



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

IURI BARCELOS CARNEIRO MONTENEGRO DA ROCHA

**ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE CASCAS LAMINADAS CONSIDERANDO
NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FALHA PROGRESSIVA**

FORTALEZA
2013

IURI BARCELOS CARNEIRO MONTENEGRO DA ROCHA

ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE CASCAS LAMINADAS CONSIDERANDO
NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FALHA PROGRESSIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Evandro Parente Junior, D.Sc.

Coorientador: Antônio Macário Cartaxo de Melo, D.Sc.

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

-
- R573a Rocha, Iuri Barcelos Carneiro Montenegro da.
Análise e otimização de cascas laminadas considerando não - linearidade geométrica e falha progressiva / Iuri Barcelos Carneiro Montenegro da Rocha. – 2013.
159 f. : il. color., enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2013.
Área de Concentração: Estruturas
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior
Coorientação: Prof. Dr. Antonio Macário Cartaxo de Melo
1. Engenharia Estrutural. 2. Algoritmos genéticos. 3. Otimização estrutural. 4. Deformações e tensões. 5. Materiais laminados. I. Título.


IURI BARCELOS CARNEIRO MONTENEGRO DA ROCHA

ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE CASCAS LAMINADAS CONSIDERANDO
NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E FALHA PROGRESSIVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: 29 / 05 / 2013.

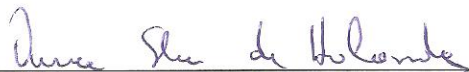
BANCA EXAMINADORA




Prof. Evandro Parente Junior, D.Sc. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, D.Sc. (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Profa. Áurea Silva de Holanda, D.Sc. (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Helio José Corrêa Barbosa, D.Sc. (Membro Externo)
Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)

A Deus.

A meus pais, por todo o amor.

AGRADECIMENTOS

A meus pais, Paulo Augusto Montenegro da Rocha e Maria das Graças Barcelos Carneiro. Tudo o que há de bom em mim começou com vocês.

À minha tia Áurea Izabel da Silva, pelo amor e dedicação em todas as etapas da minha criação.

À minha irmã, Katiucha Barcelos, pelo grande apoio durante a elaboração do texto final da dissertação.

À minha namorada Cristyna Araújo, por todo o amor e companheirismo que iluminam minha vida.

Ao meu orientador, Evandro Parente Junior, pela grande amizade desenvolvida ao longo dos anos e por estar sempre presente para me guiar no desenvolvimento do trabalho.

Aos meu coorientador, Antônio Macário Cartaxo de Melo, por suas valiosas sugestões na realização do trabalho.

Aos meus grandes amigos Luiz Antônio Taumaturgo, Rafael Fernandes da Silva e Edson Moreira Dantas Jr., pelos momentos de descontração e pela ajuda na realização do trabalho.

”We all make choices, but in the end our
choices make us.”

Andrew Ryan - Bioshock

RESUMO

Materiais compósitos vêm sendo extensamente estudados, pois seu uso permite a obtenção de estruturas leves e resistentes, com bom isolamento térmico e boa resistência a fadiga. Compósitos laminados, foco do presente trabalho, são compostos pelo empilhamento de um conjunto de lâminas, cada uma composta de fibras unidirecionais imersas em uma matriz polimérica. Cascas laminadas são utilizadas em muitas situações práticas de interesse, como fuselagens de aeronaves, estruturas marítimas, dentre outras. Devido ao elevado número de variáveis envolvidas no projeto de cascas laminadas, métodos de otimização devem ser utilizados em seu projeto. Na análise estrutural de tais cascas, devido ao seu complexo comportamento mecânico, métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), são utilizados. De modo a determinar a capacidade última de carga em cascas laminadas, é necessário considerar tanto a presença de grandes deslocamentos (não-linearidade geométrica) quanto o comportamento não-linear do material (não-linearidade física). No presente trabalho, a não-linearidade geométrica foi introduzida utilizando a formulação Lagrangiana Total aplicada a um elemento de casca abatida baseado na Teoria de Marguerre. O elemento foi implementado em um programa de código-aberto e vários exemplos com resposta analítica e numérica presentes na literatura foram tratados. Os resultados obtidos indicaram que o elemento é muito eficiente no tratamento de cascas com pequenas curvaturas iniciais sujeitas a deslocamentos moderadamente grandes. Já a não-linearidade física foi considerada por meio de modelos de falha progressiva, com a diminuição instantânea das propriedades mecânicas das lâminas que falham ao longo da análise. Três métodos de falha progressiva distintos foram formulados e implementados em conjunto com a formulação de análise pelo MEF. Os resultados se mostraram promissores, com a correta obtenção das cargas de falha em laminados tanto submetidos a esforços axiais como de flexão, mostrando concordância tanto com resultados numéricos da literatura quanto com resultados experimentais. O desempenho mecânico da estrutura foi então utilizado em um modelo de otimização com o objetivo de encontrar um esquema de laminação ótimo. Neste trabalho, propõe-se um Algoritmo Genético com um esquema híbrido de computação paralela para a otimização de laminados. Tal algoritmo utiliza uma configuração em ilhas e pode ser executado tanto em clusters quanto em computadores pessoais. Além disso, o algoritmo possui operadores específicos para a troca, adição e eliminação de camadas em laminados. As metodologias implementadas foram combinadas na otimização de placas e cascas laminadas tanto utilizando análise linear quanto não-linear. Nos exemplos lineares, o algoritmo foi verificado e os ganhos em eficiência e tempo de execução devidos à paralelização do algoritmo foram estudados. Mostrou-se que o algoritmo paralelo não é somente mais rápido que o sequencial, mas também produz melhores resultados. Já nos exemplos não-lineares, foram obtidos projetos significativamente mais eficientes que aqueles obtidos utilizando análise linear.

Palavras-chave: Materiais Compósitos, Falha Progressiva, Otimização, Não-linearidade geométrica, Cascas.

ABSTRACT

Composite materials are being extensively studied, as their use allows the design of structures that are lighter and stronger than their metal counterparts and feature good thermal insulation and fatigue resistance. Fiber Reinforced Composites (FRC), the focus of the present work, consist in stacking multiple laminae, each one consisting of unidirectional fibers embedded in a polymeric matrix. Laminated shells are used in many industrial applications, such as modern aircraft fuselages and wing systems, offshore structures, among others. Due to the many variables involved in the design of such structures, such as the number of layers (plies) and the material, thickness and fiber orientation of each layer, the traditional trial-and-error design procedure becomes arduous, which leads to the use of optimization techniques. In the structural analysis of laminated shells, numerical methods are commonly used, particularly the Finite Element Method (FEM), which is capable of modeling complex geometries, loads and boundary conditions. In order to determine the final load-carrying capacity of such shells, it is necessary to take into account not only the presence of large displacements (geometric non-linearity) but also its failure behavior (material non-linearity). In the present work, the geometric non-linearity was introduced by using the Total Lagrangian approach in a shallow shell finite element based on Marguerre's Shell Theory. The element was implemented in an academic finite element software and multiple benchmark numerical examples were treated. The obtained results showed that the element is efficient when dealing with shells with small initial curvatures and moderately large displacements and rotations. The material non-linearity was considered by using progressive failure models, with the instantaneous degradation of the mechanical properties of layers that fail during the analysis. Three distinct progressive failure methods were formulated and implemented and the numerical examples yielded promising results, with the correct determination of the ultimate failure load of laminates subjected to in-plane and bending loads, which were in good agreement with experimental and numerical results from the literature. The structural performance evaluated through the analysis procedure was then used in an optimization model in order to find the optimum stacking sequence for a given applied load. Here, a novel Genetic Algorithm with a hybrid computational parallelization scheme was proposed. The algorithm is based on the island model and can be executed in both clusters and personal computers alike. The algorithm was implemented and combined with the analysis procedures in the optimization of laminated shells considering both linear and non-linear analysis. In the linear examples, the algorithm was verified and the efficiency and execution time gains due to the parallel implementation were measured. The results show that the parallel algorithm not only runs faster than a sequential one, but also provides better results. In the non-linear examples, significant lighter and more efficient designs were obtained due to the consideration of the two types of non-linearities.

Keywords: Composite Materials, Progressive Failure, Structural Optimization, Geometric Non-linearity, Shells.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Classificação de materiais compósitos.	16
Figura 2	– Relação entre os sistemas local e global.	19
Figura 3	– Placa disposta nos eixos $x - y - z$	20
Figura 4	– Deslocamentos em um elemento infinitesimal de placa	21
Figura 5	– Esquema geral de laminação.	24
Figura 6	– Coordenada z do laminado.	27
Figura 7	– Sistemas de coordenadas em um elemento Q8.	38
Figura 8	– Fenômeno do <i>snap-through</i>	44
Figura 9	– Fenômeno do <i>snap-back</i>	46
Figura 10	– Pontos obtidos utilizando comprimento de arco.	47
Figura 11	– Estrutura do programa FAST.	51
Figura 12	– Estrutura da classe <i>cCtrlPath</i>	52
Figura 13	– Fluxograma simplificado das rotinas de comprimento de arco.	53
Figura 14	– Placa isotrópica simplesmente apoiada.	55
Figura 15	– Placa laminada simplesmente apoiada.	57
Figura 16	– Exemplo de casca abatida.	58
Figura 17	– Casca abatida (Isotrópica - $h = 12.7mm$)	58
Figura 18	– Casca abatida laminada ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ - $h = 12.7mm$).	59
Figura 19	– Casca abatida laminada ($[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ - $h = 12.7mm$).	59
Figura 20	– Casca abatida (FAST - $h = 12.7mm$)	60
Figura 21	– Casca abatida (Isotrópica - $h = 6.35mm$)	61
Figura 22	– Casca abatida ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ - $h = 6.35mm$)	61
Figura 23	– Casca abatida ($[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ - $h = 6.35mm$)	62
Figura 24	– Casca abatida (FAST - $h = 6.35mm$)	62
Figura 25	– Comparação entre métodos de traçado do caminho de equilíbrio.	63
Figura 26	– Viga com força cortante na extremidade.	64
Figura 27	– Curvas para a viga com força cortante.	65
Figura 28	– Viga com momento fletor na extremidade.	66
Figura 29	– Curvas para a viga com momento fletor.	67
Figura 30	– Resistências bidimensionais em uma lâmina.	70
Figura 31	– Tipos de falha em um laminado fictício.	76
Figura 32	– Tipos de degradação.	79
Figura 33	– Falha progressiva utilizando o MEF e o Método de Newton-Raphson.	82
Figura 34	– Estrutura da classe <i>cSection</i>	87
Figura 35	– Estrutura da classe <i>cSecAnalysis</i>	87
Figura 36	– Estrutura da classe <i>cConstModel</i>	88

Figura 37 – Algoritmo de integração das tensões na espessura.	89
Figura 38 – Algoritmo de integração da matriz constitutiva C_t	89
Figura 39 – Geometria e condições de contorno da chapa tracionada.	90
Figura 40 – Resultados para a Laminação L1.	91
Figura 41 – Resultados para a Laminação L2.	93
Figura 42 – Resultados para a Laminação L3.	94
Figura 43 – Placa submetida a flexão.	96
Figura 44 – Curvas carga-deslocamento para a Laminação A.	98
Figura 45 – Comparação entre métodos de traçado de caminho carga-deslocamento.	99
Figura 46 – Casca abatida considerando não-linearidade física e geométrica.	100
Figura 47 – Exemplo de codificação e decodificação.	105
Figura 48 – Processo de mapeamento da função objetivo	109
Figura 49 – Cruzamento aplicado a laminados de duas camadas.	110
Figura 50 – Operador de mutação aplicado em dois genes de um laminado com 4 camadas.	111
Figura 51 – Operador de troca de lâminas aplicado em um laminado com 4 camadas.	111
Figura 52 – Operadores de adição e eliminação aplicados em um laminado com 4 camadas.	112
Figura 53 – Paralelização Global.	113
Figura 54 – Paralelização <i>Coarse-Grained</i>	114
Figura 55 – Paralelização Híbrida.	115
Figura 56 – Estrutura Geral do Programa BIO.	116
Figura 57 – Hierarquia da Classe <i>cProblem</i>	117
Figura 58 – Hierarquia da classe <i>cPenalty</i>	118
Figura 59 – Hierarquia da classe <i>cSelection</i>	118
Figura 60 – Hierarquia da classe <i>cIndividual</i>	119
Figura 61 – Fluxo do algoritmo genético.	120
Figura 62 – Exemplo de paralelização de um laço <i>for</i> utilizando OpenMP.	121
Figura 63 – Algoritmo de Migração.	122
Figura 64 – Algoritmo da função <i>Send</i>	122
Figura 65 – Algoritmo da função <i>Receive</i>	123
Figura 66 – Geometria e condições de contorno da placa.	125
Figura 67 – Fronteira de Pareto.	127
Figura 68 – Melhor indivíduo ao longo das gerações.	130
Figura 69 – Indivíduo médio ao longo das gerações.	131
Figura 70 – Medidas de <i>speedup</i>	133
Figura 71 – Medidas de eficiência	134
Figura 72 – Painel curvo.	135
Figura 73 – Análise do projeto ótimo linear obtido minimizando o peso.	139

Figura 74 – Análise do projeto ótimo linear obtido minimizando o deslocamento. . .	139
Figura 75 – Análise do projeto com espessura mínima.	142
Figura 76 – Análise do projeto ótimo obtido por Almeida e Awruch.	143
Figura 77 – Análise dos projetos ótimos obtidos.	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resultados para a placa isotrópica.	55
Tabela 2	– Resultados para a placa laminada.	56
Tabela 3	– Comparação dos deslocamentos w na viga com força cortante.	65
Tabela 4	– Comparação dos deslocamentos u na viga com força cortante.	66
Tabela 5	– Regra de integração de Lobatto com 3 pontos.	81
Tabela 6	– Laminações consideradas para o exemplo de chapa tracionada.	90
Tabela 7	– Propriedades do material.	91
Tabela 8	– Resultados para o Laminado L1.	92
Tabela 9	– Resultados para o Laminado L2.	93
Tabela 10	– Resultados para o Laminado L3.	94
Tabela 11	– Comparação entre falha da primeira fibra e falha progressiva.	95
Tabela 12	– Laminações consideradas para a placa submetida a flexão.	96
Tabela 13	– Propriedades do material.	97
Tabela 14	– Resultados utilizando análise geometricamente linear.	97
Tabela 15	– Resultados utilizando análise não-linear geométrica.	98
Tabela 16	– Propriedades do material.	100
Tabela 17	– Propriedades do Grafite-Epoxy.	126
Tabela 18	– Resultados para múltiplos valores de w	128
Tabela 19	– Análise do efeito da taxa de migração.	130
Tabela 20	– Análise do efeito do número de indivíduos por migração.	132
Tabela 21	– Propriedades dos materiais.	136
Tabela 22	– Influência do tamanho da subpopulação e do número de gerações.	136
Tabela 23	– Projetos ótimos com a variação da carga.	137
Tabela 24	– Resultados da otimização variando o deslocamento máximo.	141
Tabela 25	– Propriedades do material.	143
Tabela 26	– Resultados da otimização variando o deslocamento máximo.	145

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivos	13
1.2	Organização da Dissertação	14
2	MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS	16
2.1	Mecânica de uma Lâmina	17
2.2	Teorias de Placa	20
2.2.1	<i>Teoria de Kirchhoff</i>	21
2.2.2	<i>Teoria de Reissner-Mindlin</i>	23
2.3	Teorias de Laminação	24
2.3.1	<i>Teoria Clássica da Laminação</i>	25
2.3.2	<i>Teoria de Primeira Ordem</i>	28
3	ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA	31
3.1	Teoria de Marguerre	32
3.2	Princípio dos Trabalhos Virtuais	35
3.3	Discretização por Elementos Finitos	37
3.4	Matriz de Rigidez Tangente	41
3.5	Solução da Equação de Equilíbrio Não-Linear	42
3.5.1	<i>Controle de Carga</i>	43
3.5.2	<i>Controle de Deslocamento</i>	44
3.5.3	<i>Comprimento de Arco</i>	46
3.6	Implementação Computacional	50
3.6.1	<i>Estrutura Geral do Programa FAST</i>	50
3.6.2	<i>Elemento de Casca Abatida</i>	51
3.6.3	<i>Métodos de Traçado do Caminho de Equilíbrio</i>	52
3.7	Exemplos Numéricos	53
3.7.1	<i>Placas Simplesmente Apoiadas</i>	54
3.7.1.1	Placa Isotrópica	54
3.7.1.2	Placa Laminada	56
3.7.2	<i>Casca Abatida</i>	57
3.7.3	<i>Viga em Balanço</i>	63
4	ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA	68
4.1	Falha de Uma Lâmina	69
4.1.1	<i>Parâmetros de Resistência</i>	70

4.1.2	<i>Critério da Máxima Tensão</i>	71
4.1.3	<i>Critério da Máxima Deformação</i>	71
4.1.4	<i>Critério de Tsai-Wu</i>	72
4.1.5	<i>Critério de Hashin</i>	74
4.2	Falha do Laminado	75
4.3	Falha Progressiva	77
4.4	Modelos de Degradação Instantânea	83
4.4.1	<i>Critério de Hashin com Múltiplas Degradações</i>	83
4.4.2	<i>Critério de Tsai-Wu com Degradação Única</i>	84
4.4.3	<i>Modelo de Tsai</i>	85
4.5	Implementação Computacional	86
4.6	Exemplos Numéricos	88
4.6.1	<i>Chapa Tractionada</i>	88
4.6.2	<i>Placa Submetida a Flexão</i>	95
4.6.3	<i>Casca Abatida</i>	99
5	OTIMIZAÇÃO DE LAMINADOS	102
5.1	Considerações Gerais	102
5.2	Algoritmo Genético	104
5.2.1	<i>Codificação</i>	105
5.2.2	<i>Tratamento de Restrições</i>	106
5.2.3	<i>Função Aptidão e Seleção</i>	108
5.2.4	<i>Cruzamento</i>	110
5.2.5	<i>Mutação</i>	110
5.2.6	<i>Operadores Para Laminados</i>	111
5.2.7	<i>Paralelismo Híbrido</i>	112
5.2.8	<i>Balanceamento de Carga</i>	115
5.3	Implementação Computacional	116
5.3.1	<i>Estrutura Geral do Programa BIO</i>	116
5.3.2	<i>Técnicas de Paralelização</i>	119
6	EXEMPLOS DE OTIMIZAÇÃO	124
6.1	Exemplos Lineares	125
6.1.1	<i>Placa Submetida a Carga Transversal</i>	125
6.1.1.1	<i>Fronteira de Pareto</i>	127
6.1.1.2	<i>Efeitos da Migração</i>	129
6.1.1.3	<i>Medidas de Speedup</i>	132
6.1.2	<i>Painel Curvo com Furo Circular</i>	134
6.2	Exemplos Não-Lineares	137
6.2.1	<i>Placa Submetida a Carga Transversal</i>	137

6.2.2	<i>Painel Curvo Submetido a Carga Transversal</i>	143
7	CONCLUSÃO	147
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	149
	REFERÊNCIAS	151

1 INTRODUÇÃO

Materiais compósitos vêm sendo cada vez mais utilizados em diversas aplicações industriais, particularmente pelas indústrias aeroespacial e naval, mas também na fabricação de dutos e vasos de pressão, artigos esportivos, componentes automotivos, próteses e instrumentos médicos, dentre outros. Tais materiais apresentam como principais vantagens as elevadas resistência e rigidez específicas, o que permite a fabricação de componentes estruturais de alta resistência e baixo peso. Eles também apresentam alta resistência à fadiga, bom isolamento térmico e elevado amortecimento estrutural.

Dentre os vários tipos de material compósito utilizados, o foco será dado a compósitos laminados reforçados por fibras, sendo formados pela superposição de várias lâminas, cada uma composta por um conjunto de fibras envolvidas por uma matriz polimérica.¹ Na presente dissertação, apenas lâminas com fibras dispostas unidirecionalmente serão utilizadas.

Dentre as várias estruturas fabricadas utilizando materiais compósitos laminados, este estudo será dedicado a placas e painéis curvos. Tais estruturas são de grande interesse industrial, sendo utilizadas pela indústria aeroespacial na fuselagem de aeronaves, pela indústria naval na construção de cascos de navios e outras estruturas de convés, pela indústria civil na construção de tabuleiros de pontes e elementos pré-fabricados, dentre outros.²

No projeto de estruturas laminadas, deve-se determinar não só a combinação de fibra e matriz que formará uma lâmina isolada, mas também o modo como as lâminas serão combinadas, denominado Esquema de Laminação (*layup*). Tal esquema é composto do número de lâminas a ser utilizado, do material que compõe cada lâmina, de sua espessura e do ângulo de orientação de suas fibras. Como o número de arranjos possíveis é muito grande, pode-se projetar estruturas laminadas específicas para as ações externas atuantes, promovendo economia de material e acentuada diminuição no peso total da estrutura.³

Porém, ao mesmo tempo que a elevada flexibilidade de projeto auxilia na concepção de estruturas mais eficientes, ela torna o processo tradicional de projeto, baseado em tentativa e erro, mais árduo, devido ao grande número de variáveis a serem determinadas.^{4,5} Assim, métodos de otimização^{6,7} vêm sendo muito utilizados no projeto de tais estruturas.⁸⁻¹⁰

Na formulação do problema de otimização, as variáveis de projeto são geralmente discretas devido a restrições de fabricação. Por tal motivo, métodos de Programação Não-Linear são pouco utilizados. Por outro lado, algoritmos evolutivos, particularmente Algoritmos Genéticos (AGs), têm sido utilizados com frequência em problemas com estruturas laminadas por serem capazes de lidar com espaços de projeto descontínuos.^{5,7,9,10} No presente trabalho, um algoritmo genético com operadores específicos para o tratamento de estruturas laminadas será utilizado na resolução do problema de otimização.

