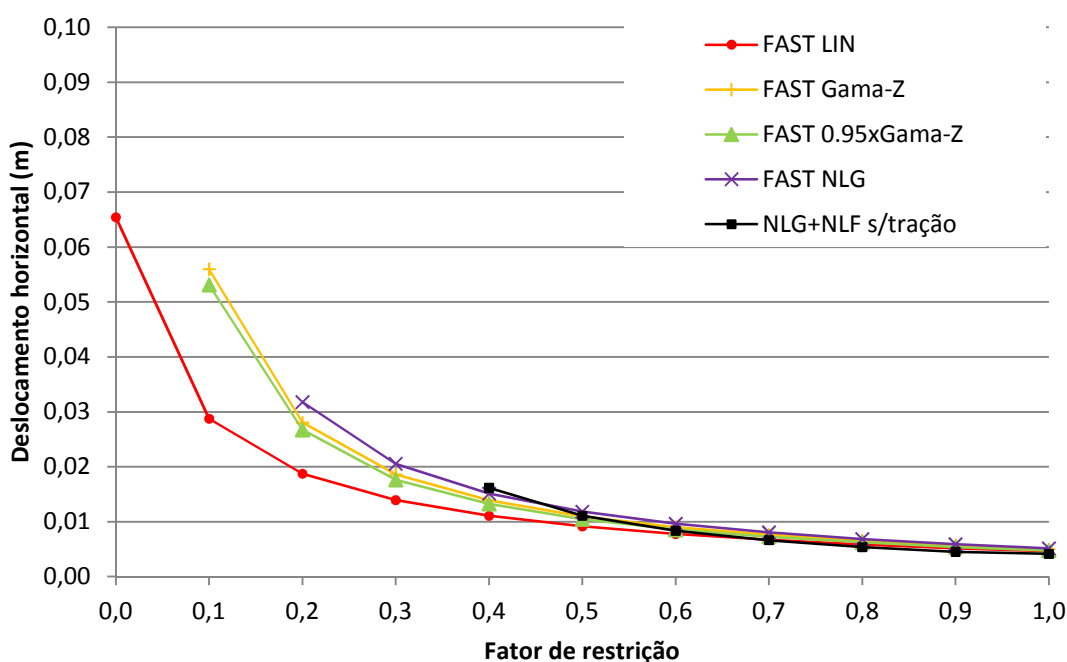


Figura 56 – Deslocamentos horizontais do topo.

A primeira observação a ser feita sobre os resultados é em relação aos pontos máximos de algumas curvas. As curvas fornecidas pelo parâmetro γ_z não possuem o valor do deslocamento quando o pórtico é articulado, pois nessa situação o valor desse parâmetro é negativo, tornando-o inviável. A análise com não linearidade geométrica começa a partir do fator de restrição igual a 0,2, pois é a situação em que há convergência da iteração do método. Pela mesma razão, a análise com não linearidade física começa a partir do fator de restrição igual a 0,4. Deduz-se que esta é a situação em que a estrutura começa a possuir rigidez suficiente para suportar o carregamento.

Observa-se pela figura acima, que os resultados das diferentes análises convergem rapidamente à medida que se aumenta o valor do fator de restrição da ligação semirrígida. Mesmo para a situação com fator de restrição de 0,3 com um parâmetro γ_z de 1,34, os deslocamentos das análises lineares com γ_z e não linear geométrica são próximos. Nota-se

que os deslocamentos obtidos da análise com 100% do γ_z , curva vermelha, se aproximam sutilmente mais da análise não linear geométrica do que a análise com 95% de γ_z . Finalmente, conclui-se que a partir da situação com fator de restrição de 0,4, com γ_z dentro do valor previsto por norma, todos os deslocamentos são bastante próximos.

- Momentos fletores

Após os deslocamentos, prosseguiu-se o estudo da estabilidade dos pórticos através da avaliação dos momentos fletores na base dos pilares. A Figura 57, Figura 58 e Figura 59 apresentam os momentos na base dos pilares P1, P2 e P3 respectivamente.