Outro fator a ser considerado no projeto de estruturas laminadas diz respeito à sua análise estrutural. Uma lâmina isolada, por ser a combinação de fibras unidirecionais e uma matriz polimérica, caracteriza-se por seu comportamento ortotrópico, dificultando sua modelagem. Ao empilhar as lâminas, surgem descontinuidades de tensões em suas interfaces, possíveis

efeitos de extremidade e acoplamentos membrana-flexão. Além disso, compósitos laminados podem apresentar diversos modos de falha distintos, envolvendo não só a falha das fibras, mas também o surgimento de fissuras na matriz, cisalhamento fibra-matriz, delaminação, entre outros.

Soluções analíticas simplificadas podem ser utilizadas na análise estrutural de placas e cascas laminadas, mas estão disponíveis apenas para condições de contorno, carregamentos e geometria simples, limitando sua aplicabilidade.¹¹⁻¹³ A principal alternativa ao uso de soluções analíticas reside no uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), capaz de representar geometrias e condições de contorno complexas.¹⁴⁻¹⁸ Além do MEF, outros métodos numéricos podem ser utilizados, como o Método das Faixas Finitas,¹⁹ métodos semi-analíticos,²⁰ dentre outros. É importante ressaltar que, muito embora soluções analíticas sejam limitadas, elas são utilizadas na grande maioria dos trabalhos que tratam de otimização de laminados.

Nesta dissertação, a análise estrutural de compósitos laminados será realizada utilizando o MEF. Escolhido o método, deve-se decidir também o nível de fidelidade da análise, fator diretamente ligado à etapa de projeto em questão. Em uma fase de pré-dimensionamento da estrutura, modelos fisicamente e geometricamente lineares são interessantes por serem computacionalmente eficientes e capazes de representar a estrutura com um razoável nível de fidelidade. Assim, tais modelos são amplamente utilizados em trabalhos que tratam da otimização de laminados usando o MEF.²¹⁻²³

Já em etapas mais avançadas de projeto ou em estruturas que apresentam significativa variação de rigidez em seu regime não-linear, o uso de análises lineares pode tornar o projeto excessivamente conservador. Assim, torna-se interessante o uso tanto de formulações geometricamente não-lineares, com a consideração de grandes deslocamentos e deformações,^{8,24,25} como de metodologias de falha progressiva, que procuram modelar o comportamento do material fora de seu regime elástico.²⁶⁻²⁸

Na consideração de efeitos geometricamente não-lineares, pode-se utilizar a formulação Lagrangiana Total, Lagrangiana Atualizada ou Corrotacional. Além disso, pode-se formular elementos baseados em teorias de rotações moderadas ou grandes, com diferentes níveis de aplicabilidade. Neste trabalho, um elemento não-linear de casca abatida baseado nas Teorias de von Kármán e Marguerre será utilizado.^{29,30}

Já na consideração da falha progressiva, tanto métodos de degradação brusca ou gradual, como métodos baseados na Mecânica do Dano, podem ser utilizados. Métodos graduais geralmente possuem uma base física mais forte que métodos bruscos e são capazes de representar o comportamento do material com maior precisão. Porém, exigem um alto número de parâmetros que devem ser determinados experimentalmente sendo, portanto, de difícil utilização. Assim, nesta dissertação, escolheu-se trabalhar com métodos de degradação brusca, de mais simples implementação e que requerem um número significativamente menor de parâmetros de degradação.^{26,31}

Nota-se que é possível aumentar consideravelmente a fidelidade da análise estrutu-

ral de laminados a partir da consideração das não-linearidades física e geométrica. Porém, o uso de tais métodos em conjunto com um algoritmo de otimização se torna proibitivo devido a seu alto custo computacional. Assim, de modo a permitir a obtenção de projetos ótimos com maior nível de fidelidade, técnicas de computação paralela são utilizadas neste trabalho de modo a acelerar a execução do Algoritmo Genético usado.

Algoritmos Genéticos paralelos vêm sendo estudados por diversos autores.³²⁻³⁴ A própria natureza dos AGs favorece sua paralelização, com a presença de indivíduos que são avaliados independentemente. Tendo em vista que a avaliação dos indivíduos é a etapa mais computacionalmente cara do processo, sua paralelização representa ganhos significativos no tempo de execução do algoritmo.

Dentre as várias técnicas de paralelização de AGs, neste trabalho serão combinadas duas delas, a Paralelização Global para ambientes de memória compartilhada e a estratégia *Coarse-Grain* para ambientes de memória distribuída. O resultado é um AG com paralelização híbrida no qual a população é dividida em ilhas que evoluem isoladamente durante a maior parte das gerações, comunicando-se em intervalos regulares através do operador genético de Migração. Tomando partido da divisão da população em ilhas, diferentes taxas e probabilidades dos operadores genéticos podem ser utilizadas em cada uma delas, diminuindo a necessidade de ajustar tais parâmetros.

O presente trabalho combina as metodologias de análise e otimização apresentadas para a obtenção de projetos ótimos de placas e cascas abatidas laminadas. Cada um dos conceitos utilizados será discutido e sua implementação computacional será apresentada. Ao final de cada etapa, exemplos numéricos relevantes serão apresentados e, por fim, exemplos de otimização tanto utilizando análise linear quanto não-linear serão mostrados. Além disso, os ganhos em eficiência e tempo de execução do algoritmo genético devido ao uso das técnicas de computação paralela serão avaliados.

1.1 Objetivos

O *objetivo geral* do presente trabalho é formular métodos de análise não-linear física e geométrica de cascas laminadas utilizando o Método dos Elementos Finitos e utilizá-los na obtenção de laminados otimizados através de um algoritmo genético paralelo. Como esse processo envolve várias etapas, ele pode ser dividido em *objetivos específicos*:

- a) Formular um elemento finito geometricamente não-linear de casca laminada utilizando as deformações de Marguerre e implementá-lo em um programa de elementos finitos acadêmico;
- b) Formular e implementar uma metodologia de consideração da falha progressiva de laminados no contexto de uma análise pelo MEF utilizando o Método de Netwon-Raphson;
- c) Desenvolver e implementar um Algoritmo Genético com operadores específicos

para laminados e com paralelização híbrida utilizando o Modelo de Ilhas (*Island Model*);

- d) Utilizar as metodologias formuladas e implementadas para obter projetos ótimos de placas e cascas laminadas.

1.2 Organização da Dissertação

A dissertação foi dividida em 7 capítulos. No Capítulo 2, uma breve introdução sobre materiais compósitos será apresentada. Em seguida, o modelo mecânico de uma lâmina isolada será apresentado, com a obtenção das matrizes constitutivas nos sistemas local e global. Por último, duas teorias de laminação serão mostradas, a Teoria Clássica de Laminação (TCL) e a Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT).

O Capítulo 3 aborda os métodos de análise não-linear geométrica utilizados, começando pela formulação do elemento não-linear de casca abatida baseado na Teoria de Marguerre. Os termos de deformação não-lineares utilizados são mostrados, seguidos da obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas do elemento. Posteriormente, métodos de solução da equação de equilíbrio, incluindo o Método do Controle de Carga, Controle de Deslocamento e Comprimento de Arco, são apresentados. Em seguida, uma discussão sobre a implementação do elemento finito e dos métodos de solução no programa FAST é realizada. Por último, exemplos numéricos de placas e cascas envolvendo apenas a não-linearidade geométrica são mostrados.

No Capítulo 4, trata-se da análise não-linear física utilizando falha progressiva. Aborda-se primeiro a falha de uma lâmina, com a apresentação dos critérios de falha utilizados no desenvolvimento dos modelos de falha progressiva. Em seguida, as principais classificações de metodologias de falha são mostradas, com a distinção entre métodos de degradação imediata ou brusca e métodos de degradação gradual. O esquema de integração de métodos de falha bruscos com uma formulação de MEF utilizando o Método de Newton-Raphson é apresentado, com a descrição das etapas nas quais a degradação é aplicada. Exemplos numéricos são então discutidos, utilizando três metodologias distintas e efetuando comparações com resultados numéricos e experimentais.

Já no Capítulo 5, aborda-se a formulação do Algoritmo Genético para laminados utilizado na obtenção de projetos ótimos de placas e cascas laminadas. Cada aspecto do algoritmo proposto é apresentado, incluindo a codificação, tratamento de restrições, função aptidão, seleção, cruzamento, mutação e operadores específicos para laminados. Os dois métodos de paralelização combinados no desenvolvimento do algoritmo são explicados individualmente e, posteriormente, discutem-se as principais características do algoritmo híbrido. Aspectos relacionados à implementação computacional do algoritmo são por fim mostrados.

O Capítulo 6 contém os exemplos numéricos de otimização. Inicia-se por exemplos usando análise linear com o objetivo de validar e verificar o algoritmo genético implementado

e avaliar os ganhos em confiabilidade e eficiência computacional advindos do uso das duas técnicas de paralelização aplicadas. Em seguida, dois exemplos fazendo o uso dos métodos de análise não-linear (física e geométrica) discutidos anteriormente são mostrados.

Por último, o Capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho e seus comentários finais, além de sugestões para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Neste capítulo, uma breve discussão sobre materiais compósitos laminados e seu comportamento mecânico será realizada. Inicialmente, serão apresentados aspectos gerais sobre o material, incluindo os tipos principais de materiais compósitos. Em seguida, a modelagem matemática do comportamento de uma lâmina isolada será mostrada, assim como abordagens para obter o comportamento mecânico de um conjunto de lâminas agindo simultaneamente.

Materiais compósitos resultam da combinação de dois ou mais materiais com o objetivo de obter um novo material melhor que cada uma das suas partes isoladas.¹¹ O novo material assim obtido deve possuir homogeneidade se analisado em nível macroscópico. Para isso, diversas técnicas de fabricação são utilizadas de modo a proporcionar a correta combinação dos vários componentes do material compósito e fornecer homogeneidade e uniformidade ao seu comportamento mecânico.

Materiais compósitos podem ser classificados de acordo com a forma de combinação entre os dois ou mais materiais componentes.¹ Assim, uma primeira classificação seria:

- a) Compósitos Particulados: São aqueles que apresentam partículas macroscópicas imersas em uma matriz (Figura 1a). Um clássico exemplo de compósito particulado é o concreto;
- b) Compósitos Fibrosos: São formados por fibras longas embebidas em uma matriz que atua como transmissora de tensões e proteção para as fibras (Figura 1b). As fibras mais utilizadas neste tipo de compósito são as de carbono e vidro, embebidas em matrizes poliméricas, como o epóxi;
- c) Compósitos Laminados: Compostos de várias camadas, ou lâminas, de diferentes materiais, podendo, inclusive, serem de compósitos fibrosos ou particulados (Figura 1c).

Figura 1 – Classificação de materiais compósitos.



Fonte: BELO (2006)³⁵

Na presente dissertação, optou-se por abordar apenas compósitos laminados. Em particular, trabalha-se com lâminas que possuem fibras em apenas uma direção (unidirecionais), empilhadas umas sobre as outras formando um laminado. Nas próximas seções, os modelos mecânicos de material utilizados para descrever tanto uma lâmina quanto o laminado como um todo serão apresentados.

2.1 Mecânica de uma Lâmina

Nesta seção, o comportamento mecânico de uma lâmina isolada será discutido. Como o laminado consiste na união de várias lâminas, seu comportamento mecânico pode ser entendido como uma combinação dos comportamentos de cada uma isoladamente.¹¹

Dois abordagens primárias podem ser utilizadas na análise do comportamento de uma lâmina.¹ A primeira, denominada *micromecânica*, procura analisar os materiais constituintes da lâmina, fibra e matriz, de forma isolada, observando as interações entre eles. Já em uma abordagem *macromecânica*, considera-se que a combinação das fibras com a matriz constituem um material homogêneo. No presente desenvolvimento, tal abordagem será utilizada, considerando o material apenas em escala macroscópica.

Como as fibras são muito mais rígidas que a matriz, uma lâmina é um material anisotrópico, isto é, sua rigidez difere dependendo da direção analisada. Além disso, considera-se que o comportamento de uma lâmina é linear-elástico até sua falha, permitindo o uso da Lei de Hooke Generalizada,¹ que para materiais anisotrópicos é dada por:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad (1)$$

onde $i, j = 1..6$ e a matriz de flexibilidade S_{ij} possui 21 constantes elásticas independentes.

No caso particular de lâminas com fibras unidirecionais, a mesma é considerada um material ortotrópico, isto é, que possui 3 planos de simetria mutuamente ortogonais.¹¹ De modo a simplificar a relação constitutiva, define-se um sistema de coordenadas local (x_1, x_2, x_3) cujos eixos coincidem com os planos de ortotropia da lâmina, onde 1 é a direção das fibras, 2 é a direção perpendicular às fibras no plano e 3 é a direção perpendicular fora do plano. Em tal sistema, a relação constitutiva é dada por:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}_1 \quad (2)$$

onde agora a matriz \mathbf{S} possui apenas 12 constantes elásticas independentes. Na relação anterior, o subscrito 1 indica que as componentes são dadas no sistema local da lâmina.

Por fim, considerando que \mathbf{S} é simétrica, os coeficientes de Poisson podem ser rela-

cionados por:

$$E_j \nu_{ij} = E_i \nu_{ji} \quad (3)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Com isso, \mathbf{S} passa a ter apenas 9 constantes independentes. Invertendo a relação mostrada na Eq. (2), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (4)$$

onde \mathbf{Q} é a matriz constitutiva da lâmina em seu sistema local. Os valores dos coeficientes Q_{ij} são:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} & Q_{12} &= E_1 \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} & Q_{13} &= E_1 \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta} \\ Q_{22} &= E_2 \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} & Q_{23} &= E_2 \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta} & Q_{33} &= E_3 \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} \\ Q_{66} &= G_{12} & Q_{44} &= G_{13} & Q_{55} &= G_{23} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

Os coeficientes elásticos mostrados na Eq. (5) podem ser obtidos experimentalmente através de ensaios apropriados ou, alternativamente, ser obtidos utilizando leis da micromecânica, como a Lei das Misturas ou métodos baseados na Teoria da Elasticidade.¹

Embora as relações mostradas representem bem o material em seu sistema de coordenadas local, o equilíbrio global do laminado será feito em um sistema cartesiano global (x, y, z) . Assim, na combinação das lâminas, é necessário converter a relação constitutiva de cada uma delas para tal sistema. A relação entre os dois sistemas de coordenadas pode ser dada pelo ângulo θ que determina a direção das fibras da lâmina, como mostrado na Figura 2.

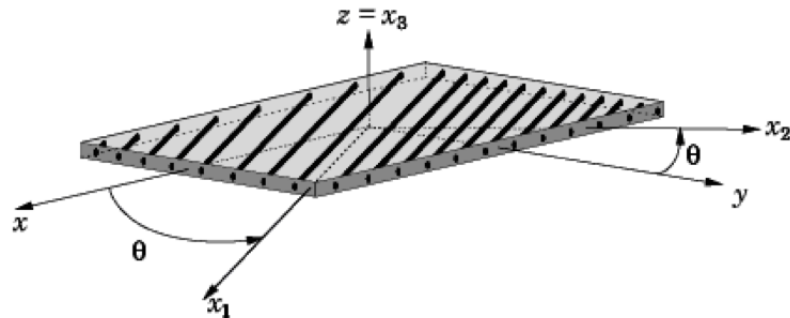
Estabelecendo inicialmente uma transformação entre coordenadas, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{L}\mathbf{x} \quad (6)$$

onde \mathbf{L} é a matriz dos cossenos diretores da transformação entre os sistemas.¹¹ Utilizando tal relação, as deformações em forma tensorial podem ser transformadas fazendo:³⁶

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_1 = \mathbf{L}[\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{L}^T \quad (7)$$

Figura 2 – Relação entre os sistemas local e global.



FONTE: Teófilo (2010).⁴

Fazendo as operações matriciais e voltando à notação vetorial, a transformação das deformações toma a forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Chamando a matriz de transformação de \mathbf{T} , tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (9)$$

A transformação das tensões pode ser feita da mesma forma mostrada na Eq. (7). Alternativamente, pode-se utilizar o Princípio dos Trabalhos Virtuais,³⁷ encontrando que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (10)$$

e a relação constitutiva no sistema global pode então ser encontrada substituindo as Eqs. (4) e (9) na Eq. (10):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

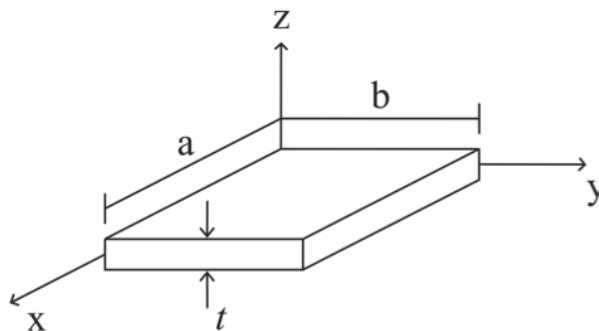
É importante ressaltar que nenhuma hipótese simplificadora foi aplicada nos campos de tensão e deformação das relações apresentadas, sendo mantidas todas as suas componentes. Porém, dependendo do tipo da análise a ser realizada, uma ou mais componentes poderão ser desprezadas. Como a presente dissertação trata de placas laminadas, as teorias cinemáticas necessárias serão desenvolvidas nas próximas seções e as relações mostradas serão posteriormente simplificadas.

2.2 Teorias de Placa

Por definição, placas e cascas são elementos cujas espessuras são muito menores que suas outras dimensões. Placas se caracterizam por serem planas e por possuírem carregamento perpendicular ao seu plano, apresentando predominantemente esforços de flexão. Já cascas apresentam curvaturas no espaço e possuem tanto esforços de membrana quanto de flexão, apresentando carregamento no plano e perpendicular ao mesmo. No caso de compósitos laminados, devido a possíveis acoplamentos membrana-flexão, esforços de membrana devem ser considerados mesmo para o caso de placas.¹¹

A seguir, serão apresentadas as teorias de placa utilizadas como base para teorias de laminação que buscam representar o comportamento mecânico do laminado a partir do comportamento de cada lâmina transformando-o em uma lâmina única equivalente (*Equivalent Single Layer*). A Figura 3 mostra uma placa cujas dimensões principais estão dispostas no plano $x - y$ e sua espessura no eixo z .

Figura 3 – Placa disposta nos eixos $x - y - z$.



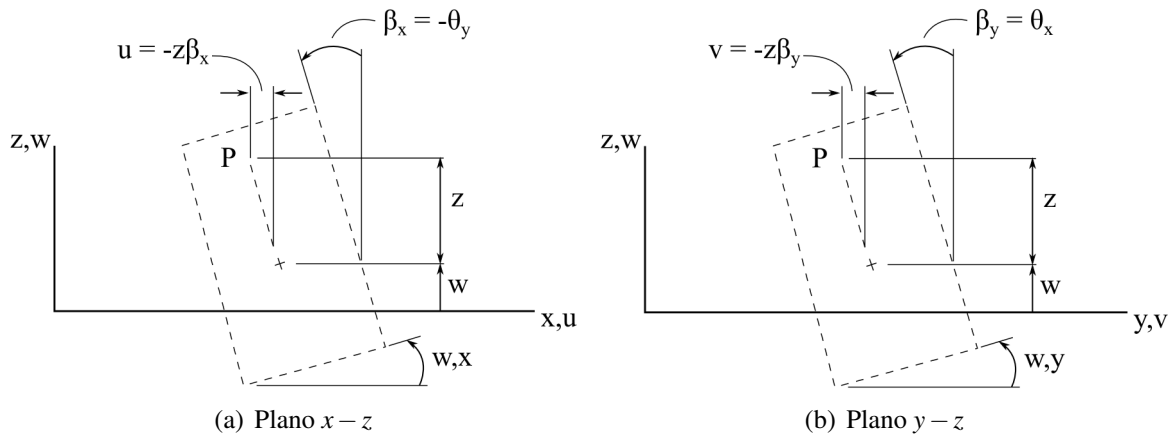
Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo das várias teorias de placa é transformar um campo de deslocamentos originalmente tridimensional em um bidimensional. Assim, considera-se que os deslocamentos da placa como um todo podem ser descritos pelos deslocamentos de uma superfície de referência, geralmente, mas não necessariamente, a superfície média ($z = 0$).³⁰ Para isso, algumas hipóteses simplificadoras devem ser impostas. Primeiramente, as deformações normais à placa são desconsideradas, isto é, $\epsilon_z = 0$. Com isso, as tensões verticais são também desprezíveis, isto é, $\sigma_z = 0$. Além disso, considera-se que linhas retas e perpendiculares à superfície média permanecem retas após a deformação. Tais hipóteses valem para todas as teorias a serem apresentadas.

As formas de um elemento infinitesimal deformado de placa nos planos $x - z$ e $y - z$ são mostradas na Figura 4. Consideram-se positivas as rotações que apontam no sentido positivo dos eixos, conforme a Regra da Mão Direita. Além disso, considera-se inicialmente que não existem deformações de membrana na placa. Os termos $w_{,x}$ e $w_{,y}$ são as derivadas do deslocamento transversal em relação aos eixos no plano e z é a altura de um ponto qualquer na

seção transversal da placa em relação à superfície média.

Figura 4 – Deslocamentos em um elemento infinitesimal de placa



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2.1 Teoria de Kirchhoff

A Teoria de Kirchhoff^{37,38} é uma extensão da Teoria de Bernoulli, ou Teoria Clássica de Vigas, para o caso de placas finas, sendo a teoria clássica para análise linear de placas submetidas a cargas de flexão. Nela, linhas retas e normais à superfície média na estrutura indeformada permanecem retas e normais após a deformação. Tal hipótese faz com que as deformações de cisalhamento transversal (γ_{xz}, γ_{yz}) sejam consideradas nulas, limitando sua aplicação para placas finas.³⁷

Analisando inicialmente a deformação da placa no plano $x-z$, tem-se a situação da Figura 4a, onde β_x é o equivalente a uma rotação negativa $-\theta_y$ ao redor do eixo y . Já a deformação da placa no plano $y-z$ é mostrada na Figura 4b, onde β_y representa uma rotação positiva θ_x ao redor do eixo x . Devido à hipótese das retas normais à superfície média, tem-se que:

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_y \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_x \quad (12)$$

O campo de deslocamentos pode ser então expresso por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\beta_x(x, y) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z\beta_y(x, y) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (13)$$

Porém, como mencionado anteriormente, no tratamento de compósitos laminados, deve-se con-

siderar também que a superfície média possua deslocamentos em seu plano, isto é, os deslocamentos de membrana u_m e v_m devem ser incluídos na Eq. (13):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_m(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_m(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

Na Teoria de Kirchhoff, apenas os termos lineares de deformação são considerados. Desconsiderando ε_z por hipótese, as deformações são dadas por:³⁹

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Substituindo o campo de deslocamentos mostrado na Eq. (14), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_m}{\partial x} \\ \frac{\partial v_m}{\partial y} \\ \frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^b = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (16)$$

onde os superescritos m e b indicam deformações de membrana e flexão, respectivamente.²⁹

Nota-se que o cisalhamento transversal se anula naturalmente devido à hipótese de retas normais representada na Eq. (12). Por fim, as deformações de um ponto qualquer na placa serão a soma das parcelas de membrana e de flexão:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

2.2.2 Teoria de Reissner-Mindlin

Na Teoria de Reissner-Mindlin,^{37,40} os efeitos do cisalhamento transversal são considerados de forma aproximada. Para isso, considera-se que linhas retas e normais à superfície média permaneçam retas, mas não necessariamente normais, após a deformação. A liberação de tal restrição anula as igualdades mostradas na Eq. (12) e o campo de deslocamentos se torna:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_m(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_m(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (18)$$

Considerando novamente apenas os termos lineares de deformação mostrados na Eq. (13) e substituindo o novo campo de deslocamentos da Eq. (18), as deformações em um ponto qualquer da placa são:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^m &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_m}{\partial x} \\ \frac{\partial v_m}{\partial y} \\ \frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^b &= z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

É importante ressaltar que o cisalhamento transversal é considerado constante, quando na realidade apresenta uma distribuição quadrática na seção da placa. Para compensar tal aproximação, um fator de correção k_s , geralmente tomado como $5/6$, é utilizado na integração das tensões de cisalhamento.³⁰ Por fim, as deformações de um ponto qualquer na placa são agora divididas em uma parcela no plano ($\boldsymbol{\varepsilon}$) e uma parcela de cisalhamento transversal fora do plano ($\boldsymbol{\gamma}$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

2.3 Teorias de Laminação

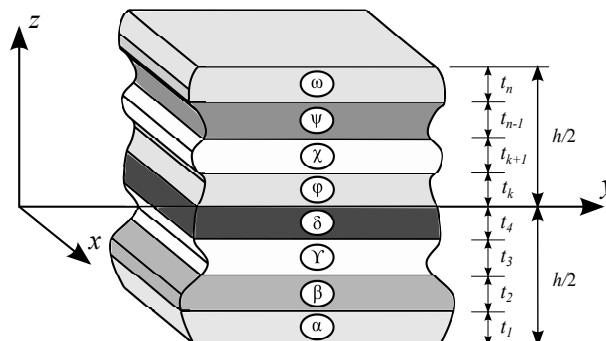
Nesta seção, as metodologias utilizadas para combinar o efeito de todas as lâminas e encontrar o comportamento mecânico do laminado como um todo serão apresentadas. De modo geral, as teorias de laminação podem ser divididas em:⁴¹

- Teorias de lâmina equivalente (*Equivalent Single Layer*), também chamadas de *smearred theories*, onde a contribuição de todas as lâminas é somada e uma lâmina equivalente é obtida, transformando o problema tridimensional em bidimensional.
- Teorias de Lâminas Discretas, ou Teorias *Layerwise*, onde cada lâmina é individualmente modelada, mantendo a natureza tridimensional do problema. São capazes de captar efeitos de tensões transversais e portanto fenômenos como a delaminação.¹¹

Nesta dissertação, duas teorias de lâmina equivalente serão tratadas, a Teoria Clássica de Laminação, ou Teoria de Ordem Zero, e a Teoria de Primeira Ordem. Cada uma delas é baseada em uma das teorias de placa apresentadas na seção anterior. É importante ressaltar que outras teorias de laminação mais complexas também vêm sendo utilizadas, como a *Generalized Layerwise Plate Theory (GLPT)*,¹¹ teorias de alta ordem (*Higher Order Shear Deformation Theories*),^{42,43} e a *Teoria do Zigzag*,⁴⁴⁻⁴⁶ dentre outras.⁴¹

No desenvolvimento das teorias apresentadas nesta seção, torna-se importante distinguir os tipos principais de esquema de laminação. De modo geral, uma laminação é representada por $[\alpha/\beta/\gamma/\dots/\omega]$ onde α representa o ângulo de orientação das fibras (direção principal do material) da primeira camada, β representa o ângulo da segunda camada, e assim por diante.¹¹ Um esquema de laminação geral é mostrado na Figura 5. Destaca-se que as camadas são numeradas de baixo para cima.

Figura 5 – Esquema geral de laminação.



Fonte: Adaptado de REDDY (2004)¹¹

Os ângulos de orientação devem estar entre $+90^\circ$ e -90° . Pode-se então definir uma classificação geral para laminados, dividindo-os em dois tipos:

- a) *Cross-ply*: São laminados que apresentam ângulos de laminação iguais a 0° ou 90° . Por exemplo, o laminado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ é *cross-ply*;
- b) *Angle-ply*: São laminados que podem apresentar qualquer valor para o ângulo de orientação das camadas, sendo pelo menos um ângulo diferente de 0° e 90° . Por exemplo, $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]$ é *angle-ply*.

Quanto à simetria, os laminados também podem receber três classificações:

- a) Laminados Simétricos: São aqueles que possuem materiais, espessuras e orientações das lâminas simétricos em relação à superfície média do laminado. Utiliza-se a letra 's' para indicar simetria. Assim, o laminado $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ é igual a $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Do mesmo modo, um laminado com número ímpar de camadas pode ser simétrico, por exemplo $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ 0^\circ]$, ou $[0^\circ/90^\circ/\bar{0}^\circ]_s$ no qual a superfície média divide a camada do meio em duas;
- b) Laminados Simétricos e Balanceados: São laminados simétricos nos quais todas as camadas com ângulo diferente de 0° ou 90° aparecem sempre em pares de mesma espessura que podem ou não ser adjacentes. Por exemplo, o laminado $[45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ é balanceado, assim como o laminado $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$;
- c) Laminados Anti-Simétricos: São aqueles que possuem materiais e espessuras simétricas, mas orientações das lâminas anti-simétricas em relação à superfície média. Por exemplo, o laminado $[45^\circ/-45^\circ]_4$, que é equivalente a $[45^\circ/-45^\circ 45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$, é anti-simétrico;
- d) Laminados Assimétricos: São aqueles que possuem materiais, espessuras ou orientações das lâminas assimétricos em relação à superfície média. Por exemplo, o laminado $[45/90]$ é assimétrico, assim como qualquer dos laminados apresentados nos itens anteriores seriam assimétricos caso possuíssem espessuras ou materiais assimétricos.

2.3.1 Teoria Clássica da Laminação

A Teoria Clássica da Laminação (TCL) é baseada na teoria de placa de Kirchhoff, apresentada na Seção 2.2.1. Nela, tanto as tensões e deformações transversais σ_z e ε_z quanto as tensões e deformações de cisalhamento transversal γ_{xz} , τ_{xz} e γ_{yz} , τ_{yz} foram desprezadas. Devido a tais hipóteses, a relação constitutiva de uma lâmina no sistema local (Equação 4) pode ser simplificada considerando apenas as tensões e deformações no plano:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (21)$$

onde os termos da matriz \mathbf{Q} são dados na Eq. (5) desprezando os termos referentes ao eixo x_3 .

De modo análogo, a matriz de transformação \mathbf{T} (Equação 8) para uma lâmina genérica k com orientação das fibras θ_k é dada por:

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ -2\sin \theta_k \cos \theta_k & 2\sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (22)$$

Aplicando então a transformação mostrada na Eq. (11), a matriz constitutiva da lâmina k no sistema global é obtida:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)\top} \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} \quad (23)$$

onde as deformações no plano $\boldsymbol{\epsilon}$ para a Teoria de Kirchhoff são mostradas na Eq. (20) e os coeficientes da matriz $\bar{\mathbf{Q}}$ são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \cos^4 \theta_k Q_{11} + 2\sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k (Q_{12} + 2Q_{66}) + \sin^4 \theta_k Q_{22} \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) Q_{12} \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ \bar{Q}_{22} &= \sin^4 \theta_k Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + \cos^4 \theta_k Q_{22} \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) Q_{66} \end{aligned} \quad (24)$$

De modo a somar o efeito de todas as lâminas, as tensões são integradas ao longo da espessura do laminado de modo a obter os esforços resultantes, tal como é feito na Teoria de Kirchhoff:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (25)$$

Substituindo então as tensões em cada lâmina (Equação 23), a integral em cada uma é feita separadamente:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} dz \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} z dz \quad (26)$$

Nas expressões anteriores, nl é o número de lâminas, a origem do eixo z é a superfície média do laminado e h é sua espessura total (Figura 6). Separando então as deformações

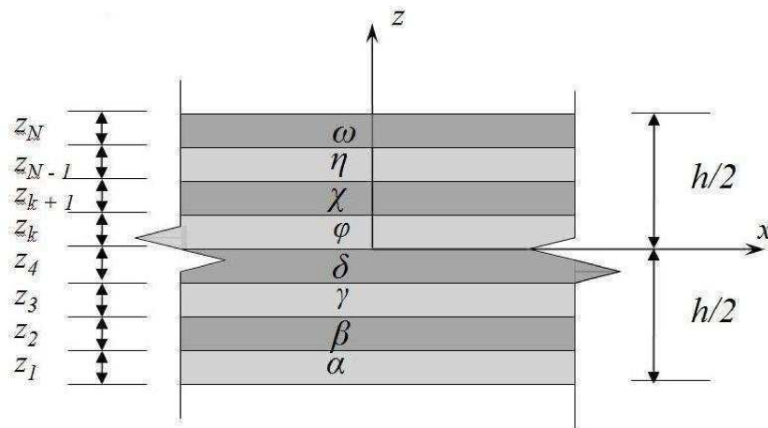
em suas parcelas de membrana e flexão, a relação constitutiva em termos de tensões e deformações generalizadas do laminado como um todo é encontrada:¹¹

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

onde cada uma das matrizes é encontrada fazendo:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} dz \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} z dz \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} z^2 dz \quad (28)$$

Figura 6 – Coordenada z do laminado.



FONTE: Teófilo (2010)⁴.

Tais integrais podem ser avaliadas analiticamente ou numericamente. No caso mais simples, a relação constitutiva de uma lâmina não varia ao longo de sua própria espessura. Neste caso, é interessante adotar uma abordagem de *pré-integração* do laminado e obter as integrais analiticamente:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nl} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nl} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (29)$$

Porém, em algumas situações é interessante realizar uma *integração durante a análise*, com a presença de dois ou mais pontos de integração no interior de cada lâmina, de modo a captar efeitos fisicamente não-lineares. Neste caso, a integração será numérica.

A matriz **A** representa a rigidez de membrana do laminado e a matriz **D** sua rigidez a flexão. Já a matriz **B** apresenta termos de acoplamento membrana-flexão. Em laminados

simétricos, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e não existe acoplamento membrana-flexão. Já para laminados não-simétricos tal acoplamento existe, fazendo com que deformações de flexão causem esforços de membrana e vice-versa.^{18,47}

2.3.2 Teoria de Primeira Ordem

A teoria de laminação de primeira ordem, ou *First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)* possui formulação semelhante à teoria clássica apresentada na seção anterior. Porém, neste caso o método se baseia na teoria de placas de Reissner-Mindlin (Seção 2.2.2), onde somente as tensões e deformações transversais σ_z e ε_z são desprezadas e as tensões de cisalhamento transversal são consideradas de forma aproximada. A relação constitutiva no sistema local da Eq. (21) é então dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (30)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1$$

onde o subscrito s indica os termos de cisalhamento transversal da relação constitutiva.

Na transformação da relação constitutiva para o sistema global, duas matrizes de transformação surgem neste caso:

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ -2\sin \theta_k \cos \theta_k & 2\sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{T}_s^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

As duas matrizes constitutivas no sistema global são então dadas por:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)T} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} = \mathbf{T}_s^{(k)T} \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)}$$

Os coeficientes da matriz $\bar{\mathbf{Q}}^{(k)}$ são os mesmos da Eq. (24). Já os da matriz $\bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)}$ são dados por:¹¹

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{44} &= \cos^2 \theta_k Q_{44} + \sin^2 \theta_k Q_{55} \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \bar{Q}_{55} &= \sin^2 \theta_k Q_{44} + \cos^2 \theta_k Q_{55}\end{aligned}\quad (33)$$

Integrando as tensões do mesmo modo feito na teoria clássica, vê-se que surgem esforços de cisalhamento transversal:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dz \\ \mathbf{M} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} z dz \\ \mathbf{Q} &= \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \bar{\mathbf{Q}}_s^{(k)} \boldsymbol{\gamma}^{(k)} dz\end{aligned}\quad (34)$$

Separando então as deformações em componentes de membrana, flexão e cisalhamento, a relação constitutiva em termos de esforços pode ser obtida:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{44} & G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}\quad (35)$$

Em forma compacta, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}\quad (36)$$

e as matrizes são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{\mathbf{Q}}^{(k)} dz & \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{\mathbf{Q}}^{(k)} z dz \\
 \mathbf{D} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{\mathbf{Q}}^{(k)} z^2 dz & \mathbf{G} &= \sum_{k=1}^{nl} \int_{z_k}^{z_{k+1}} k_s \overline{\mathbf{Q}}_s^{(k)} dz
 \end{aligned} \tag{37}$$

É importante ressaltar que, muito embora os termos de membrana e flexão sofram acoplamento devido à matriz \mathbf{B} , os termos de cisalhamento fora do plano são desacoplados, como pode ser visto na Eq. (35). Do mesmo modo que na teoria clássica, as matrizes podem ser integradas analiticamente ou numericamente. Para o caso de integração analítica, tem-se:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) & B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nl} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nl} \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) & G_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} k_s \overline{\mathbf{Q}}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k)
 \end{aligned} \tag{38}$$

onde o coeficiente k_s é o fator de correção devido à distribuição aproximada das tensões de cisalhamento transversal. Na avaliação das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} , $i, j = 1, 2, 3$. Já para a matriz \mathbf{G} , $i, j = 4, 5$.

3 ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

Na análise linear de uma estrutura, apenas pequenos deslocamentos e deformações são considerados. Isso permite que as equações de equilíbrio sejam escritas na configuração inicial, conhecida, considerando que não existem diferenças significativas entre ela e a configuração deformada da estrutura. Porém, em alguns tipos de estrutura, grandes deslocamentos ocorrem sem que o material saia de seu regime elástico, tornando necessária a consideração de tais deslocamentos na determinação da capacidade de carga final da estrutura e do seu modo de falha.

Para a consideração de grandes deslocamentos em uma análise por elementos finitos, é necessário considerar termos de deformação não-lineares,³⁰ o que faz com que as forças internas e, portanto, a matriz de rigidez, dependam dos deslocamentos. Com isso, a análise se torna iterativa e computacionalmente mais cara.

Existem três filosofias primárias de formulação para elementos finitos geometricamente não-lineares, a formulação Lagrangiana Total, a Lagrangiana Atualizada e a Corrotacional. Na formulação Lagrangiana Total, os termos de deformação de Green-Lagrange e as tensões de Piola-Kirchhoff II são utilizados, visto que tal medida de deformação é insensível a deformações geradas por deslocamentos de corpo rígido.³⁰ Além disso, tanto tensões quanto deformações em qualquer instante de tempo são definidas a partir da configuração inicial de equilíbrio. Caracteriza-se, portanto, pela sua simplicidade e facilidade de implementação, sendo amplamente utilizada na análise de estruturas laminadas sujeitas a grandes deslocamentos.^{24,25,48-50}

Na formulação Lagrangiana Atualizada, os termos de deformação de Green-Lagrange também são utilizados, mas as tensões e deformações em um instante de tempo $t + \Delta t$ não são definidas a partir da configuração inicial, mas a partir do último ponto em equilíbrio, no instante de tempo t .⁵¹ Assim, as tensões de Piola-Kirchhoff II não podem mais ser utilizadas, mas sim as Tensões Reais ou Tensões de Cauchy, escritas na configuração deformada da estrutura.³⁰ Possui portanto uma formulação mais complexa que a Lagrangiana Total.

Já na formulação Corrotacional, define-se um sistema global no qual os deslocamentos são grandes e um sistema local, que acompanha o elemento, no qual deslocamentos e deformações são considerados pequenos. Isola-se, portanto, as parcelas de deslocamento de corpo rígido de forma explícita, permitindo o uso de matrizes lineares no sistema local. Então, a partir de transformações entre os dois sistemas de coordenadas, as matrizes globais não-lineares são obtidas. A principal vantagem da formulação corrotacional é que elementos não-lineares podem ser obtidos partindo diretamente de elementos lineares já formulados e implementados, motivando seu uso.⁵²⁻⁵⁴

Neste trabalho, um elemento de casca laminada abatida baseado na formulação Lagrangiana Total será apresentado. Tal elemento, por ser classificado como estrutural,³⁷ depende de hipóteses cinemáticas aplicadas a seu campo de deslocamento, tal como as teorias apresentadas no Capítulo 2, que reduzem o problema tridimensional a um bidimensional.

Assim, inicialmente, a Teoria de Marguerre,⁵⁵ na qual o elemento se baseia, será discutida, mostrando a inclusão de termos de deformação não-lineares. Em seguida, a formulação de elementos finitos será apresentada, com a obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas do elemento de casca abatida. Em seguida, métodos de resolução da equação de equilíbrio não-linear serão abordados. Por fim, a implementação computacional dos métodos apresentados em um programa de elementos finitos será mostrada, seguida de exemplos numéricos de validação e verificação das formulações.

3.1 Teoria de Marguerre

No Capítulo 2, os campos de deformação das teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin foram apresentados de forma a permitir a formulação das teorias de laminação. Porém, como pode ser visto na Eq. (15), apenas os termos lineares de deformação foram considerados. Como mencionado anteriormente, no desenvolvimento de elementos geometricamente não-lineares baseados na formulação Lagrangiana Total, termos adicionais provenientes do tensor de deformação de Green-Lagrange devem ser utilizados.³⁰ O tensor completo é dado por:⁵⁶

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} + \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j}) \quad (39)$$

onde $\tilde{u}_{i,j}$ representa a derivada dos deslocamentos (u, v, w) em relação às coordenadas (x, y, z) . Considerando a hipótese de rotações moderadas, os termos quadráticos de deformação no plano, $(\partial u/\partial x)^2$, $(\partial v/\partial x)^2$, $(\partial u/\partial y)^2$ e $(\partial v/\partial y)^2$ podem ser desconsiderados e o vetor de deformações no plano se torna:³⁰

$$\epsilon^p = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right\} \quad (40)$$

É importante ressaltar que os termos não-lineares de deformação fora do plano (cisalhamento transversal) se anulam e suas deformações finais permanecem iguais às mostradas na Eq. (15). O campo de deformações degenerado mostrado na Eq. (40) equivale à Teoria de von Kármán,^{29,57} que procura incorporar o acoplamento membrana-flexão que ocorre quando deslocamentos moderadamente grandes são considerados.^{30,58} Ressalta-se que tal acoplamento ocorre mesmo para materiais isotrópicos e homogêneos, tendo uma origem diferente dos acoplamentos mostrados no Capítulo 2.