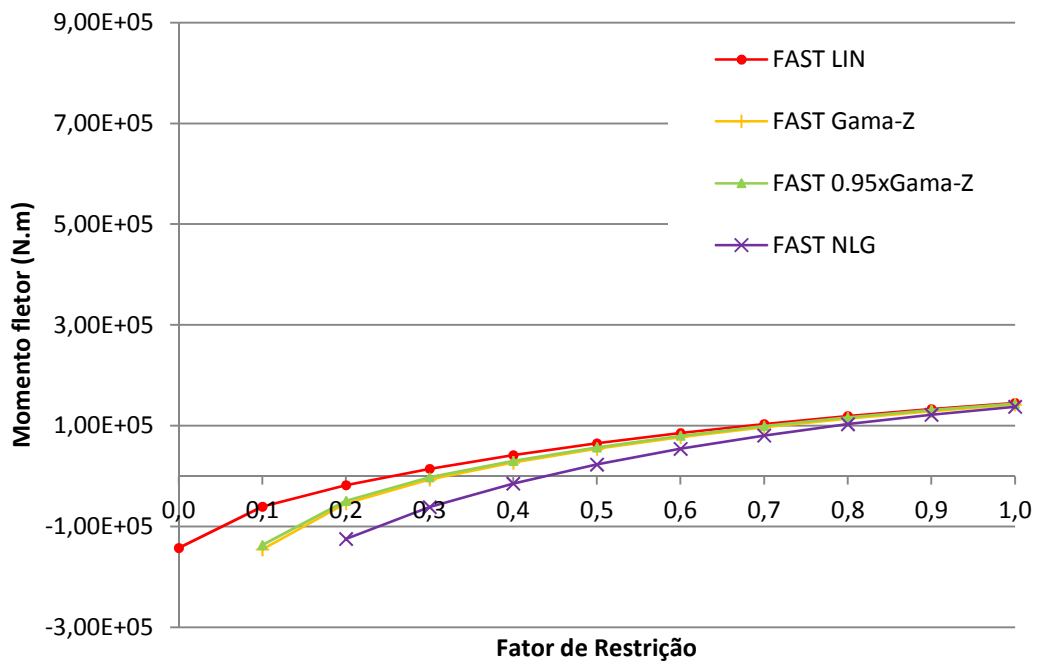


Figura 57 – Momentos fletores na base do pilar P1.

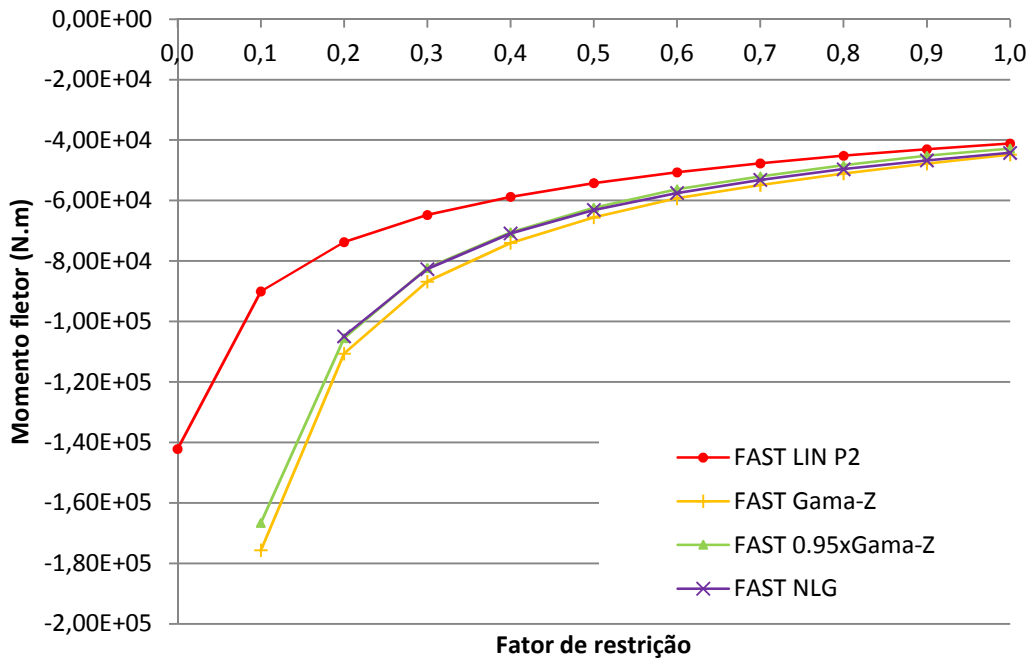


Figura 58 - Momentos fletores na base do pilar P2.