Na Teoria de von Kármán, a superfície média da placa é considerada inicialmente plana. Porém, a presença de curvaturas iniciais é interessante no tratamento de diversos proble-

mas, como a consideração de imperfeições iniciais em problemas de flambagem²⁹ ou a modelagem de painéis curvos. A Teoria de Marguerre procura incluir os efeitos de curvaturas iniciais no campo de deformações da placa. Tais curvaturas são representadas como uma função $z_0(x, y)$ conhecida. Modificando então as deformações da Eq. (40), tem-se:^{29,30}

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (41)$$

O uso das expressões mostradas na Eq. (41) exige que a casca seja abatida, isto é, que as derivadas $(\partial z_0/\partial x)^2$ e $(\partial z_0/\partial y)^2$ sejam pequenas em comparação com a unidade.²⁹ Expandindo as derivadas da parcela devida aos termos de Green-Lagrange, as deformações no plano podem também ser escritas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Comparando a Eq. (42) com a Eq. (40), nota-se que os termos quadráticos são os mesmos. Portanto, a inserção das curvaturas iniciais da Teoria de Marguerre não ocasionou o aparecimento de novos termos não-lineares de deformação, mas criou outro tipo de acoplamento membrana-flexão devido à geometria curva da casca. Tal acoplamento, ao contrário do que surge na Teoria de von Kármán, aparece mesmo em análises lineares.

Assim, no caso do elemento de casca abatida laminado a ser formulado, três tipos de acoplamento podem ocorrer simultaneamente: O primeiro é devido à própria geometria da casca e advém dos termos de deformação da Teoria de Marguerre. O segundo, ainda em uma análise linear, advém da matriz \mathbf{B} mostrada na Seção 2.3, sendo causada pela relação constitutiva do laminado. O último surge apenas se a análise for geometricamente não-linear, vindo dos termos de deformação de Green-Lagrange.

Tanto a Teoria de Marguerre quanto a de von Kármán tomam como verdadeira a hipótese de Kirchhoff mostrada na Eq. (12). Tal teoria é a mais simples em termos de campo de deslocamento e deformações, pois seu campo de deslocamentos depende de apenas três variáveis, u , v e w . Assim, soluções analíticas para diversas condições de contorno, geometrias e carregamentos foram desenvolvidas, tanto para placas isotrópicas quanto laminadas.^{11,59} Porém, além de ser incapaz de captar efeitos de cisalhamento transversal, sua formulação utilizando o MEF é complexa, pois as funções de forma utilizadas devem possuir continuidade $C1$

devido à presença de derivadas de segundo grau no campo de deformações, visto na Eq. (16).³⁷

Já utilizando a Teoria de Reissner-Mindlin, o número de variáveis do campo de deslocamentos aumenta para cinco, u , v , w , θ_x e θ_y . Porém, como apenas derivadas de primeira ordem surgem nos termos de deformação, visto na Eq. (19), elementos finitos podem ser desenvolvidos utilizando funções de forma com continuidade $C0$, facilitando sua formulação.³⁷

Assim, na presente dissertação, as deformações no plano $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ mostradas na Eq. (42) e as deformações de cisalhamento transversal mostradas nas Eq. (15) serão utilizadas em conjunto com a Teoria de Reissner-Mindlin, cujo campo de deslocamentos é mostrado na Eq. (18), tomando a forma:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^m &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_m}{\partial x} \\ \frac{\partial v_m}{\partial y} \\ \frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^b &= z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
 \boldsymbol{\gamma} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{43}$$

onde a determinação das deformações em um ponto qualquer da placa é feita de modo similar ao mostrado na Eq. (20).

Por fim, rearranjando o vetor de deformações na forma utilizada na relação constitutiva do laminado (Seção 2.3.2) e separando as parcelas lineares (subscrito 0) das não-lineares (subscrito L):²⁹

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^b \\ \boldsymbol{\gamma}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{44}$$

onde os termos lineares valem:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\epsilon}_0^m &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_m}{\partial x} \\ \frac{\partial v_m}{\partial y} \\ \frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \\
 \boldsymbol{\epsilon}_0^b &= z \left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} = z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{array} \right\} \\
 \boldsymbol{\gamma}_0 &= \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{45}$$

e os termos não-lineares valem:

$$\boldsymbol{\epsilon}_L^m = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right\} \tag{46}$$

3.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Tendo obtido o campo de deformações, as equações de equilíbrio do problema podem ser obtidas. No presente desenvolvimento, o Princípio dos Trabalhos Virtuais será utilizado. Considerando portanto um deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$ pequeno e que obedeça as condições de contorno essenciais do problema,³⁷ o equilíbrio entre as variações de trabalho externo e interno é dado por:

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 - \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{b} dV_0 - \int_{S_0} \delta \mathbf{u}^T q dS_0 - \sum \delta \mathbf{u}_p^T F_p = 0 \tag{47}$$

onde $\boldsymbol{\rho} \mathbf{b}$ são as cargas aplicadas no volume da casca e q são cargas atuantes na superfície S . Em todas as integrais, o volume de referência de todos os cálculos é o volume inicial da casca. Isto é devido ao fato de uma formulação Lagrangiana Total estar sendo utilizada. Nela, todas as variáveis se referem à configuração inicial indeformada da estrutura.³⁰

Trabalhando apenas com a integral do trabalho interno, representada pelo primeiro termo da Eq. (47), o vetor de deformações virtuais pode ser desmembrado em parcelas referen-

tes às deformações de membrana, flexão e cisalhamento mostradas na Eq. (44). Transformando também as integrais no volume em integrais duplas separando a integração na área da superfície média e na espessura, tem-se:

$$\int_{A_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\delta \boldsymbol{\epsilon}^m)^T (\boldsymbol{\sigma} dz) dA_0 + \int_{A_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\delta \boldsymbol{\epsilon}^b)^T (\boldsymbol{\sigma}_z dz) dA_0 + \int_{A_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\delta \boldsymbol{\gamma})^T (\boldsymbol{\tau} dz) dA_0 \quad (48)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^T$ e $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz} \ \tau_{yz}\}^T$. Observando a segunda parcela entre parênteses de cada integral, nota-se que estas representam a integração das tensões espessura da placa, mostrada na Eq. (34). Substituindo então tais termos por seus esforços equivalentes, tem-se:

$$\int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\epsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\epsilon}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{Q} dA_0 \quad (49)$$

onde $\mathbf{N} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T$, $\mathbf{M} = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$ e $\mathbf{Q} = \{Q_{xz} \ Q_{yz}\}^T$.

Tomando os termos da Eq. (44) e separando as componentes de deslocamento das derivadas parciais, pode-se representar cada uma das parcelas de deformação em questão através de uma matriz \mathbf{B} , que relaciona deslocamentos com deformações. Pode-se então diferenciar tais relações de modo a obter os termos mostrados na Eq. (49):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^m &= \mathbf{B}^m \mathbf{u} \Rightarrow \delta \boldsymbol{\epsilon}^m = \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{B}}^m \\ \boldsymbol{\epsilon}^b &= \mathbf{B}^b \mathbf{u} \Rightarrow \delta \boldsymbol{\epsilon}^b = \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{B}}^b \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{B}^s \mathbf{u} \Rightarrow \delta \boldsymbol{\gamma} = \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{B}}^s \end{aligned} \quad (50)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{B}}$ relacionam incrementos de deformação a incrementos de deslocamento. Substituindo os termos encontrados na Eq. (49), tem-se:

$$\delta \mathbf{u}^T \left(\int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{Q} dA_0 \right) \quad (51)$$

Representando os termos da Eq. (51) em forma compacta e voltando à expressão completa do PTV da Eq. (47), tem-se:

$$\delta \mathbf{u}^T \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} = 0 \quad (52)$$

onde $\bar{\mathbf{B}} = \{\bar{\mathbf{B}}^m \ \bar{\mathbf{B}}^b \ \bar{\mathbf{B}}^s\}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \{\mathbf{N} \ \mathbf{M} \ \mathbf{Q}\}$. A integral mostrada representa o vetor de forças internas $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ da estrutura, que depende dos deslocamentos devido à não-linearidade imposta pelos termos de deformação de Green-Lagrange e de um possível comportamento fisicamente não-linear. Como a relação da Eq. (52) deve valer para qualquer deslocamento virtual pequeno

e possível,³⁷ os termos $\delta \mathbf{u}^T$ podem ser cancelados e a equação de equilíbrio final é obtida:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = 0 \quad (53)$$

onde \mathbf{f} é o vetor de cargas externas, considerado proporcional a uma carga de referência:

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{q} \quad (54)$$

A matriz $\bar{\mathbf{B}}$ relaciona, portanto, um incremento virtual das deformações com um incremento virtual dos deslocamentos:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} \quad (55)$$

e o vetor de forças internas em sua forma integral é:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 \quad (56)$$

3.3 Discretização por Elementos Finitos

De modo a resolver a equação de equilíbrio mostrada na Eq. (53) e encontrar os deslocamentos da estrutura para cada nível de carga, métodos analíticos e numéricos podem ser utilizados. Utilizando o Método dos Elementos Finitos, o equilíbrio é imposto apenas em pontos discretos, denominados nós, que são interligados formando elementos. No interior dos elementos, os deslocamentos são então interpolados utilizando os valores nodais através de funções de forma H_i . Denominando os deslocamentos nodais por $\bar{\mathbf{u}}$, um incremento virtual das deformações passa a ser:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (57)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{B}}$ agora contém derivadas das funções de forma utilizadas na interpolação dos deslocamentos.

No problema em questão, cinco componentes de deslocamento são interpoladas, os dois deslocamentos de membrana no plano u e v , o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y . Para evitar sobrecarga de índices, o subscrito m que designa os deslocamentos de membrana será omitido no presente desenvolvimento. Os deslocamentos são portanto dados por:

$$u = \sum_i^{nn} H_i u_i \quad v = \sum_i^{nn} H_i v_i \quad w = \sum_i^{nn} H_i w_i \quad \theta_x = \sum_i^{nn} H_i \theta_{x_i} \quad \theta_y = \sum_i^{nn} H_i \theta_{y_i} \quad (58)$$

onde nn é o número de nós do elemento. A Eq. (58) pode também ser escrita em forma matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} \quad (59)$$

onde a matriz \mathbf{H} é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{H}_{nn} \end{bmatrix} \quad (60)$$

e a contribuição de cada nó é:

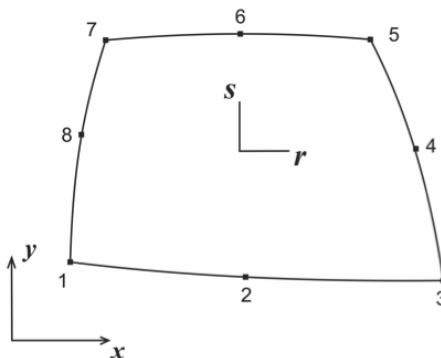
$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} H_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_i \end{bmatrix} \quad (61)$$

Na presente dissertação, o problema de cascas abatidas será implementado utilizando a formulação paramétrica, o que permite que vários elementos de diferentes geometrias e número de nós possam ser utilizados.³⁷ Em particular, utilizando uma formulação isoparamétrica, as coordenadas nodais são também interpoladas utilizando as mesmas funções H_i :

$$x = \sum_i^{nn} H_i x_i \quad y = \sum_i^{nn} H_i y_i \quad z_0 = \sum_i^{nn} H_i z_{0i} \quad (62)$$

As funções H_i dependem do tipo e números de nós do elemento e podem ser encontradas em diversas referências.^{37,58} Em uma formulação paramétrica, dois sistemas de coordenadas são utilizados. No sistema paramétrico (r,s) , o elemento é um quadrado indeformado de lado 2, enquanto que no sistema cartesiano (x,y) o elemento pode assumir formas irregulares. Tais sistemas são mostrados na Figura 7.

Figura 7 – Sistemas de coordenadas em um elemento Q8.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como as funções H_i são escritas em coordenadas paramétricas, uma transformação

entre os dois sistemas é necessária, sendo as funções no espaço cartesiano dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} \\ \frac{\partial H_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (63)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana:²⁹

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial r} x_i & \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial r} y_i \\ \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial s} x_i & \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix} \quad (64)$$

Com isso, os termos da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ mostrada na Eq. (57) podem ser encontrados. Como as deformações de flexão e cisalhamento transversal não possuem termos não-lineares (Equação 44), inicia-se o desenvolvimento por elas:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\epsilon}^b &= \bar{\mathbf{B}}^b \delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_0^b \delta \bar{\mathbf{u}} \\ \delta \boldsymbol{\epsilon}^s &= \bar{\mathbf{B}}^s \delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_0^s \delta \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (65)$$

onde nesses casos a matriz $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0$, pois as deformações não dependem dos deslocamentos. Substituindo então a Eq. (58) na Eq. (44), as matrizes \mathbf{B}_0 são obtidas:

$$\mathbf{B}_{0_i}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial H_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial H_i}{\partial x} & \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{0_i}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 & H_i \\ 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} & -H_i & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

onde, por conveniência, apenas a contribuição do nó i é mostrada.

Para obter a matriz $\bar{\mathbf{B}}^m$, primeiramente deve-se reescrever a parcela não-linear da deformação, $\boldsymbol{\epsilon}_L^m$ como:

$$\boldsymbol{\epsilon}_L^m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} \quad (67)$$

onde $\boldsymbol{\beta}$ representa as derivadas de w em relação às coordenadas x e y . Substituindo a coordenada

w interpolada, tem-se:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}} \Rightarrow \delta\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}\delta\bar{\mathbf{u}} \quad (68)$$

Com isso, pode-se encontrar a variação de $\boldsymbol{\epsilon}^m$ como a soma da variação de sua parcela linear e sua parcela não-linear, mostradas nas Eqs. (45) e (46):

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}^m = \delta\boldsymbol{\epsilon}_0^m + \delta\boldsymbol{\epsilon}_L^m = \delta\boldsymbol{\epsilon}_0^m + \frac{1}{2}\delta\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\beta} \quad (69)$$

Porém, $\delta\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\beta}$.^{30,58} Substituindo então a variação de $\boldsymbol{\beta}$ mostrada na Eq. (68) e desenvolvendo a parcela linear, tem-se:

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}^m = \mathbf{B}_0^m\delta\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{G}\delta\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{B}_0^m + \mathbf{A}\mathbf{G})\delta\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{B}_0^m + \mathbf{B}_L^m)\delta\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}}^m\delta\bar{\mathbf{u}} \quad (70)$$

A parcela linear \mathbf{B}_0^m é obtida substituindo diretamente os deslocamentos interpolados na expressão de $\boldsymbol{\epsilon}_0^m$. As duas parcelas são, portanto:

$$\mathbf{B}_{0_i}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial x}Z_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_i}{\partial y}Z_y & 0 & 0 \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_i}{\partial x} & \frac{\partial H_i}{\partial x}Z_y + \frac{\partial H_i}{\partial y}Z_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{L_i}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial x}W_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y}W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial x}W_y + \frac{\partial H_i}{\partial y}W_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

onde os termos Z_x, Z_y, W_x, W_y são:²⁹

$$Z_x = \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial x} Z_{0i} \quad Z_y = \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial y} Z_{0i} \quad W_x = \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial x} w_i \quad W_y = \sum_i^{mn} \frac{\partial H_i}{\partial y} w_i \quad (72)$$

Por fim, substituindo o valor de $\boldsymbol{\beta}$ da Eq. (68) na Eq. (67), o valor de \mathbf{B}^m é encontrado:

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{B}_0^m + \frac{1}{2}\mathbf{B}_L^m \quad (73)$$

Assim, tanto as matrizes \mathbf{B} quanto $\bar{\mathbf{B}}$ foram obtidas:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^m \\ \bar{\mathbf{B}}^b \\ \bar{\mathbf{B}}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Com isso, o vetor de cargas internas \mathbf{g} mostrado na Eq. (56) pode ser calculado.

3.4 Matriz de Rigidez Tangente

O último passo da formulação do problema de cascas abatidas utilizando o MEF é encontrar a Matriz de Rigidez Tangente (\mathbf{K}_t), que surge devido à linearização da equação de equilíbrio (Equação 53) quando um método implícito como o de Newton-Raphson é utilizado.³⁰ Por definição, a rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \quad (75)$$

Substituindo o vetor de forças internas da Eq. (56) e fazendo a derivada em relação aos deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{u}}$, duas parcelas são encontradas:

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\bar{\mathbf{u}}} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T d\boldsymbol{\sigma} dA_0 + \int_{A_0} d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dA_0 \quad (76)$$

Expandindo inicialmente a primeira parcela:

$$\int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T d\boldsymbol{\sigma} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{d\bar{\mathbf{u}}} dA_0 \quad (77)$$

Porém, sabe-se que $(d\boldsymbol{\epsilon}/d\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{B}}$ e, considerando comportamento fisicamente não-linear no material, $(d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{C}_t$, onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente. Substituindo tais termos, chega-se a:

$$\int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dA_0 = \mathbf{K} \quad (78)$$

A matriz \mathbf{K} contém tanto os termos lineares de rigidez utilizados em uma análise com pequenos deslocamentos quanto termos não-lineares advindos da uso do tensor de deformação de Green-Lagrange.

Voltando à Eq. (76), considera-se agora a segunda parcela. Novamente, considerando a possibilidade de uma análise fisicamente não-linear, os esforços não necessariamente são uma função linear das deformações, mas apenas dados por $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon})$. Além disso, como a única fonte de não-linearidade é a matriz \mathbf{B}_L^m , pode-se dizer que:

$$d\bar{\mathbf{B}} = d\mathbf{B}_L^m \quad (79)$$

e os únicos componentes de esforços que interessam são os de membrana, $\mathbf{N} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T$. Substituindo tais termos, denomina-se a integral resultante de Matriz de Rigidez Geométrica \mathbf{K}_σ , ou matriz das tensões iniciais:^{29,30}

$$\int_{A_0} (d\mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{N} dA_0 = \mathbf{K}_\sigma d\bar{\mathbf{u}} \quad (80)$$

Da Eq. (70), $\mathbf{B}_L^m = \mathbf{A}\mathbf{G}$ e, portanto, $(d\mathbf{B}_L^m)^T = \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T$. Substituindo este termo na Eq. (80), encontra-se:

$$\mathbf{K}_\sigma d\bar{\mathbf{u}} = \int_{A_0} \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \mathbf{N} dA_0 \quad (81)$$

Considerando a parcela $d\mathbf{A}^T \mathbf{N}$ e rearranjando seus termos:

$$d\mathbf{A}^T \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial dw}{\partial x} & 0 & \frac{\partial dw}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial dw}{\partial y} & \frac{\partial dw}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial dw}{\partial x} \\ \frac{\partial dw}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} d\boldsymbol{\beta} \quad (82)$$

Porém, da Eq. (68), $d\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}d\bar{\mathbf{u}}$. Substituindo tais termos na Eq. (81) e cancelando o termo $d\bar{\mathbf{u}}$, a expressão final da matriz de rigidez geométrica é encontrada:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad (83)$$

e a matriz \mathbf{S} é dada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (84)$$

Resolvendo numericamente as integrais mostradas, um conjunto de pontos de integração é criado no plano (x,y) . Adicionalmente, se a seção transversal da casca for integrada durante a análise (Seção 2.3.2), pontos de integração na espessura são utilizados na obtenção da matriz constitutiva \mathbf{C}_t e dos esforços $\boldsymbol{\sigma}$. Considerando portanto que tais matrizes já se encontram integradas na espessura, a matriz de rigidez tangente de um elemento toma a forma:

$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma$, onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_i^{npi} (\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} | \mathbf{J} |)_i W_i \\ \mathbf{K}_\sigma &= \sum_i^{npi} (\mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} | \mathbf{J} |)_i W_i \end{aligned} \quad (85)$$

onde npi é o número de pontos de integração no elemento e W_i é o valor do peso do ponto de integração i . Em tal resolução, geralmente utilizam-se os pontos e pesos da Regra de Gauss.

3.5 Solução da Equação de Equilíbrio Não-Linear

A equação de equilíbrio em sua forma geral, mostrada na Eq. (53), pode ser reescrita de modo a incluir um resíduo \mathbf{r} que representa o desbalanceamento entre forças internas e

externas:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (86)$$

No equilíbrio, $\mathbf{r} = 0$, pois as forças internas igualam-se às externas. Em uma estrutura com n graus de liberdade, a imposição do equilíbrio é representada por um sistema de n equações. Porém, para descrever completamente o caminho carga-deslocamento, deve-se encontrar tanto os deslocamentos \mathbf{u} quanto o fator de carga λ , resultando em $n + 1$ incógnitas e apenas n equações.

Tal diferença entre o número de incógnitas e equações impossibilita a resolução das equações de equilíbrio de forma direta. Para isso, diversos métodos de traçado do caminho de equilíbrio (*path-following methods*) foram desenvolvidos. Na presente dissertação, os principais métodos serão apresentados e implementados em um *software* de elementos finitos. Aplicando o método de Newton-Raphson, as equações de equilíbrio podem ser linearizadas:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \Rightarrow \mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \quad (87)$$

onde o subscrito n representa o valor do novo resíduo. Já os valores anteriores são apresentados sem subscrito.

Como a carga não depende dos deslocamentos \mathbf{u} , a derivada do resíduo em relação aos deslocamentos é somente a derivada das forças internas, formando a matriz de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \quad (88)$$

Nos métodos de controle de carga e controle de deslocamento, uma das $n + 1$ variáveis é mantida constante a cada passo, tornando possível a solução do sistema. Já nos métodos de comprimento de arco, uma equação adicional é utilizada, mantendo variações tanto na carga quanto nos deslocamentos.

Em todos os métodos, considera-se que o processo iterativo de Newton-Raphson atingiu a convergência quando:⁶⁰

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{q}\|)} \leq tol \quad (89)$$

onde tol é um parâmetro de tolerância prescrito.

3.5.1 Controle de Carga

O modo mais simples de resolver o sistema de $n + 1$ incógnitas é adotar o chamado Controle de Carga, que consiste em eliminar a variável λ do problema, impondo incrementos

de carga constantes em cada passo. Como a carga não varia durante as iterações, tem-se:

$$\delta\lambda = 0 \quad (90)$$

Voltando então à Eq. (87) e forçando o resíduo a zerar ($\mathbf{r}_n = 0$), chega-se à variação dos deslocamentos durante a iteração:

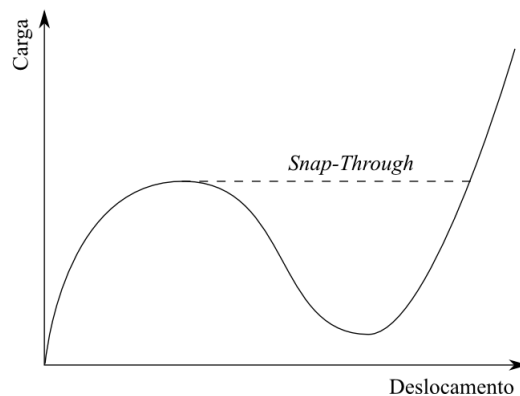
$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_t \delta\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{r} \quad (91)$$

Calcula-se então o novo nível de deslocamentos:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u} \quad (92)$$

Utilizando o Método do Controle de Carga, pode-se traçar o caminho de equilíbrio completo de estruturas nas quais a carga se apresente sempre crescente (ou sempre decrescente). Caso haja mudança no sinal da variação da carga, ocorrerá *snap-through* (Figura 8) e a estrutura passará à posição estável mais próxima, visto que o incremento de carga é sempre crescente ou sempre decrescente. Em algumas estruturas, portanto, o método do controle de carga é insuficiente no traçado do caminho de equilíbrio.

Figura 8 – Fenômeno do *snap-through*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.2 Controle de Deslocamento

Outro modo de resolver o sistema da Eq. (87) é adotar o método do Controle de Deslocamento, proposto inicialmente por Batoz e Dhatt (1979).⁶¹ Em tal método, escolhe-se um deslocamento, isto é, uma componente do vetor \mathbf{u} , para ser incrementado a cada passo. Assim, do mesmo modo que ocorreu com o Controle de Carga, eliminou-se uma das variáveis do problema. Portanto, é necessário isolar o restante das componentes de $\delta\mathbf{u}$ e também $\delta\lambda$.

Neste método, como a carga varia durante as iterações, $\delta\lambda$ é diferente de zero. Retornando à expressão linearizada da Eq. (87) e forçando o resíduo a zerar, tem-se:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_t \delta\mathbf{u} + \mathbf{q} \delta\lambda = 0 \quad (93)$$

onde a derivada do resíduo em relação a λ pode ser obtida derivando a Eq. (86). Rearranjando os termos e isolando $\delta\mathbf{u}$, chega-se a:

$$\delta\mathbf{u} = \delta\hat{\mathbf{u}} + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t \quad (94)$$

onde as parcelas de variação valem:

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{u}} &= -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{r} \\ \delta\mathbf{u}_t &= \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (95)$$

A parcela $\delta\hat{\mathbf{u}}$ corresponde àquela vista na Eq. (91), isto é, representa uma variação nos deslocamentos caso a carga seja mantida constante. A segunda parcela é, portanto, causada pela variação da carga. Escolhe-se então um determinado deslocamento j , no qual o controle se dará. Como a variação iterativa do deslocamento controlado é nula, chega-se a:

$$\delta\hat{\mathbf{u}}(j) + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t(j) = 0 \quad (96)$$

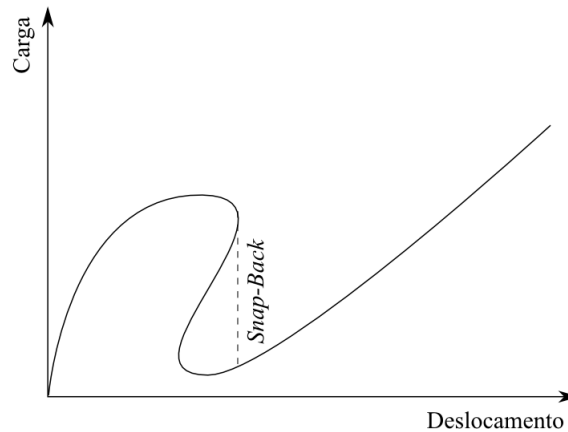
Pode-se então obter o valor de $\delta\lambda$:

$$\delta\lambda = -\frac{\delta\hat{\mathbf{u}}(j)}{\delta\mathbf{u}_t(j)} \quad (97)$$

Na primeira iteração de cada passo, como o ponto está em equilíbrio, $\delta\hat{\mathbf{u}} = 0$ e a Eq. (97) não pode ser usada. Ao invés disso, um preditor de carga é utilizado:

$$\Delta\lambda_p = \frac{\Delta u(j)}{\delta\mathbf{u}_t(j)} \quad (98)$$

O uso de tal método permite, portanto, ultrapassar pontos limites de carga, o que não era possível com o uso do Método do Controle de Carga. Porém, em estruturas que apresentam diminuição nos deslocamentos ao longo do caminho de equilíbrio (*snap-back*), o Método do Controle de Deslocamento não é capaz de traçar o caminho completo, como mostrado na Figura 9. Além disso, a escolha do deslocamento a ser controlado pode ser difícil dependendo da estrutura analisada e a escolha de um incremento em deslocamento não é tão natural quanto a escolha de um incremento de carga. Procurando superar tal dificuldade, alguns autores procuraram utilizar, ao invés de uma só variável, uma combinação de variáveis de controle.^{62,63}

Figura 9 – Fenômeno do *snap-back*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.3 Comprimento de Arco

Apesar do método do Controle de Deslocamento tornar possível atravessar pontos limites de carga, evitando o fenômeno do *snap-through*, ele ainda encontra dificuldades quando da presença do fenômeno *snap-back*, no qual ocorre diminuição nos deslocamentos. Assim, procurando combinar os dois métodos apresentados, Wempner (1971)⁶⁴ e Riks (1979)⁶⁵ propuseram o método do Comprimento de Arco, que foi posteriormente modificado por Crisfield (1981).⁶⁶ A ideia principal consiste em adicionar uma equação de restrição relacionando os incrementos de carga e deslocamento ao sistema ao invés de fixar o incremento de alguma variável. O sistema final fica, portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ a(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (99)$$

É interessante observar que os métodos formulados anteriormente também podem ser representados por uma equação de restrição. Assim, para o Controle de Carga:

$$a = \lambda - \lambda_p \quad (100)$$

onde λ_p é o nível de carga prescrito para o passo corrente. Já para o Controle de Deslocamento:

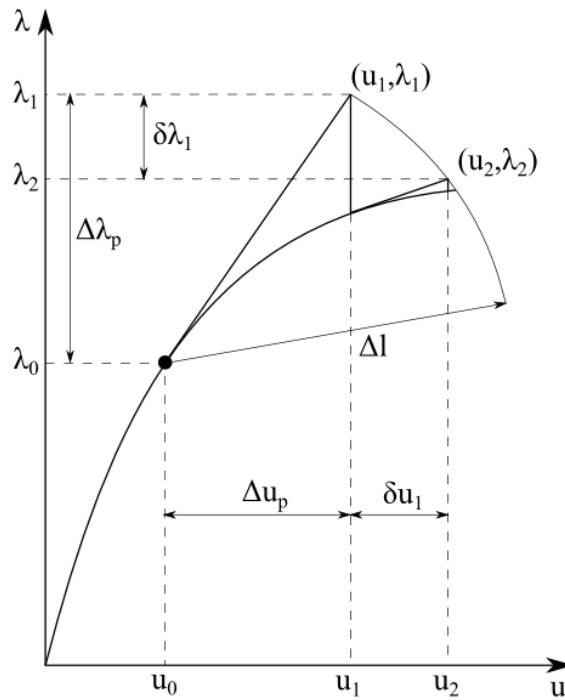
$$a = u_j - u_p \quad (101)$$

onde u_j é o deslocamento prescrito para o grau de liberdade j . No caso dos métodos de Comprimento de Arco, a restrição é dada por:

$$a = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \boldsymbol{\psi}^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q}) - \Delta l^2 = 0 \quad (102)$$

Na equação anterior, Δl é o comprimento de um arco que forma uma hiperesfera no espaço $n + 1$ e ψ é um fator de escala entre os termos de carga e deslocamento. A restrição faz com que todos os pontos obtidos durante o processo iterativo da Eq. (87) estejam a uma distância Δl do último ponto convergido (sobre a curva), como mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Pontos obtidos utilizando comprimento de arco.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor do fator de escala ψ varia de acordo com o tipo de método utilizado. Tanto Crisfield (1981)⁶⁶ quanto Ramm (1981)⁶⁷ concluíram que tal fator tinha pouca influência na resposta estrutural e, portanto, sugeriram um valor de $\psi = 0$, efetivamente transformando a hiperesfera em um hipercilindro, dando ao método o nome de Comprimento de Arco Cilíndrico. Já quando $\psi \neq 0$, o método é chamado Comprimento de Arco Esférico.

Do mesmo modo feito para a Eq. (86), a Eq. (102) pode ser linearizada para aplicação do método de Newton-Raphson:

$$a_n = a + 2\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u} + 2\Delta\lambda\delta\lambda\psi^2\mathbf{q}^T\mathbf{q} = 0 \quad (103)$$

O sistema de equações agora possui $n + 1$ incógnitas e, com a adição da Eq. (103), $n + 1$ equações. Combinando a Eq. (87) com a Eq. (103), na forma matricial, tem-se:³⁰

$$\begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{q} \\ 2\Delta\mathbf{u}^T & 2\Delta\lambda\psi^2\mathbf{q}^T\mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ a \end{Bmatrix} \quad (104)$$

Resolvendo o sistema mostrado na Eq. (104), encontram-se as variações de carga e

deslocamento. Computacionalmente, a inversão da matriz em questão seria ineficiente. Assim, utilizam-se as expressões mostradas na Eq. (95) do mesmo modo que foi feito no controle de deslocamento. As diferenças entre os vários métodos de comprimento de arco residem, portanto, na obtenção do valor de $\delta\lambda$.

No início de cada passo, parte-se de uma solução inicial tangente ao ponto para o qual o algoritmo convergiu no passo anterior. A partir de tal ponto, iniciam-se as iterações de Newton-Raphson. Diz-se, portanto, que a solução parte de um preditor inicial e é corrigida até que o resíduo seja zerado, finalizando um passo.

Ao contrário dos métodos apresentados anteriormente, utiliza-se um preditor tanto para a carga quanto para os deslocamentos. Partindo da expressão do preditor de carga utilizado no Controle de Deslocamento (Equação 97), tem-se:

$$\Delta\lambda_p = \frac{\Delta\mathbf{u}_p}{\delta\mathbf{u}_t} \Rightarrow \Delta\mathbf{u}_p = \Delta\lambda_p \delta\mathbf{u}_t \quad (105)$$

onde $\Delta\mathbf{u}_p$ é o preditor em deslocamentos. Porém, o preditor também deve satisfazer a restrição, isto é, deve estar a uma distância Δl do último ponto em equilíbrio (Figura 10). Substituindo então a Eq. (105) na Eq. (102) e considerando $\psi = 0$, o preditor de carga pode ser obtido:

$$\Delta\lambda_p = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t}} \quad (106)$$

A escolha do sinal do preditor de carga pode ser feita analisando o número de pivôs negativos na matriz de rigidez tangente após fatoração.⁶⁶ Nesse caso, quando a curva passa por um ponto limite, um pivô negativo surge e, assim, o preditor tende a fazer a curva caminhar para baixo (trecho instável). Porém, pivôs negativos também surgem quando a curva passa por pontos de bifurcação, mas o caminho não necessariamente se torna descendente. Assim, em tais casos, a utilização deste método causaria uma oscilação em torno do ponto de bifurcação. Outros trabalhos buscam utilizar outras medidas para calcular o sinal do preditor.⁶⁸⁻⁷¹

No cálculo de $\delta\lambda$, pode-se, ao invés de trabalhar com a forma linearizada da restrição, mostrada na Eq. (103), utilizá-la diretamente em sua forma quadrática.³⁰ Partindo da Eq. (102), pode-se encontrar:

$$\Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} + \delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta\mathbf{u}_n^T \Delta\mathbf{u}_n + \Delta\lambda_n^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta l^2 \quad (107)$$

Substituindo a Eq. (94) na Eq. (107), pode-se obter uma equação do segundo grau em $\delta\lambda$:

$$\begin{aligned} a_1 \delta\lambda^2 + a_2 \delta\lambda + a_3 &= 0 \\ a_1 &= \delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t + \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \\ a_2 &= 2\delta\mathbf{u}_t^T (\Delta\mathbf{u} + \delta\hat{\mathbf{u}}) + 2\Delta\lambda \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \\ a_3 &= (\Delta\mathbf{u} + \delta\hat{\mathbf{u}})^T (\Delta\mathbf{u} + \delta\hat{\mathbf{u}}) - \Delta l^2 + \Delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \end{aligned} \quad (108)$$

É importante notar que a Eq. (108) fornece dois valores possíveis para $\delta\lambda$. O procedimento para escolher a raiz apropriada consiste em computar as mudanças incrementais para ambas e escolher aquela que produza o ponto mais próximo àquele obtido no final do último passo, isto é:³⁰

$$\begin{cases} \delta\lambda = \delta\lambda_2 & \text{se } \delta\lambda_2 \Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_t > \delta\lambda_1 \Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_t \\ \delta\lambda = \delta\lambda_1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (109)$$

O uso do Método do Comprimento de Arco Quadrático geralmente leva a bons resultados. Dependendo do problema e do valor do comprimento de arco adotado, raízes complexas podem ser encontradas na Eq. (108). Em tal caso, pode-se adotar um procedimento de reinício do processo, descartando todas as iterações do passo atual e recomeçando utilizando um comprimento de arco igual a metade do usado anteriormente.

A variação de Ramm (1981)⁶⁷ para o comprimento de arco trabalha com a restrição a em sua forma linearizada, mostrada na Eq. (103). Nesse caso, garante-se que a direção do novo incremento é sempre ortogonal à reta secante que une o último ponto convergido ao ponto obtido na última iteração, não convergido. Além disso, considera-se nulo o valor de a , que representa o valor da restrição do último ponto obtido. Isolando $\delta\lambda$ na Eq. (103) e considerando $a = 0$, tem-se:⁶⁰

$$\delta\lambda = \frac{-\Delta\mathbf{u}^T \delta\hat{\mathbf{u}}}{(\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_t + \Delta\lambda\psi^2)} \quad (110)$$

Tal como o método de Ramm (1981)⁶⁷, o comprimento de arco de Riks-Wempner^{64,65} também trabalha com a forma linearizada da restrição a . Porém, ao invés da mudança iterativa ser perpendicular à mudança secante, ela é sempre perpendicular ao predictor inicial. Assim como no método anterior, o valor a é também considerado nulo. Assim, a expressão para $\delta\lambda$ fica:

$$\delta\lambda = \frac{-\Delta\mathbf{u}_p^T \delta\hat{\mathbf{u}}}{(\Delta\mathbf{u}_p^T \delta\mathbf{u}_t + \Delta\lambda_p\psi^2)} \quad (111)$$

Por fim, no método linear consistente, parte-se novamente da equação linearizada mostrada na Eq. (108).^{72,73} Porém, o valor de a , referente ao valor anterior da restrição, não é considerado nulo, mas sim calculado utilizando a Eq. (102) com os valores obtidos na iteração anterior. Assim, fazendo tal substituição, a expressão para o cálculo de $\delta\lambda$ se torna:

$$\delta\lambda = \frac{-0.5a - \Delta\mathbf{u}^T \delta\hat{\mathbf{u}}}{\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u}_t + \Delta\lambda\psi^2} \quad (112)$$

Por fim, torna-se necessário atualizar o valor do comprimento de arco a cada passo. Dependendo do ponto em que se esteja na curva carga-deslocamento, pode ser necessário uti-

lizar um comprimento de arco menor para que a convergência seja atingida. Tal fato ocorre, notadamente, na proximidade de pontos limites. Em regiões bem comportadas, como trechos de pequena curvatura, o comprimento de arco pode ser aumentado, de modo a diminuir o número de passos e, portanto, o esforço computacional. Assim, ao final de cada passo, o comprimento de arco é atualizado usando:³⁰

$$\Delta l_n = \Delta l \left(\frac{I_d}{I} \right)^{1/2} \quad (113)$$

onde I_d é o número alvo de iterações para o próximo passo, isto é, o número de iterações que se espera utilizar para atingir a convergência e I é o número de iterações necessário no passo anterior. É importante ressaltar que, no primeiro passo da análise, o incremento informado pelo usuário é utilizado como um passo puramente de carga, tal como no método do Controle de Carga.

3.6 Implementação Computacional

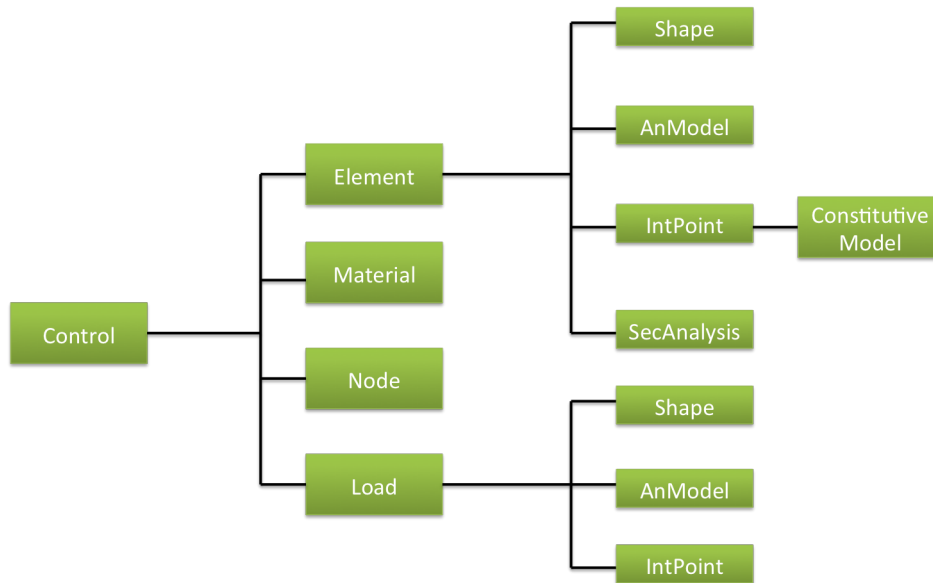
As formulações apresentadas neste capítulo foram implementadas no programa de elementos finitos acadêmico de código aberto FAST (Finite Element Analysis Tool), desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará. A linguagem escolhida foi C++ e os princípios da Programação Orientada a Objetos (POO) foram utilizados. Assim, componentes independentes do processo de análise são isolados em classes independentes, cada uma contendo as rotinas específicas de cada componente. Tal separação distinta entre componentes torna a estrutura do programa mais organizada, facilitando futuras implementações.

3.6.1 Estrutura Geral do Programa FAST

A estrutura de classes geral do programa é mostrada na Figura 11, onde as linhas não implicam uma relação de herança, mas sim uma relação do tipo 'has a'. Em um nível global, a classe de controle *cControl* é responsável por gerenciar os diversos processos de análise presentes no *software*, além de realizar tarefas como a montagem da matriz de rigidez global, do vetor de cargas global, dentre outros.

A classe *cElement* gerencia todas as tarefas individuais de cada elemento da malha, contendo um objeto da classe *cShape*, que armazena suas funções de forma H_i , um modelo de análise (*cAnModel*), que é responsável pelo modelo matemático do problema a ser resolvido (campo de deslocamentos, deformações, graus de liberdade) e um modelo de análise de seção (*cSecAnalysis*), que realiza integrações na seção transversal do elemento, se necessário. Além disso, para cada ponto de integração do elemento, um objeto da classe *cIntPoint* é criado e, para cada um destes, um ou mais modelos constitutivos, dependendo se a seção é ou não integrada durante a análise.

Figura 11 – Estrutura do programa FAST.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A classe *cNode* é basicamente uma classe de armazenamento, contendo as coordenadas de cada nó, condições de contorno, massas e molas concentradas, dentre outros. Já a classe *cMaterial*, também de armazenamento, contém as propriedades mecânicas dos diversos tipos de material disponíveis. Por fim, a classe *cLoad* lida com os vários tipos de carga externa e é responsável pela distribuição para os nós das cargas aplicadas no interior dos elementos.