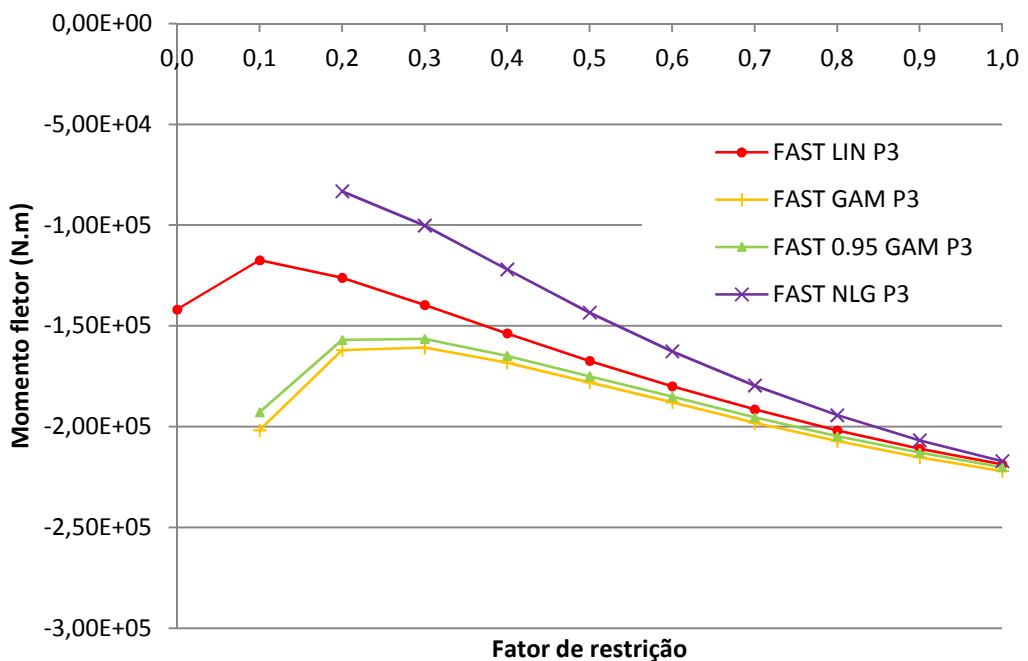


Figura 59 - Momentos fletores na base do pilar P3.

Admitindo que a análise não linear geométrica forneça os resultados mais realistas, conclui-se que a utilização do parâmetro γ_z fornece valores para o momento fletor mais

conservadores. Contudo, outra importante observação é em relação ao fato da precisão fornecida pelo uso do γ_z . Ao contrário do exemplo proposto por Ferreira *et al.* (2005), neste exemplo o parâmetro γ_z não aproximou adequadamente os momentos da análise não linear geométrica, mesmo para situações com valores dentro do intervalo proposto pela NBR 6118:2003, principalmente para os pilares P1 e P3.

- Análise não linear geométrica e física

Baseado nos resultados obtidos com o exemplo de validação proposto por Bratina (2004), entende-se que os deslocamentos fornecidos pela análise não linear geométrica e física são os mais próximos dos resultados que um ensaio possa oferecer. Assim, este item visa avaliar se os parâmetros recomendados pela NBR 6118:2003 para considerar a fissuração do concreto através da rigidez secante são adequados.

Inicialmente, buscou-se traçar os caminhos de equilíbrio para diversas situações com fatores de restrição diferentes, aumentando o fator de carga λ gradativamente até a provável ruína e tentar encontrar o comportamento pós-crítico. Dessa forma, a Figura 60 apresenta os caminhos de equilíbrio encontrados para cada fator de restrição, variando desde a rótula ($\alpha_r = 0,0$) até o engaste ($\alpha_r = 1,0$).

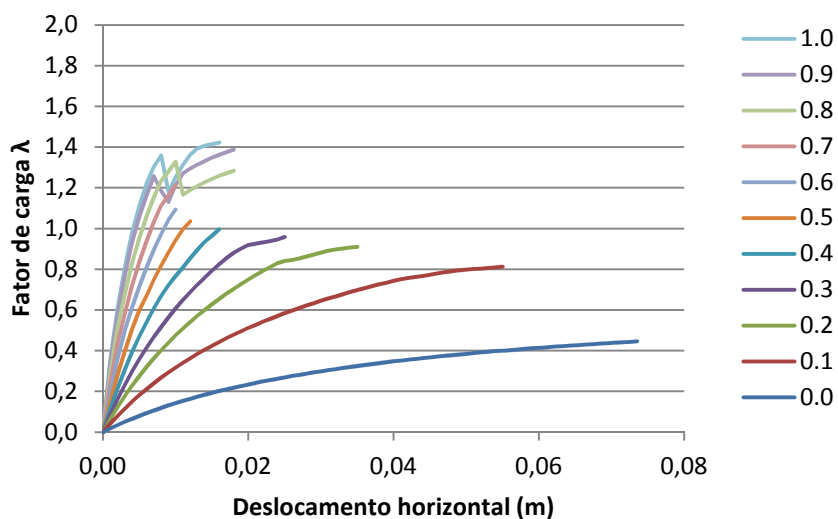


Figura 60 – Caminhos de equilíbrio.

Como era de se esperar, baseado pelos deslocamentos obtidos na Figura 56, os pórticos com ligações semirrígidas com fatores de restrição entre 0,0 e 0,3 não são capazes de suportar toda a carga aplicada ($\lambda = 1$). Nota-se também que a estrutura se torna menos

flexível e menos dúctil quando se aumenta o fator de restrição. É interessante reparar que os caminhos de equilíbrio com fator de restrição entre 0,8 e 1,0 possuem uma queda brusca de resistência quando de atinge a carga de ruptura. Provavelmente devido à ruína da seção transversal de algum ponto localizado da estrutura.