3.6.2 Elemento de Casca Abatida

A implementação do elemento finito não-linear de casca abatida foi feita em duas etapas principais. A primeira foi a implementação das rotinas de análise não-linear Lagrangiana Total para elementos paramétricos em geral, realizada na classe *cElement*. Já a segunda disse respeito especificamente ao modelo de análise para cascas abatidas, realizada na classe *cAnModel*. É importante ressaltar que o elemento já havia sido implementado no programa FEMOOP,²⁹ facilitando portanto sua implementação no FAST. Porém, devido a diferenças nas estruturas dos dois programas, algumas adaptações tiveram de ser realizadas.

Na primeira etapa, uma nova classe de elementos paramétricos, *cElmParamTL* foi criada, herdando os membros da classe de elementos paramétricos convencionais, *cElmParam*. Na nova classe criada, a rotina de cálculo da matriz de rigidez passou a calcular as três matrizes mostradas na Eq. (85). Além disso, a rotina de cálculo do vetor de forças internas e das tensões nos pontos de integração foram também modificadas de modo a incorporar o efeito dos termos de deformação não-lineares de Green-Lagrange.

Na segunda etapa, o modelo de análise referente ao elemento de casca abatida baseado na Teoria de Marguerre foi criado como uma classe derivada de *cAnModel*. Na nova classe,

cShallowShell, as matrizes \mathbf{B} e $\bar{\mathbf{B}}$ mostradas nas seções anteriores foram implementadas, assim como as matrizes \mathbf{S} e \mathbf{G} , necessárias na definição da matriz de rigidez geométrica. É importante ressaltar que o cálculo da matriz \mathbf{C}_t foi realizado pela classe *cSecAnalysis*, enquanto que o modelo de análise apenas fornece a matriz constitutiva local de uma lâmina (\mathbf{Q}) e sua matriz de transformação (\mathbf{T}), ambas mostradas na Seção 2.1.

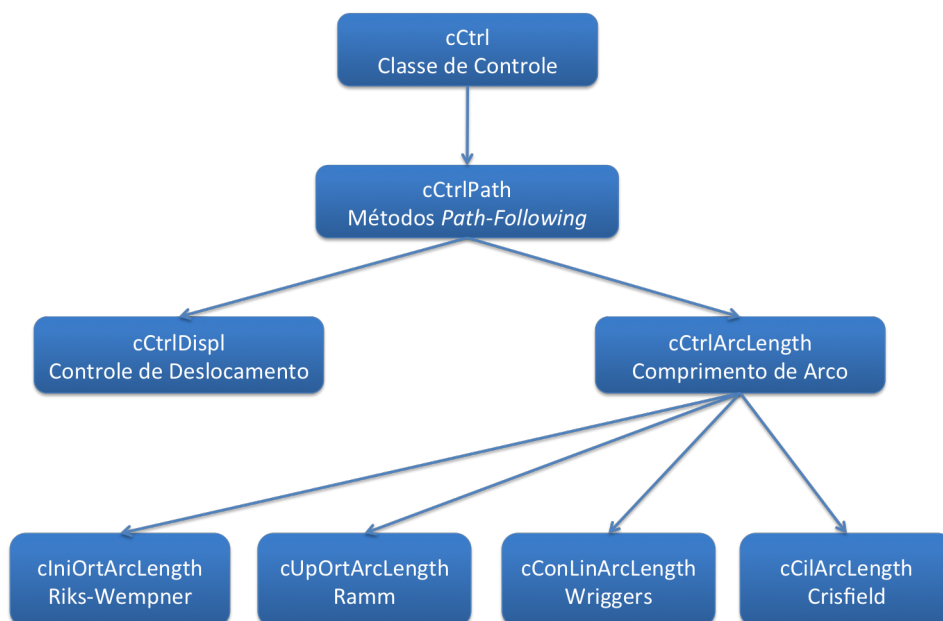
3.6.3 Métodos de Traçado do Caminho de Equilíbrio

As rotinas de comprimento de arco foram implementadas na classe *cCtrl*, que controla os diversos processos de análise presentes no *software*, além de realizar tarefas relacionadas, como a montagem das matrizes de rigidez globais, vetor de cargas global, matriz de massa, entre outros. Na ocasião da implementação, o programa já possuía tanto o Método do Controle de Carga quanto o Método do Controle de Deslocamento.

Como o Controle de Deslocamento possui várias semelhanças com os métodos de Comprimento de Arco, tal classe, *cCtrlDispl*, foi transformada em uma classe geral que lida com métodos path-following, denominada *cCtrlPath*. A classe responsável pelo Controle de Deslocamento passou, portanto, a ser herdeira da classe *cCtrlPath*.

Criou-se então a classe *cCtrlArcLength*, herdando os membros públicos de *cCtrlPath*. De tal classe, foram derivadas todas as variações do método do comprimento de arco apresentadas neste trabalho, intituladas: *cIniOrtArcLength* (Método de Riks-Wempner), *cUpOrtArcLength* (Método de Ramm), *cConLinArcLength* (Comprimento de arco linear consistente) e *cCilArcLength* (Comprimento de arco quadrático). A estrutura de classes final é apresentada na Figura 12.

Figura 12 – Estrutura da classe *cCtrlPath*.



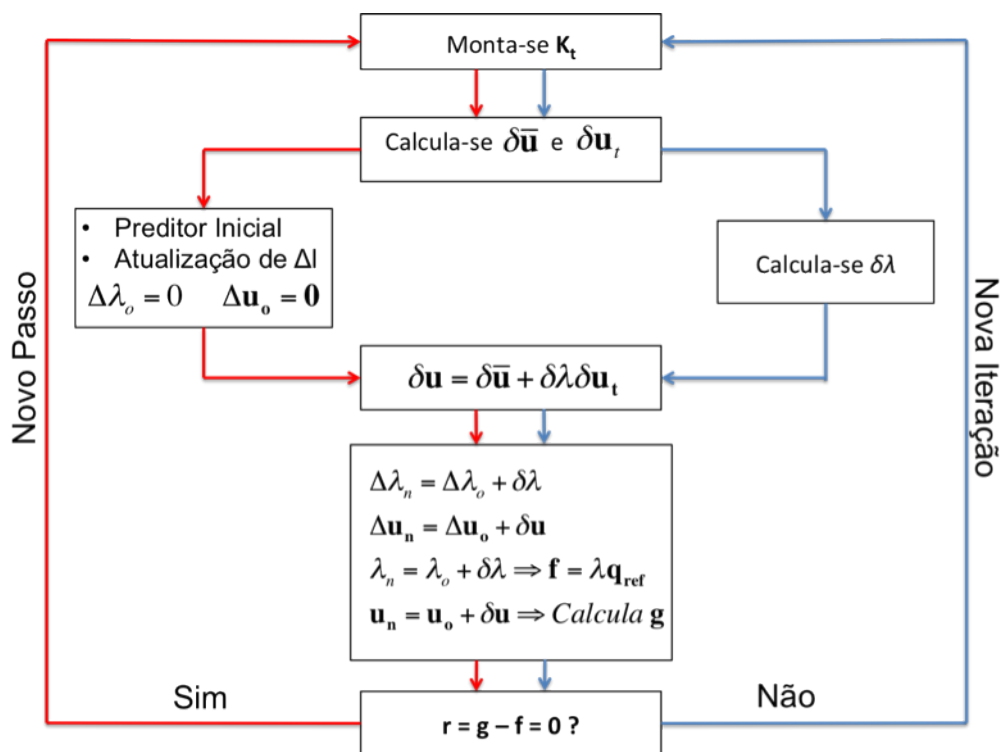
Fonte: Elaborada pelo autor.

A classe *cCtrlPath* guarda, portanto, o procedimento de análise em si, enquanto que cada uma das outras classes guarda os métodos para o cálculo de $\delta\lambda$ apresentados anteriormente, implementados na função *IncLoadFac*. Foi também implementada uma função de leitura do parâmetro ψ^2 , denominada *ReadData*. Se nenhum valor para ψ^2 for especificado, ele é considerado nulo e, portanto, o método se torna cilíndrico.

Para o caso do comprimento de arco quadrático, optou-se por implementar uma rotina de reinício de passo quando raízes complexas forem geradas na resolução da Eq. (108). Assim, caso raízes complexas surjam, todo o progresso feito durante o passo é descartado, isto é, os vetores \mathbf{u} e \mathbf{f} retornam aos valores que tinham no início do passo. O comprimento de arco é então dividido por dois e o processo é reiniciado da primeira iteração.

O processo de análise implementado pode ser representado através de um fluxograma, mostrado na Figura 13, onde as setas em vermelho representam procedimentos realizados durante a primeira iteração de cada passo e setas em azul representam procedimentos das demais iterações.

Figura 13 – Fluxograma simplificado das rotinas de comprimento de arco.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.7 Exemplos Numéricos

Na presente seção, o elemento finito de casca abatida formulado e implementado será utilizado na modelagem de problemas de verificação presentes na literatura. O objetivo é,

portanto, garantir o correto funcionamento do elemento e das técnicas de traçado do caminho carga-deslocamento antes de tratar problemas de otimização ou problemas com não-linearidade física. Além disso, busca-se avaliar os limites de aplicação do elemento, particularmente no que diz respeito à presença de altas curvaturas.

Todos os exemplos foram modelados utilizando elementos quadriláteros de 8 nós (Q8) e a integração reduzida de 2x2 Pontos de Gauss foi utilizada de modo a evitar o fenômeno do travamento por cisalhamento.³⁷ Já no que diz respeito à resolução da equação de equilíbrio pelo Método de Newton-Raphson, o número máximo de iterações foi fixado em 100 e a tolerância em 10^{-6} para todas as análises (Equação 89).

3.7.1 Placas Simplesmente Apoiadas

Os primeiros exemplos de verificação foram propostos inicialmente por Reddy¹¹ e consistem em placas simplesmente apoiadas submetidas a um carregamento uniformemente distribuído em sua área. Inicialmente, uma placa isotrópica será considerada, seguida de uma laminada. Em ambos os casos, resolveu-se adotar as mesmas unidades dos exemplos originais, de modo a simplificar a comparação dos resultados.

3.7.1.1 Placa Isotrópica

No primeiro exemplo, considera-se uma placa isotrópica quadrada com lado $a = 10''$ (0.254m) e espessura $h = 1''$ (0.0254m). O material possui módulo de elasticidade $E = 7.8 \cdot 10^6 \text{ psi}$ (53.78 GPa) e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. As condições de contorno utilizadas foram $u = v = w = 0$ em todos os bordos. Na modelagem por elementos finitos, uma malha de 100 elementos (10x10) foi utilizada, totalizando 1705 graus de liberdade. Uma carga de referência $q_0 = 4875 \text{ psi}$ foi aplicada e o método do Controle de Carga foi utilizado para aplicar 32 passos de carga unitários ($\Delta\lambda = 1$). Na comparação dos resultados com os de Reddy (2004),¹¹ um fator de carga \bar{P} foi utilizado:

$$\bar{P} = \frac{q_0 a^4}{E h^4} \quad (114)$$

O valor utilizado na comparação foi o deslocamento transversal w_c do centro da placa, que foi obtido para cada valor de \bar{P} . Ressalta-se que muito embora 32 pontos de equilíbrio tenham sido obtidos, apenas 10 deles estão disponíveis na literatura para comparação, pois o valor de $\Delta\lambda$ usado por Reddy (2004)¹¹ é variável. A Tabela 1 apresenta a comparação dos resultados, enquanto que a Figura 14 mostra as curvas carga-deslocamento.

Nota-se que os resultados obtidos pelo elemento implementado concordaram exatamente com aqueles obtidos na literatura, com erros máximos de 0.02%. Além disso, nota-se que o caminho carga-deslocamento apresenta valores de carga sempre crescentes, sem a ocorrência de *snap-through*. É importante ressaltar que caso a curva carga-deslocamento não possua pon-

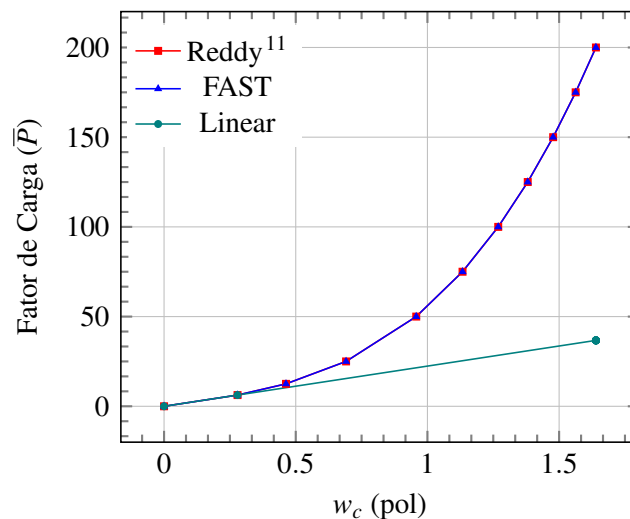
Tabela 1 – Resultados para a placa isotrópica.

\bar{P}	w_c - Reddy (pol)	w_c - FAST (pol)	Erro (%)
6.25	0.2790	0.2790	0.00
12.50	0.4630	0.4629	-0.02
25.00	0.6911	0.6910	-0.01
50.00	0.9575	0.9573	-0.02
75.00	1.1333	1.1332	-0.01
100.00	1.2688	1.2686	-0.02
125.00	1.3809	1.3807	-0.01
150.00	1.4774	1.4772	-0.01
175.00	1.5628	1.5627	-0.01
200.00	1.6398	1.6397	-0.01

Fonte: Elaborada pelo autor.

tos críticos, o uso do método do Controle de Carga é vantajoso, permitindo um maior controle nos pontos de equilíbrio obtidos, o que facilita a comparação dos resultados.

Figura 14 – Placa isotrópica simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante frisar o papel dos termos de deformação não-lineares de membrana no comportamento da estrutura. Na Figura 14, o comportamento linear da estrutura foi traçado para efeito de comparação. Nota-se que como os deslocamentos no plano (u e v) foram restringidos em todos os bordos, houve um aumento considerável na rigidez da placa na análise não-linear devido aos termos de acoplamento membrana-flexão não-lineares da teoria de von Kármán (Equação 46). Tal fato demonstra a importância da realização de análises geometricamente

não-lineares na determinação da capacidade de carga da estrutura.

3.7.1.2 Placa Laminada

No segundo exemplo, considera-se uma placa quadrada com lado $a = 12''$ (0.3048m) e espessura total $h = 0.096''$ (2.24mm), composta por 4 lâminas de mesma espessura $t = 0.024''$ (0.6096mm) e laminação $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, simétrica e *cross-ply*. As propriedades do material são $E_1 = 1.8282 \cdot 10^6 psi$ (12.60 GPa), $E_2 = 1.8315 \cdot 10^6 psi$ (12.63 GPa), $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.3125 \cdot 10^6 psi$ (2.15 GPa) e $\nu_{12} = 0.2395$. As mesmas condições de contorno do primeiro exemplo foram utilizadas, $u = v = w = 0$ em todos os bordos, e a malha novamente conteve 100 elementos (10x10).

A carga distribuída foi aplicada com um valor de referência unitário $q_0 = 1.0 psi$ e 12 passos de carga $\Delta\lambda = 0.2$ foram aplicados utilizando novamente o método do Controle de Carga. Do mesmo modo do exemplo anterior, o deslocamento w_c do centro da placa foi medido para cada passo. Os resultados são mostrados na Tabela 2 e na Figura 15.

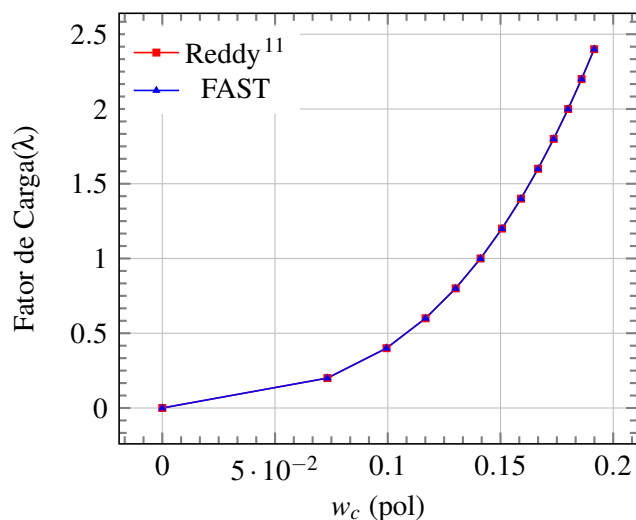
Tabela 2 – Resultados para a placa laminada.

λ	w_c - Reddy (pol)	w_c - FAST (pol)	Erro (%)
0.2	0.07324	0.07322	-0.03
0.4	0.09946	0.09944	-0.02
0.6	0.11677	0.11676	-0.01
0.8	0.13012	0.13010	-0.02
1.0	0.14116	0.14114	-0.01
1.2	0.15067	0.15065	-0.01
1.4	0.15908	0.15907	-0.01
1.6	0.16667	0.16666	-0.01
1.8	0.17360	0.17359	-0.01
2.0	0.18001	0.17999	-0.01
2.2	0.18597	0.18596	-0.01
2.4	0.19156	0.19155	-0.01

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, assim como para o caso da placa isotrópica, o elemento implementado forneceu bons resultados, com erros máximos de 0.03%. Assim como no exemplo anterior, a curva carga-deslocamento não apresentou pontos críticos, o que permitiu seu traçado completo utilizando o método do Controle de Carga. Os resultados sugerem que para placas inicialmente planas tanto isotrópicas quanto laminadas, o elemento de casca abatida fornece bons resultados, sendo reduzido a um elemento baseado na Teoria de von Kármán.²⁹

Figura 15 – Placa laminada simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.7.2 Casca Abatida

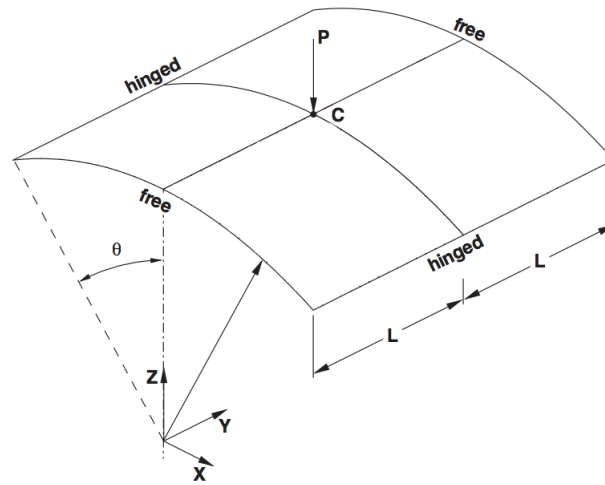
O próximo exemplo consiste em uma casca abatida com dois bordos apoiados e dois bordos livres e uma carga concentrada aplicada em seu centro. Tal estrutura foi analisada em diversos trabalhos, sendo um dos exemplos clássicos de verificação de elementos de casca geometricamente não-lineares. Resultados tanto isotrópicos como laminados se fazem presentes no trabalho de Sze *et al* (2004)⁷⁴ e serão reproduzidos utilizando o elemento implementado.

A geometria do problema é mostrada na Figura 16, onde $R = 2540\text{mm}$, $L = 254\text{mm}$ e $\theta = 0,1\text{rad}$. Dois valores de espessura, $h = 12,7\text{mm}$ e $h = 6,35\text{mm}$ foram utilizados e uma carga máxima $P_{max} = 3000\text{N}$ foi aplicada. Nos bordos apoiados, foi aplicada a condição de contorno $v = w = 0$ e apenas o nó central de um dos bordos teve o deslocamento na direção x preso.

No exemplo isotrópico, $E = 3102,75\text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,3$. Já nos exemplos laminados, $E_1 = 3300\text{ N/mm}^2$, $E_2 = 1100\text{ N/mm}^2$, $G_{12} = 660\text{ N/mm}^2$ e $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$. Neste caso, duas laminações diferentes foram utilizadas, ambas simétricas e *cross-ply*: $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ e $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$. Como a espessura das camadas é constante, elas valem $t = 4,233\text{mm}$ para a espessura de $12,7\text{mm}$ e $t = 2,116\text{mm}$ para a espessura de $6,35\text{mm}$. Uma malha de 100 elementos foi utilizada na modelagem tanto para a casca isotrópica quanto para a laminada, totalizando 1705 graus de liberdade.

O deslocamento w_c do centro da placa será extraído para cada valor de carga utilizando o método do comprimento de arco de Riks-Wempner com fator de carga inicial igual a 1,0 e $I_d = 4$. Como não é possível controlar diretamente os níveis de carga ou deslocamento, não é possível fazer uma comparação dos resultados ponto a ponto como foi feito nos exemplos anteriores. Assim, apenas as curvas carga-deslocamento foram obtidas. Considerando inicial-

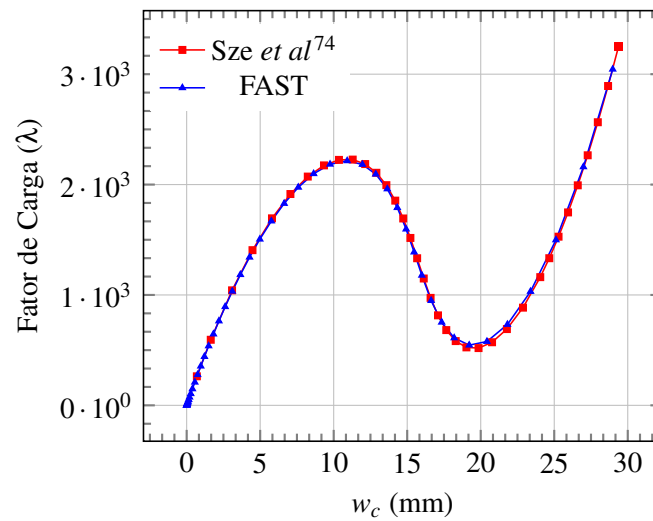
Figura 16 – Exemplo de casca abatida.



FONTE: Adaptado de Sze *et al* (2004)⁷⁴.

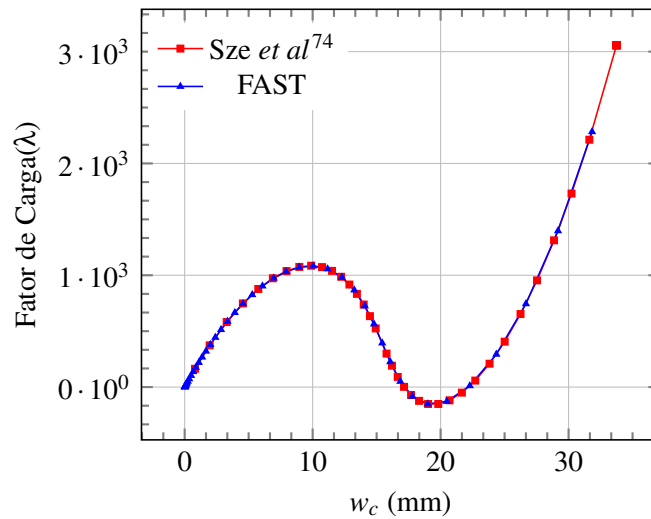
mente $h = 12.7\text{mm}$, os resultados para a casca isotrópica são mostrados na Figura 17. Já para as cascas laminadas, as Figuras 18 e 19 mostram as curvas para as duas laminações.

Figura 17 – Casca abatida (Isotrópica - $h = 12.7\text{mm}$)



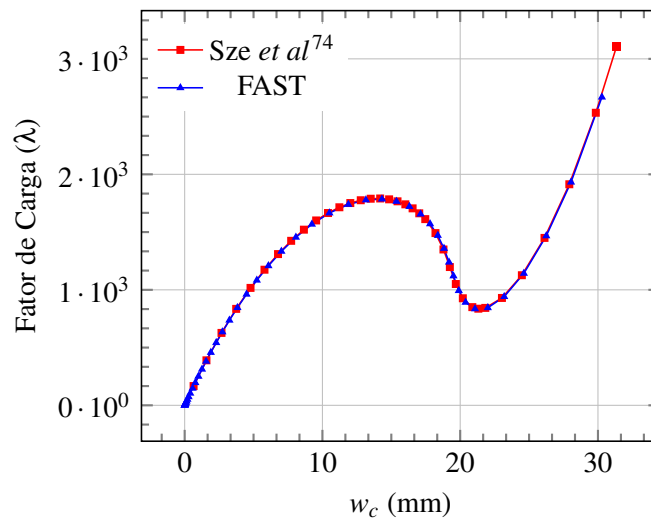
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Casca abatida laminada ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ - $h = 12.7\text{mm}$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Casca abatida laminada ($[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ - $h = 12.7\text{mm}$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

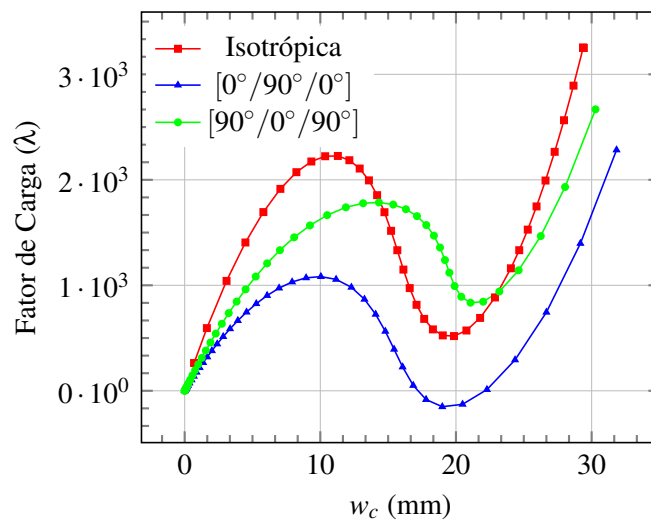
Observando as curvas obtidas, nota-se uma boa concordância com os resultados encontrados na literatura, tanto para a casca isotrópica quanto para as laminadas.⁷⁴ Em termos da forma do caminho de equilíbrio, os três casos se mostraram similares, com a presença de um ponto crítico de carga, com a inversão no sinal da matriz de rigidez tangente. Nota-se que, como o método do comprimento de arco foi utilizado, não ocorreu *snap-through* e o caminho completo foi traçado. Por outro lado, não houve a presença de pontos críticos de deslocamento, o que permitiria também o uso do método do Controle de Deslocamento.

De forma a melhor observar as diferenças entre os modelos, as curvas para as três cascas são mostradas no mesmo gráfico na Figura 20. Nota-se que a casca isotrópica se apre-

senda mais rígida que as laminadas, devido à baixa rigidez do compósito na direção transversal às fibras (E_2).

Comparando então as duas laminações consideradas, nota-se que seu comportamento é semelhante durante o trecho inicial linear da curva. Porém, à medida que os deslocamentos aumentam, diferenças significativas de rigidez surgem entre os dois casos, com a laminação com mais camadas a 90° possuindo capacidade de carga aproximadamente 60% maior. Isso mostra como o comportamento mecânico da estrutura é capaz de sofrer grandes mudanças apenas com a modificação das orientações das fibras, mantendo a mesma espessura total.

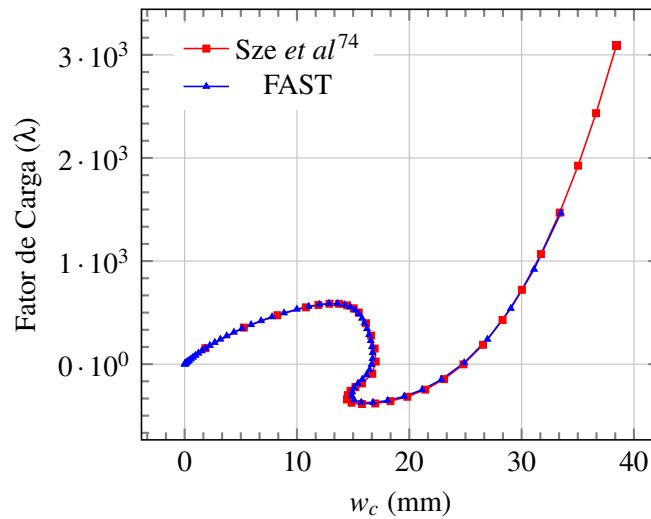
Figura 20 – Casca abatida (FAST - $h = 12.7\text{mm}$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Partindo então para os exemplos com espessura $h = 6.35\text{mm}$, os resultados para o caso isotrópico são mostrados na Figura 21, enquanto que os laminados são vistos nas Figuras 22 e 23. Observando a forma dos caminhos de equilíbrio e comparando com aquelas obtidas para as cascas com $h = 12.7\text{mm}$, nota-se que a diminuição na espessura causou o surgimento de novos pontos críticos para todos os casos analisados.

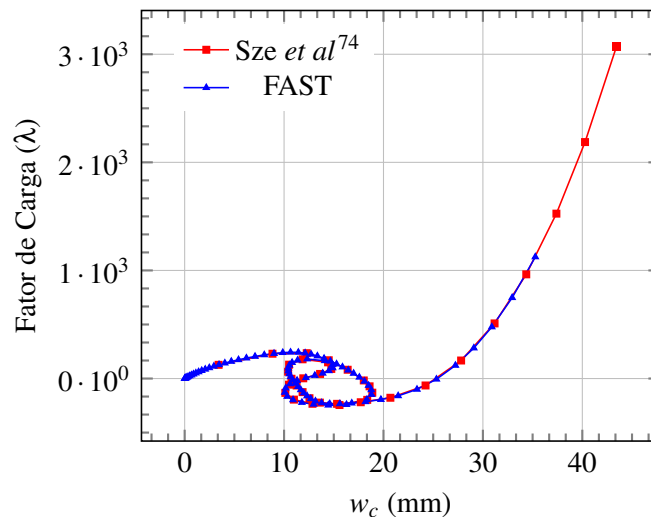
Figura 21 – Casca abatida (Isotrópica - $h = 6.35mm$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

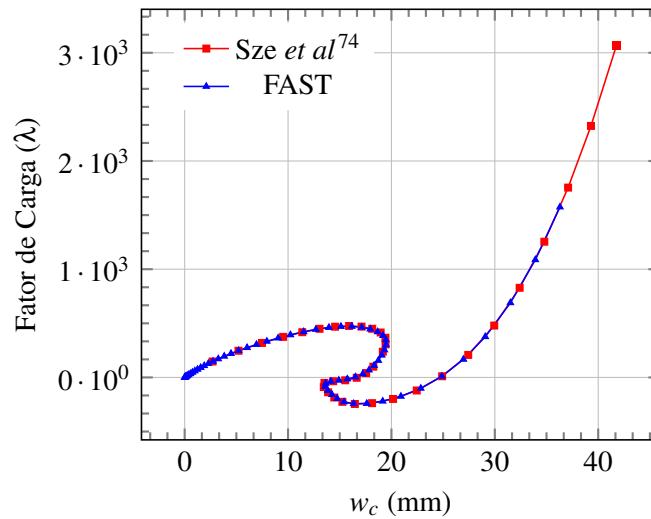
Observando o caso isotrópico, identifica-se um ponto crítico de carga seguido de um ponto crítico de deslocamento. O mesmo acontece para a casca com laminação $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, mas com uma diminuição mais acentuada nos deslocamentos. Já para a casca com laminação $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, a forma do caminho é consideravelmente diferente, com o aparecimento de dois pontos críticos de carga e dois de deslocamento. Ressalta-se que apenas os métodos de comprimento de arco são capazes de traçar os caminhos em questão, o que justifica sua implementação.

Figura 22 – Casca abatida ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ - $h = 6.35mm$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

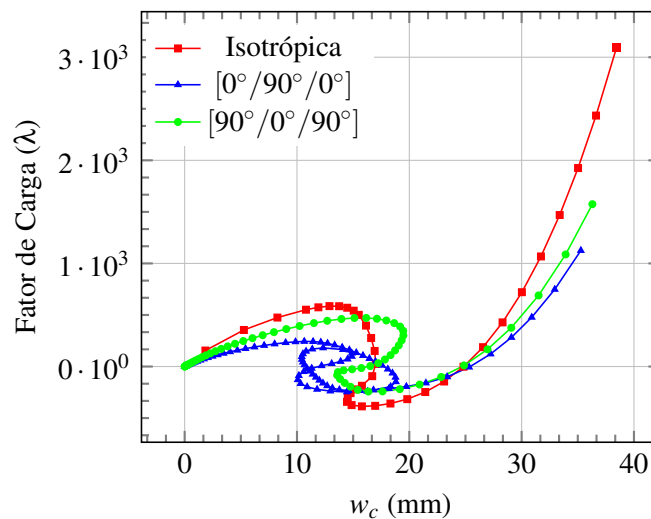
Figura 23 – Casca abatida ($[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ - $h = 6.35\text{mm}$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agrupando as três curvas em um só gráfico (Figura 24), nota-se que novamente a casca isotrópica apresenta maior capacidade de carga, mas a diferença desta vez é menos acentuada. Já comparando as duas cascas laminadas, novamente vê-se um comportamento similar no trecho linear e diferente no trecho não-linear. Além disso, a casca com mais camadas a 90° novamente apresenta maior capacidade de carga.

Figura 24 – Casca abatida (FAST - $h = 6.35\text{mm}$)



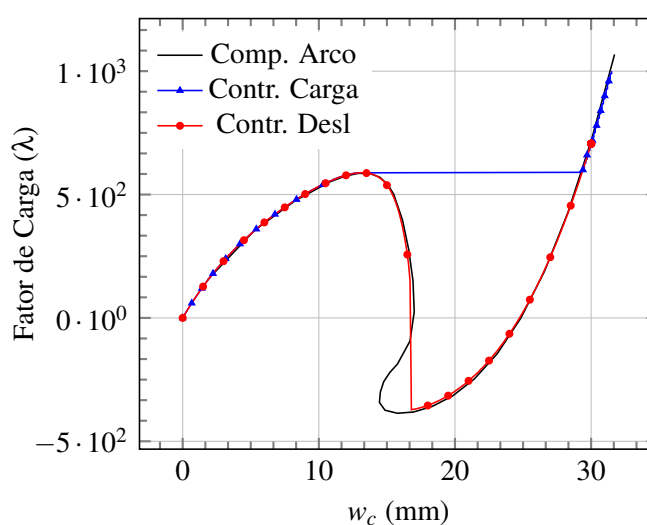
Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, uma comparação entre os vários métodos de traçado do caminho de equilíbrio será realizada. Tomando a casca isotrópica com $h = 6.35\text{mm}$, todos os métodos implementados serão utilizados para tentar traçar a curva carga-deslocamento completa. Na Figura 25, os métodos do Controle de Carga e Controle de Deslocamento são plotados juntamente com a

resposta de referência encontrada na literatura.⁷⁴

Como esperado, nenhum dos dois métodos básicos foi capaz de traçar a curva completa. A curva azul ilustra, portanto, o fenômeno do *snap-through* quando o ponto crítico de carga é atingido. Já a curva vermelha ilustra o fenômeno do *snap-back* quando um ponto de diminuição dos deslocamentos foi atingido. Ressalta-se que, para evitar uma falta de convergência em ambas as análises, a precisão teve de ser diminuída para 10^{-4} e o número de iterações máximo aumentado para 100. Vê-se portanto que além de não traçar a curva completa, tais métodos encontram problemas de convergência que podem parar a análise quando pontos críticos são atingidos.

Figura 25 – Comparação entre métodos de traçado do caminho de equilíbrio.



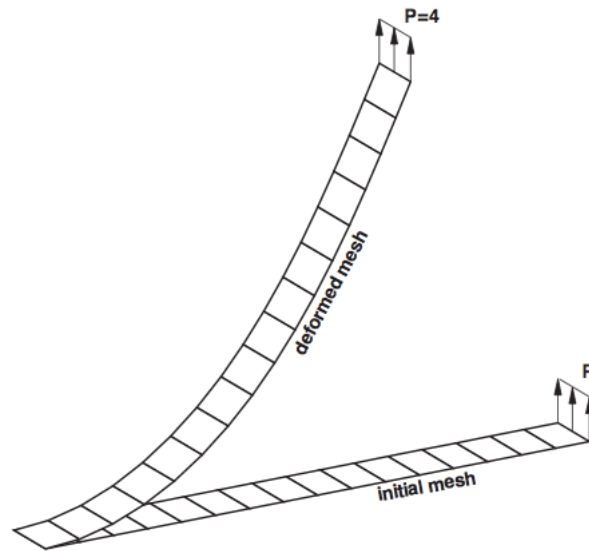
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.7.3 Viga em Balanço

Neste exemplo, uma viga em balanço será modelada utilizando os elementos implementados e submetida a cargas em sua extremidade livre. Assim como no exemplo anterior, resultados de verificação foram extraídos do trabalho de Sze *et al* (2004),⁷⁴ sendo mais um exemplo clássico de verificação tanto de elementos de pórtico quanto de casca com não-linearidade geométrica. Dois casos de carregamento serão tratados, sendo o primeiro a aplicação de uma força cortante distribuída na extremidade livre da viga e o segundo a aplicação de um momento fletor concentrado no nó central da extremidade livre.

No primeiro exemplo, a viga possui comprimento $L = 10\text{m}$ e seção transversal com base $b = 1\text{m}$ e altura $h = 0.1\text{m}$. O material possui módulo de elasticidade $E = 1.2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. Uma malha de 16 elementos foi utilizada na modelagem, com apenas um elemento ao longo da base da viga. A Figura 26 mostra a geometria da viga e sua deformada final.

Figura 26 – Viga com força cortante na extremidade.



FONTE: Sze *et al* (2004)⁷⁴.

Uma carga distribuída $q = 1 \text{ N/m}$ foi aplicada na extremidade da viga, equivalente a uma carga total $P_0 = 1\text{N}$, já que $b = 1\text{m}$. A carga foi então incrementada utilizando Controle de Carga com $\Delta\lambda = 0.2$ em 20 passos, totalizando uma carga final de $P = 4\text{N}$. Os resultados foram extraídos para o nó central da extremidade livre, tanto em termos do deslocamento fora do plano w como do deslocamento u , cujo sinal foi invertido para facilitar a visualização dos resultados. Como a carga foi controlada, uma comparação do erro ponto a ponto foi possível, sendo mostrada nas Tabelas 3 e 4. Já as formas das curvas carga-deslocamento são mostradas na Figura 27.

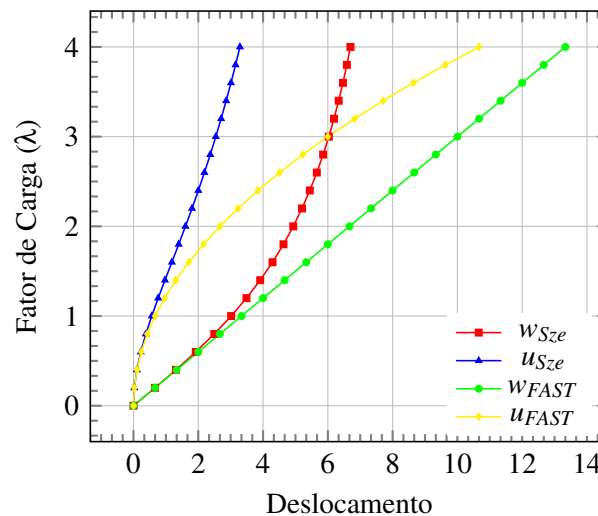
Observando os resultados, nota-se uma grande discrepância entre os resultados obtidos com o elemento de casca implementado e aqueles encontrados na literatura. Os deslocamentos w possuem concordância razoável para cargas baixas, passando a apresentar erros de até 99% com altos valores de carga e comportamento basicamente linear. Já os deslocamentos u , apesar de apresentarem comportamento não-linear, apresentam erros ainda maiores, chegando a até 224% para valores altos de carga.

Tabela 3 – Comparação dos deslocamentos w na viga com força cortante.

λ	FAST	Sze <i>et al</i>	Erro (%)	λ	FAST	Sze <i>et al</i>	Erro (%)
0.2	0.667	0.663	0.56	2.2	7.334	5.202	40.98
0.4	1.333	1.309	1.86	2.4	8.000	5.444	46.96
0.6	2.000	1.922	4.06	2.6	8.667	5.660	53.13
0.8	2.667	2.493	6.97	2.8	9.334	5.855	59.42
1.0	3.334	3.015	10.56	3.0	10.00	6.031	65.82
1.2	4.000	3.488	14.69	3.2	10.67	6.190	72.33
1.4	4.667	3.912	19.30	3.4	11.33	6.335	78.91
1.6	5.334	4.292	24.27	3.6	12.00	6.467	85.57
1.8	6.000	4.631	29.57	3.8	12.67	6.588	92.28
2.0	6.667	4.933	35.15	4.0	13.33	6.698	99.08

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Curvas para a viga com força cortante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tais discrepâncias ilustram os limites de aplicação de um elemento não-linear baseado na hipótese de rotações moderadas, como exige a teoria de von Kármán. Neste exemplo, as rotações já se apresentam elevadas desde o início do caminho de equilíbrio. Portanto, o presente elemento não é capaz de representar bem seu comportamento. É importante, portanto, ter em mente que o elemento baseado na teoria de Marguerre é muito eficiente e de fácil implementação, mas sua aplicabilidade é limitada a estruturas com deslocamentos moderadamente grandes.

O exemplo com carga momento é semelhante ao com força cortante, mas possui um

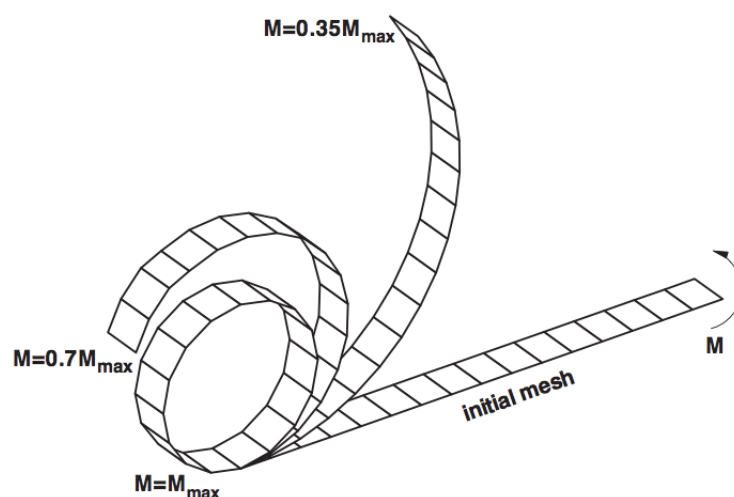
Tabela 4 – Comparação dos deslocamentos u na viga com força cortante.