A Figura 61 resume os fatores de carga máximos que cada situação atingiu. Com essa figura é possível avaliar a evolução do ganho de resistência proporcionado por cada fator de restrição.

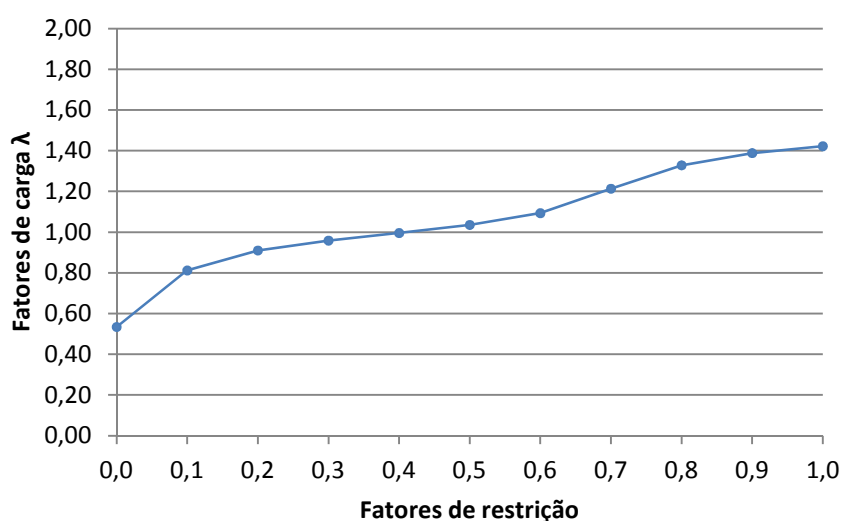


Figura 61 – Evolução da carga crítica.

Apesar de se aumentar o fator de restrição linearmente, percebe-se que o aumento da resistência do pórtico plano não possui a mesma variação. Tomando como referência a inclinação dessa curva, os maiores ganhos de resistência são para situações em que o fator de restrição está localizado entre 0,0 e 0,2, bem como entre 0,6 e 0,8. É importante lembrar que a NBR 9062:2006 considera que uma ligação resistente à flexão é tida como semirrígida quando o fator de restrição está localizado entre 0,15 e 0,85. Além desses valores a ligação é articulada ou engastada respectivamente. Por esta figura, nota-se que esses valores correspondem a trechos onde há mudança no ganho significativo de resistência.

As figuras a seguir mostram três situações com fator de restrição equivalente a 0,0 (Figura 62), 0,5 (Figura 63) e 1,0 (Figura 64). Em cada uma há três análises. A primeira consiste em uma análise não linear geométrica sem considerar a rigidez secante, apenas a rigidez inicial das peças. A segunda consiste em uma análise não linear geométrica

considerando a rigidez secante, sendo adotado para o valor de β igual a 0,8 para pilares e 0,4 para vigas. Por última, a terceira análise consiste na consideração do efeito não linear geométrico e físico simultaneamente. As curvas dessas análises permitem avaliar o desempenho desses valores de β para as situações de ligação articulada, semirrígida e engastada.

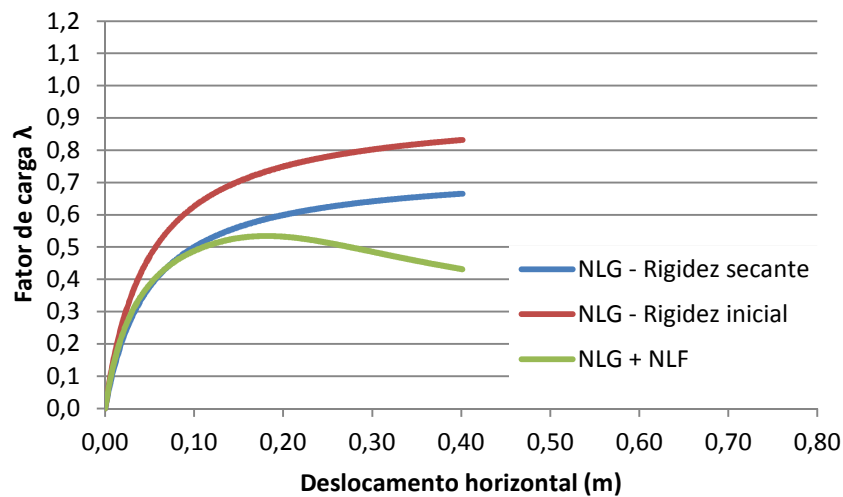


Figura 62 – caminhos de equilíbrio para $\alpha_r = 0$.

Evidentemente, a curva que considera apenas a rigidez inicial se mostra inadequada à análise, pois os valores são bastante divergentes da análise não linear geométrica e física (NLG + NLF) e também por estarem contra a segurança. A análise com não linearidade geométrica que considera a rigidez secante, mostra-se bem precisa inicialmente, mas não é capaz de apontar a carga crítica da estrutura.

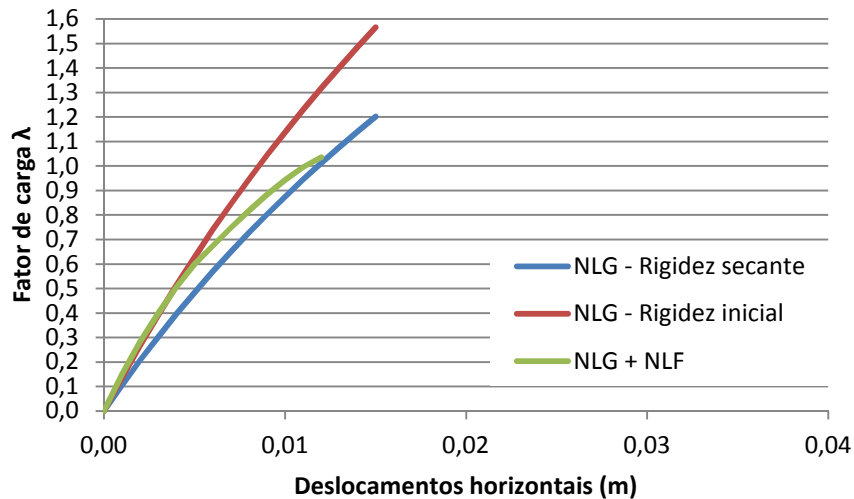


Figura 63 – Caminhos de equilíbrio para $\alpha_r = 0,5$.

Novamente, a desconsideração da rigidez secante ocasiona resultados inadequados ao projeto pelo mesmo motivo da situação anterior. Contudo, percebe-se que a adoção da rigidez secante na análise não linear geométrica é significativamente próximo à análise com não linearidade física quando a carga é plenamente aplicada, ou seja, quando o fator de carga é igual a um.

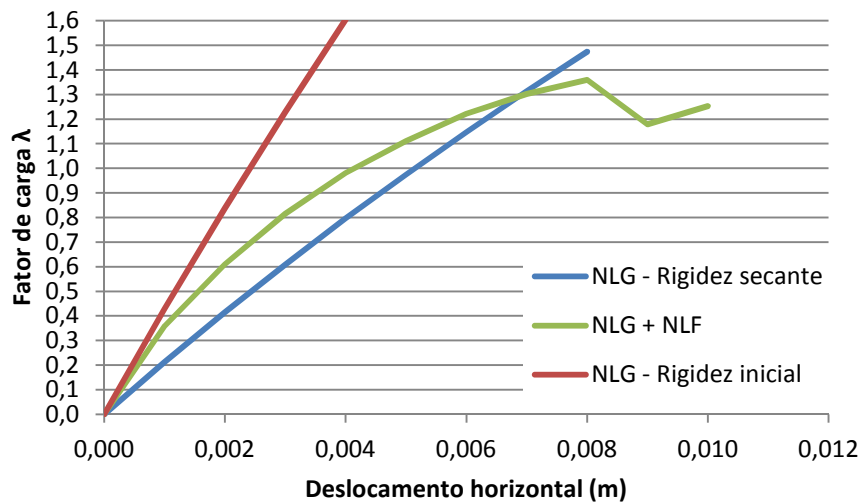


Figura 64 – Caminhos de equilíbrio para $\alpha_r = 1$.

Lembrando que as armaduras do pórtico foram obtidas para uma situação em que as ligações fossem perfeitamente rígidas, esperava-se que a análise não linear geométrica com

rigidez secante apontasse o deslocamento que a estrutura teria para um fator de carga $\lambda = 1$. Contudo, mostrou-se uma análise mais conservadora.

A NBR 6118:2003 permite que se adote 0,7 para o valor de β na consideração da rigidez secante de todos os elementos para estruturas em que o contraventamento seja composto exclusivamente por vigas e pilares e o γ_z seja menor que 1,3. Em virtude desses fatos, deu-se início a um estudo paramétrico. Variou-se o valor de β desde 0,4 a 0,9 para então traçar as respectivas curvas e compará-las às obtidas na situação de uma ligação engastada. Isso permite que se apontem valores apropriados para a consideração da fissuração do concreto na estrutura como um todo. Assim, a Figura 65 apresenta os caminhos de equilíbrios para cada valor de β em pórtico com ligações engastadas e compara-as com a curva teoricamente correta, a qual é a obtida pela análise não linear geométrica e física.

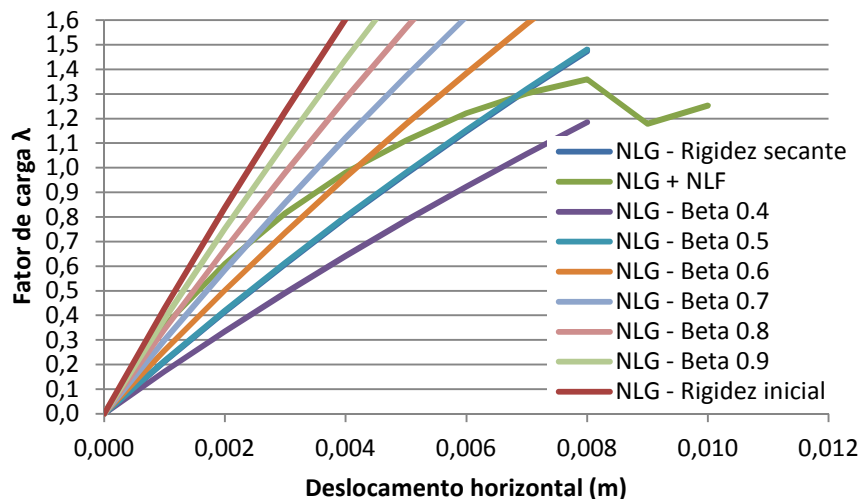


Figura 65 – Comparação da fissuração para $\alpha_r = 1$.

Conclui-se pelos resultados, que valores iguais ou maiores que 0,7 para β seria um critério contra a segurança para consideração da fissuração, pois a estrutura seria mais rígida que o real. Em outra mão, a adoção de valores iguais ou menores que 0,5 seria um critério conservador, pois a estrutura seria mais flexível que o real. Outra observação é o fato do caminho de equilíbrio com β igual a 0,5 ficar exatamente por cima do caminho de equilíbrio quando se adotam os valores 0,8 e 0,4 para pilares e vigas respectivamente. Concluindo, o valor de 0,6 se mostrou o mais preciso, pois o caminho de equilíbrio gerado cruza com a curva com não linearidade física quase que exatamente no ponto em que o fator de carga é igual a um.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho discutiu a estabilidade de edifícios de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas. A formulação de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de pórticos planos utilizando a formulação corrotacional e o Método das Fatias foi descrita em detalhe. O uso deste método permitiu a consideração das curvas tensão-deformação do concreto e do aço recomendadas pela NBR 6118:2003. Alternativamente, não linearidade física também foi considerada utilizando o conceito de rigidez secante também descrito nesta norma. Dois elementos finitos de pórtico plano corrotacionais foram implementados no programa FAST e testados com sucesso.

Este trabalho apresentou também a formulação de um elemento de ligação semirrígida. A abordagem utilizada permite utilizar este elemento juntamente com qualquer elemento de pórtico, linear ou não linear, plano ou espacial. Este elemento de ligação foi implementado no programa FAST e testado com sucesso na análise linear e não linear de pórticos planos com ligações semirrígidas.

As implementações realizadas foram utilizadas para analisar exemplos de pórticos com ligações semirrígidas com diversos propósitos. Dentre eles, pode-se citar a influência da rigidez das ligações sobre a estabilidade global de edifícios de concreto pré-moldado, o estudo do comportamento do parâmetro γ_z , a validação do modelo constitutivo do concreto proposto pela NBR 6118:2003 e o estudo dos parâmetros β para a consideração da rigidez secante dos elementos estruturais.

Baseado nos resultados das análises realizadas, pode-se avaliar o efeito que a rigidez das ligações semirrígidas proporcionam às estruturas de concreto pré-moldado. Constatou-se que aumento da rigidez da ligação semirrígida, por menor que seja, apresenta um significativo aumento da estabilidade do pórtico, com redução dos deslocamentos laterais e esforços de segunda ordem. Nos exemplos analisados não seria necessário a utilização de ligações rígidas para garantir a estabilidade global e que fatores de fixação entre 0,4 e 0,7 já produziram resultados satisfatórios. Para o fator de restrição com valor de 0,4, o parâmetro γ_z passou a ser inferior ao limite de 1,3 estabelecido por norma.

Percebeu-se com este trabalho que o parâmetro γ_z se mostra uma ferramenta prática e satisfatória para a aproximação de deslocamentos e esforços lineares com não lineares de pórticos com ligações semirrígidas. A precisão da estimativa dos deslocamentos finais e momentos de segunda ordem melhora com o aumento da rigidez das ligações. Por outro lado, erros significativos podem ocorrer quando a rigidez das ligações é muito baixa.

O modelo constitutivo para o concreto proposto pela NBR 6118:2003 se mostrou uma ferramenta eficiente para prever o comportamento do concreto, pois os resultados obtidos por simulação computacional foram bastante próximos com resultados experimentais apresentados no trabalho de Bratina (2004). Este exemplo permitiu ainda validar as formulações apresentadas e implementadas neste trabalho.

Outra vantagem que a adoção da análise não linear física com o modelo constitutivo para o concreto proposto pela NBR 6118:2003 proporcionou, foi a possibilidade de averiguar a adequação dos valores do coeficiente β para redução da inércia à flexão dos elementos estruturais. Conclui-se que os valores recomendados pela NBR 6118:2003 de 0,8 e 0,4 para pilares e vigas respectivamente, bem como 0,7 para todas as peças estruturais se mostraram satisfatórios para a consideração da rigidez secante das peças da estrutura de ligações rígidas deste trabalho. Contudo, o valor $\beta = 0,6$ foi o que mais se aproximou dos resultados fornecidos pela análise não linear física no exemplo considerado. Obviamente, mais estudos são necessários para chegar a uma recomendação mais geral.

Finalmente, verificou-se que a ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho é robusta e eficiente, tendo sido utilizada com sucesso em vários exemplos diferentes. Esta ferramenta pode ser utilizada para o estudo do comportamento de estruturas de concreto armado com ligações rígidas ou semirrígidas.

6.1. Sugestões para trabalhos futuros

A partir do trabalho realizado, são deixadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Considerar a não linearidade das ligações e avaliar o efeito que a plastificação das ligações ocasiona nas estruturas de concreto pré-moldado;
- Considerar outros modelos constitutivos para representar o comportamento do concreto;
- Considerar o efeito da fluência sobre o comportamento de estruturas de concreto pré-moldado;
- Implementar elementos de pórtico espacial para consideração da não linearidade física e geométrica;
- Estudar o efeito das ligações semirrígidas em estruturas espaciais;

- Estudar o efeito das ligações semirrígidas sobre o comportamento dinâmico de edifícios de concreto pré-moldado com ênfase nos efeitos sísmicos;
- Utilizar a otimização juntamente com a análise não linear para o dimensionamento de estruturas de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas;
- Desenvolver pré e pós-processadores gráficos para análise não linear de pórticos com ligações semirrígidas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUIAR E. A. B. **Comportamento de chumbadores grauteados de ligações viga-pilar parcialmente resistentes a momento fletor.** Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. **NBR 9062 – Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-Moldado – Procedimento** 2006. – Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. **NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento** – 2003. Rio de Janeiro
- ARAÚJO, D. L. FERREIRA, M. A. EL DEBS, M. K. Estabilidade global de estruturas reticuladas em concreto pré-moldado: influência da plastificação da ligação. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, v. 3, n. 2, p. 85-102, 2006.
- BALDISSERA, A. **Estudo experimental de uma ligação viga-pilar de concreto pré-moldado parcialmente resistente ao momento fletor.** 2006. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BATTINI, J. M. **Co-rotational beams elements in instability problems.**2002. Phd thesis, Royal Institute of Technology, Sweden.
- BRATINA S. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International journal of solid sand structures.** 2004.
- CAMPOÓ, L. B.; CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. Efeitos de segunda ordem em edifícios de alvenaria estrutural. **Revista Minerva: Pesquisa e Tecnologia**,v.2, n.2, p. 173-184, 2005
- CARMO, R. M. S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado.** 1995. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CHAN, S.L. e CHUI, P.P.T. **Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections**.Elsevier, Oxford, 2000.

COOK, R; MALKUS, D; PLESHA, M; de WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4a ed. John Wiley & Sons. 2002.

CRISFIELD, M.A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**.Vol 1. John Wiley and Sons. New York, NY,1991.

DOLAN, C. W; STATON, J. F; ANDERSON, R. G. Moment Resistant connections and simple connections. PCI Journal, v.32, n.2, p.62-74; April 1987.

EL DEBS, M. K. **Concreto Pré-moldado: Fundamentos e aplicações**. 1. Ed. São Carlos, SP, 2000. 441p.

ELLIOTT, K. S. Modern Concepts for Precast Concrete Buildings, **2nd Specialty Conference on The Conceptual Approach to Structural Design**; July 2003, Milan, Italy.

ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs, Creep and shrinkage of concrete.**TC 114 RILEM.E&FN Spon**.1993

EUROCODE 4 - **Design of steel structures: Part 1.1 - General rules for buildings:Annex J on composite joints in buildings frames**.1996.

FERREIRA, M. A. EL DEBS, M. K. ELLIOTT, K. S. Modelo teórico para projeto de ligações semi-rígida sem estruturas de concreto pré-moldado, **44º Congresso Brasileiro do Concreto**. Agosto 2002, Belo Horizonte, Brasil.

FERREIRA, M. A. EL DEBS, M. K. ELLIOTT, K. S. Determinação teórico-experimental da relação momento-rotação em ligações viga-pilar de estruturas pré-moldadas de concreto, **V simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto**. Junho 2003, Cidade Universitária, Brasil.

FERREIRA, M. A. ARAÚJO, D. L. JEREMIAS JR, A. C. CATOIA, B. KATAOKA, M. N. Estabilidade global de estruturas pré-moldadas: efeito das ligações semi-rígidas, **1º encontro nacional de pesquisa-projeto-produção em concreto pré-moldado**. Novembro 2005, São Carlos, Brasil.

FILIPPOU, F. C. **Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic load reversals**. 1988. Report. University of California, Berkeley.

FONSECA, M. T. **Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não linear com modelos reticulados de seções transversais compostas**. 2006. Dissertação – Escola de engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

GORGUN, H. **Semi-rigid behavior of connections in precast structures**. 1997. Tese. University of Nottingham, United Kingdom.

GARCIA, L.F.T. **Análise não linear de pórticos planos de concreto armado**. 1974. Dissertação de mestrado – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

HAWILEH, R. A; RAHMAN, A; TABATABAI, H. Nonlinear finite element analysis and modeling of a precast hybrid beam-column connection subjected to cyclic loads. Applied mathematical modeling. 2010.

JEREMIAS JÚNIOR, A. C. Análise da estabilidade de estruturas pré-moldadas de concreto: influência das ligações semi-rígidas. 2007. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

KIRCHHOF, L. D. Análise numérica de vigas mistas aço-concreto em temperatura ambiente e em situação de incêndio. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológica**, Londrina, v.26, n.1, p.69-82, jan./jun. 2005

LOPES, A. P. Estudo sobre diferentes métodos de análise P-Delta, **Teoria e Prática na Engenharia Civil**. Editora Dunas, Rio Grande, n.7, p.9-19. Setembro 2005.

MARIN, M. C. **Contribuição à análise da estabilidade global de estruturas em concreto pré-moldado de múltiplos pavimentos.** 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MARTHA, L. F. e PARENTE Jr., E., “An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming”, Anais do WCCM V (**Fifth World Congress on Computational Mechanics**), Vienna, Austria , 7-12/Jul, Eds.: H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer e J. Eberhardsteiner, 2002.

MELO, A. M. C. **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado.** 2000. Tese de doutorado – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MIOTTO A. M. **Ligações viga-pilar de estruturas de concreto pré-moldado: Análise com ênfase na deformabilidade ao momento fletor.** 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MOTA, J. E. **Contribuição ao projeto de estruturas multi-piso articuladas em concreto pré-moldado.** 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MONTEIRO, F. A. C. **Uma formulação co-rotacional geral – Aplicação a pórticos espaciais.** 2004. Dissertação (Mestrado em ciência na área de mecânica dos sólidos e estruturas) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

OLIVEIRA, R. **Análise teórica e experimental de estruturas planas de concreto armado com a consideração da fluência.** 2011. Tese (Doutorado em Ciências) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

PINHEIRO, L. **Análises não lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos.** 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

PORTELA, M. **Diário do Nordeste**. Fortaleza, 10 nov. 2003. Disponível em: <http://diariodonordeste.globo.com/materia.asp?codigo=105807>. Acesso em: 28 jul. 2012.

PORTFÓLIO T&A. **T&A pré-fabricados**. Disponível em: <http://www.tea.com.br/site/?cat=9&paged=2>>. Acesso em 28 jul. 2012

PRECAST CONCRETE INSTITUTE (PCI). **Design and Typical details of connections for precast and prestressed concrete**. PCI. Chicago, Illinois, 1998.

RONAN Point. **Wikipedia**. Disponível em: < http://en.wikipedia.org/wiki/Ronan_Point>. Acesso em: 27 abr. 2012

SANTOS, M. N. **Emprego de elemento finito híbrido na análise não linear de estruturas metálicas**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

SEKULOVIC, M. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. **Computers and Structures**, 2001, Belgrade, Yugoslavia.

SILVA, S. S. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação corrotacional e plasticidade por camadas**, 2011. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília.

SOARES, A. M. M. **Análise estrutural de pórticos planos de elementos pré-fabricados de concreto considerando a deformabilidade das ligações**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMULIA, D. S. **ABAQUS Software - Version 6.9**. 2009. Providence, RI, USA.

YSHII, Y. **Formulação co-rotacional para pórticos planos**. 2002. Dissertação (Mestrado em Ciência na área de infra-estrutura de transportes) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.