λ	FAST	Sze <i>et al</i>	Erro (%)	λ	FAST	Sze <i>et al</i>	Erro (%)
0.2	0.027	0.026	2.57	2.2	3.227	1.807	78.58
0.4	0.107	0.103	3.57	2.4	3.840	2.002	91.83
0.6	0.240	0.224	7.15	2.6	4.507	2.190	105.80
0.8	0.427	0.381	12.00	2.8	5.227	2.37	120.56
1.0	0.667	0.563	18.43	3.0	6.001	2.541	136.15
1.2	0.960	0.763	25.83	3.2	6.827	2.705	152.40
1.4	1.307	0.971	34.58	3.4	7.707	2.861	169.40
1.6	1.707	1.184	44.16	3.6	8.641	3.010	187.07
1.8	2.160	1.396	54.74	3.8	9.628	3.151	205.54
2.0	2.667	1.604	66.27	4.0	10.67	3.286	224.64

Fonte: Elaborada pelo autor.

comprimento $L = 12\text{m}$. A mesma malha de 16 elementos (16×1) foi utilizada e um momento concentrado de referência $M_0 = 8.333\text{ Nm}$ foi aplicado no nó central da extremidade livre da viga. Observando a configuração da curva no trabalho de Sze *et al* (2004),⁷⁴ vê-se que não há pontos limites de carga, sendo possível traçar a curva utilizando o Controle de Carga com 20 passos de carga de $\Delta\lambda = 2.618$. A configuração deformada do modelo para vários níveis de carga é mostrada na Figura 28.

Figura 28 – Viga com momento fletor na extremidade.



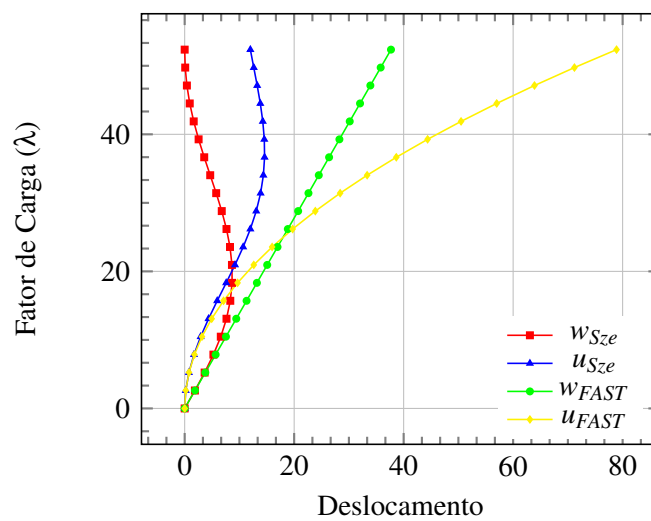
FONTE: Sze *et al* (2004)⁷⁴.

Assim como no caso anterior, o elemento implementado não é capaz de representar corretamente o comportamento não-linear da estrutura, concordando apenas nos trechos iniciais

dos caminhos de equilíbrio (Figura 29). Neste caso, como as curvaturas são ainda maiores, os erros também são mais significativos. Por esse motivo, uma comparação ponto a ponto é dispensável.

Levando em consideração todos os exemplos analisados, os resultados sugerem que o elemento finito de casca abatida foi corretamente formulado e implementado, fornecendo resultados com boa concordância em relação a resultados da literatura quando utilizado dentro das limitações de seu campo de deformações. Quanto à geometria inicial, notou-se que o elemento fornece bons resultados tanto para placas inicialmente perfeitas quanto para cascas abatidas.

Figura 29 – Curvas para a viga com momento fletor.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA

Na presente seção, serão tratados aspectos relacionados ao comportamento de um laminado fora de seu regime elástico. No projeto de estruturas laminadas, torna-se importante a modelagem do comportamento do material tanto no regime elástico, como apresentado no Capítulo 2, quanto após os primeiros indícios de falha, culminando com a determinação de sua capacidade de carga final.

Experimentalmente, nota-se que a falha de uma lâmina não implica que o laminado como um todo não será mais capaz de suportar carga. Na realidade, quando uma lâmina falha, as tensões que ela suportava são redistribuídas para as lâminas remanescentes, provocando uma perda de rigidez no laminado como um todo, mas não significando que ele falhou por completo. Deste modo, torna-se importante avaliar tanto o nível de tensões e o modo pelo qual a falha de uma lâmina isolada se dá, mas também a forma pela qual as tensões são redistribuídas, caracterizando um processo de falha progressiva.

Na análise da falha de uma lâmina isolada, vários critérios de falha podem ser utilizados, cada um fornecendo diferentes envoltórias de falha para o mesmo material. Tais envoltórias geralmente consistem no ajuste de curvas a séries de pontos obtidas experimentalmente e fornecem resultados com precisão variada, dependendo do tipo de laminado e da carga aplicada. Além disso, alguns critérios são capazes de prever o modo pelo qual se dará a falha, auxiliando em um posterior procedimento de degradação. Vários trabalhos abordam os diferentes critérios de falha utilizados em compósitos laminados e discutem suas vantagens e desvantagens.^{31,75-78}

Já na análise com falha progressiva, o objetivo é promover o descarregamento das lâminas que falharam. Para tal, tanto métodos de degradação instantânea, sem uma base física consistente, como métodos baseados na Mecânica do Dano, podem ser usados.^{26,27} Muito embora métodos baseados na Mecânica do Dano, com uma base física mais sólida, sejam os mais indicados para melhor avaliar a progressão da falha, eles exigem o conhecimento de um grande número de parâmetros experimentais de difícil obtenção. Tais parâmetros geralmente não são fornecidos por fabricantes e exigem ensaios de alto custo para sua determinação.²⁷ Assim, na presente dissertação, apenas métodos de degradação instantânea são utilizados, assim como em diversos outros trabalhos relevantes,^{19,28,76,79-84} e sua viabilidade na reprodução de resultados experimentais será avaliada.

Inicialmente, os fatores de resistência de uma lâmina isolada serão mostrados, juntamente com alguns dos critérios utilizados para prever sua falha inicial. Em seguida, algumas estratégias de consideração da falha do laminado como um todo, com e sem progressão de dano, serão discutidas. Então, as abordagens de falha a serem utilizadas na presente dissertação serão mostradas, assim como sua implementação computacional no programa de elementos finitos FAST. Por fim, exemplos numéricos serão apresentados e as formulações propostas e implementadas serão validadas e verificadas com resultados da literatura.

4.1 Falha de Uma Lâmina

Critérios de falha são procedimentos usados para, dado um estado de tensões, avaliar a segurança estrutural e, muitas vezes, o modo pelo qual a falha se daria. No caso de compósitos laminados, tal avaliação utiliza as tensões e deformações no sistema local de cada lâmina. Tais critérios comparam as tensões ou deformações presentes nas lâminas com as devidas tensões ou deformações de ruptura, obtidas por ensaios experimentais.

Para materiais isotrópicos, cujas propriedades mecânicas são iguais em qualquer direção, alguns critérios de falha são amplamente utilizados e proporcionam bons resultados, como o critério de Tresca e o de von Mises utilizados para metais.⁸⁵ Para estes materiais, o critério de falha é definido a partir de um único parâmetro de resistência, representado pela tensão de escoamento.

No caso de materiais compósitos laminados, os parâmetros de resistência de cada lâmina variam conforme a direção de aplicação da tensão. Torna-se necessária, para a definição de critérios de falha em lâminas compósitas, a definição da resistência da mesma a partir de 3 direções principais, assim como são definidas suas propriedades mecânicas.

Há vários critérios de falha utilizados para materiais compósitos, sendo a maioria extensão de critérios bem estabelecidos para materiais isotrópicos, adaptados para lidar com materiais ortotrópicos.^{1,11,39} Eles podem ser classificados quanto à interatividade entre tensões em direções diferentes como:^{39,75}

- a) Critérios não-interativos: Critérios nos quais as tensões em cada direção são consideradas isoladamente, sem interação. Métodos como o da Máxima Tensão e Máxima Deformação são não-interativos;
- b) Critérios interativos: São critérios que buscam analisar as tensões em todas as direções através de um único índice, ao invés de considerá-las separadamente. Geralmente são expressões polinomiais envolvendo termos lineares e quadráticos das tensões, como os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

Além disso, os critérios podem também ser classificados baseado na sua capacidade de indicar explicitamente o modo de falha e a natureza do dano que a lâmina sofrerá.³¹ É importante ressaltar que a previsão do modo de falha pode ser realizada mesmo em critérios que não o fazem explicitamente, mas tais metodologias não são levadas em consideração nesta classificação.

- a) Critérios Independentes do Modo de Falha: Caracteriza-se por um conjunto de curvas ou superfícies no espaço das tensões ou deformações que definem a envoltória de falha da lâmina, mas sem separar uma expressão matemática individual para cada modo. Ex: Máxima Tensão, Máxima Deformação, Tsai-Wu, dentre outros;
- b) Critérios Dependentes do Modo de Falha: São critérios formados por um conjunto de expressões matemáticas geralmente formando uma envoltória de falha

fechada no espaço das tensões ou deformações mas, neste caso, cada expressão representa especificamente um modo de falha. Ex: Hashin, Puck, Lee, LaRC03, dentre outros.^{31,75}

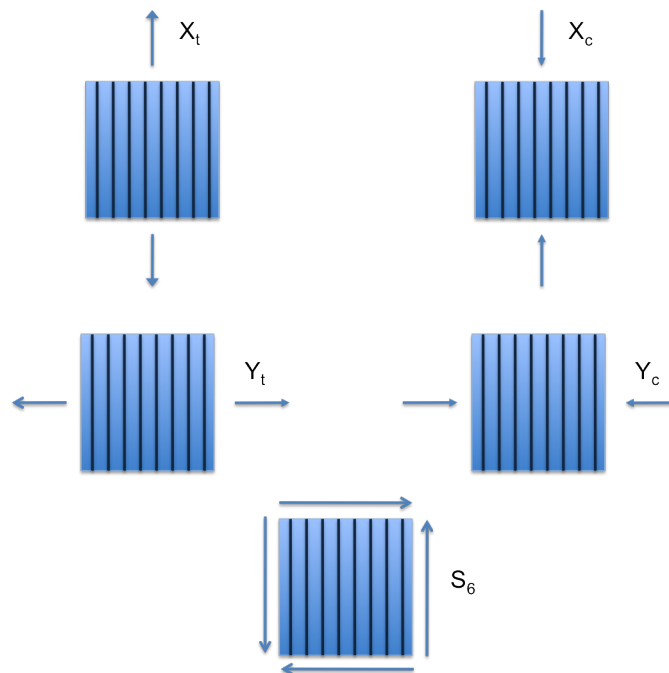
A seguir, os parâmetros de resistência de uma lâmina serão apresentados, seguidos dos critérios de falha básicos da Máxima Tensão e Máxima Deformação. Por fim, os critérios a serem utilizados na presente dissertação, Tsai-Wu e Hashin, serão discutidos.

4.1.1 Parâmetros de Resistência

Para a definição dos critérios de falha, é importante primeiramente definir os parâmetros de resistência a serem considerados. No caso de compósitos, além da diferença de resistência nas direções paralela e perpendicular às fibras, as lâminas apresentam diferentes resistências à tração e compressão. Para problemas bidimensionais (Estado Plano de Tensão) são necessários 5 parâmetros (X_t , X_c , Y_t , Y_c e S_6) para caracterizar a resistência do material. Estes parâmetros são ilustrados na Figura 30.

É importante frisar que o sinal das tensões de cisalhamento não é relevante, visto que tensões positivas ou negativas produzirão as mesmas tensões de tração e compressão em um plano a 45° . No caso tridimensional, o problema é ainda mais complexo, uma vez que é necessária a determinação de 9 resistências: X_t , X_c , Y_t , Y_c , Z_t , Z_c , S_4 , S_5 , S_6 .

Figura 30 – Resistências bidimensionais em uma lâmina.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2 Critério da Máxima Tensão

O critério da máxima tensão foi idealizado para refletir o resultado de ensaios de tensão uniaxiais. Deste modo, sua envoltória é representada por um conjunto de retas formadas pelos pontos obtidos em tais ensaios. Nele, a falha em cada direção do sistema do material é tratada separadamente. A falha da lâmina ocorre, portanto, quando a tensão em uma das direções ultrapassa a respectiva resistência. Sua envoltória de falha para o caso tridimensional é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{cases} X_t & \text{quando } \sigma_1 > 0 \\ X_c & \text{quando } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\ \sigma_2 &= \begin{cases} Y_t & \text{quando } \sigma_2 > 0 \\ Y_c & \text{quando } \sigma_2 < 0 \end{cases} \\ \sigma_3 &= \begin{cases} Z_t & \text{quando } \sigma_3 > 0 \\ Z_c & \text{quando } \sigma_3 < 0 \end{cases} \\ |\tau_{13}| &= S_4 & |\tau_{23}| &= S_5 & |\tau_{12}| &= S_6 \end{aligned} \quad (115)$$

Apesar das expressões anteriores representarem a envoltória de falha, muitas vezes é interessante a obtenção de um Fator de Segurança (FS) que representa quantas vezes a tensão aplicada pode ser aumentada até que se dê a falha. Para o critério da Máxima Tensão, tal fator é calculado como:

$$FS = \min \left(\frac{X_t}{\sigma_1^+}, \frac{-X_c}{\sigma_1^-}, \frac{Y_t}{\sigma_2^+}, \frac{-Y_c}{\sigma_2^-}, \frac{Z_t}{\sigma_3^+}, \frac{-Z_c}{\sigma_3^-}, \frac{S_4}{|\tau_{13}|}, \frac{S_5}{|\tau_{23}|}, \frac{S_6}{|\tau_{12}|} \right) \quad (116)$$

onde os superescritos + e – representam tensões positivas e negativas, respectivamente.

O Critério da Máxima Tensão é intuitivo e de simples implementação, além de possibilitar a diferenciação entre tensões de tração e compressão. Porém, em estados de tensão multi-axiais, devido à interação entre tensões não captada pela envoltória de falha adotada, o critério pode apresentar resultados ruins.

Quanto à identificação do modo de falha, o critério da Máxima Tensão é classificado como independente do modo, pois não contém expressões específicas para cada modo de falha. Porém, por ser simples e avaliar cada direção individualmente, o modo de falha pode ser facilmente estimado.³¹

4.1.3 Critério da Máxima Deformação

Análogo ao Critério da Máxima Tensão, neste critério as deformações em cada direção são tratadas independentemente e a falha ocorre quando pelo menos uma deformação ultrapassa a resistência do material. Em sua forma tridimensional, o critério pode ser escrito

como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{cases} \varepsilon_{1t}'' & \text{quando } \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_{1c}'' & \text{quando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} \varepsilon_{2t}'' & \text{quando } \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_{2c}'' & \text{quando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\ \varepsilon_3 &= \begin{cases} \varepsilon_{3t}'' & \text{quando } \varepsilon_3 > 0 \\ \varepsilon_{3c}'' & \text{quando } \varepsilon_3 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (117)$$

$$|\gamma_{13}| = \gamma_{13}'' \quad |\gamma_{23}| = \gamma_{23}'' \quad |\gamma_{12}| = \gamma_{12}''$$

De modo semelhante ao feito no critério da Máxima Tensão, o Fator de Segurança pode ser calculado como:

$$FS = \min \left(\frac{\varepsilon_{1t}''}{\varepsilon_1^+}, \frac{-\varepsilon_{1c}''}{\varepsilon_1^-}, \frac{\varepsilon_{2t}''}{\varepsilon_2^+}, \frac{-\varepsilon_{2c}''}{\varepsilon_2^-}, \frac{\varepsilon_{3t}''}{\varepsilon_3^+}, \frac{-\varepsilon_{3c}''}{\varepsilon_3^-}, \frac{\gamma_{13}''}{\gamma_{13}}, \frac{\gamma_{23}''}{\gamma_{23}}, \frac{\gamma_{12}''}{\gamma_{12}} \right) \quad (118)$$

e o modo de falha pode ser previsto analisando a deformação à qual corresponde o menor fator de segurança. Porém, assim como no critério anterior, o critério da Máxima Deformação é considerado independente do modo de falha.

Por fim, apesar de ser considerado não-interativo, alguns termos de interação surgem se o critério for escrito em termos de tensões. Tais interações são decorrentes do efeito dos coeficientes de Poisson:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2 - \nu_{13}\sigma_3 &= \begin{cases} X_t & \text{quando } \varepsilon_1 > 0 \\ X_c & \text{quando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\ \sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1 - \nu_{23}\sigma_3 &= \begin{cases} Y_t & \text{quando } \varepsilon_2 > 0 \\ Y_c & \text{quando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\ \sigma_3 - \nu_{32}\sigma_2 - \nu_{31}\sigma_1 &= \begin{cases} Z_t & \text{quando } \varepsilon_3 > 0 \\ Z_c & \text{quando } \varepsilon_3 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (119)$$

$$|\tau_{13}| = S_4 \quad |\tau_{23}| = S_5 \quad |\tau_{12}| = S_6$$

4.1.4 Critério de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu⁸⁶ baseia-se na teoria polinomial de falha proposta por Gol'denblat e Kopnov,⁸⁷ que utiliza tensores baseados nas resistências básicas do material para ponderar os valores das tensões. A forma geral dos critérios de falha polinomiais em notação indicial é:³⁹

$$(f_i \sigma_i)^\alpha + (f_{ij} \sigma_i \sigma_j)^\beta + (f_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k)^\gamma + \dots = 1 \quad (120)$$

onde $i, j, k = 1, \dots, 6$. No critério de Tsai-Wu, os termos de interação cúbicos $f_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k$ são desprezados, resultando em um critério polinomial quadrático ($\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$):

$$f_i\sigma_i + f_{ij}\sigma_i\sigma_j = 1 \quad (121)$$

Na expansão da expressão anterior em três dimensões, os termos envolvendo interação entre tensões normais e cisalhantes são considerados nulos, pois admite-se que tais tensões não interagem. Além disso, considera-se também que tensões de cisalhamento não interagem entre si. Por fim, os termos lineares em cisalhamento são eliminados pois suas resistências não variam com o sinal das tensões. Após tais simplificações, a expressão do critério se torna:

$$\begin{aligned} f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_3\sigma_3 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{33}\sigma_3^2 + f_{44}\tau_{13}^2 + f_{55}\tau_{23}^2 + f_{66}\tau_{12}^2 \\ + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2f_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2f_{23}\sigma_2\sigma_3 = 1 \end{aligned} \quad (122)$$

Os coeficientes f_i e f_{ij} não são dados simplesmente pelos parâmetros de resistência mostrados na Seção 4.1.1, mas sim dados por combinações deles:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}; & f_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}; & f_3 &= \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c}; \\ f_{11} &= \frac{1}{X_t X_c}; & f_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c}; & f_{33} &= \frac{1}{Z_t Z_c}; \\ f_{44} &= \frac{1}{S_4^2}; & f_{55} &= \frac{1}{S_5^2}; & f_{66} &= \frac{1}{S_6^2}; \end{aligned} \quad (123)$$

Os termos de interação biaxiais são de mais difícil obtenção. Uma aproximação utilizada em muitos trabalhos é:^{28,39,75,88}

$$f_{12} = \beta_{12}\sqrt{f_{11}f_{22}}; \quad f_{13} = \beta_{13}\sqrt{f_{11}f_{33}}; \quad f_{23} = \beta_{23}\sqrt{f_{22}f_{33}}; \quad (124)$$

Nas expressões da Eq. (124), os valores de $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}$ variam entre -0.5 e 0 para a maioria dos materiais.⁸⁸ Na presente dissertação, adotou-se o valor de -0.5 para todos eles, tendo sido ajustados experimentalmente por Tsai *et al.*⁸⁸ É importante ressaltar que programas comerciais podem apresentar valores diferentes para tais coeficientes, exigindo cautela por parte do usuário.¹⁵

Devido à sua natureza quadrática, o Fator de Segurança para o critério de Tsai-Wu é a raiz de uma equação do segundo grau:³⁹

$$FS = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \quad (125)$$

onde a e b são dados por:

$$\begin{aligned}
 a &= f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{33}\sigma_3^2 + f_{44}\tau_{13}^2 + f_{55}\tau_{23}^2 + f_{66}\tau_{12}^2 \\
 &+ 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2f_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2f_{23}\sigma_2\sigma_3 \\
 b &= f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_3\sigma_3
 \end{aligned} \tag{126}$$

A natureza da falha não pode ser encontrada diretamente, já que o critério é classificado como independente do modo de falha. Porém, expressões adicionais podem ser utilizadas para determinar qual tensão contribuiu mais para a falha e, com isso, determinar o modo pelo qual ela se dará.^{28,31,89}

4.1.5 Critério de Hashin

O critério de Hashin, diferente do critério de Tsai-Wu, caracteriza-se por ser dependente do modo de falha, isto é, procura descrever os diferentes modos de falha utilizando expressões distintas para cada um deles. Por este motivo e por ser de simples implementação, figura como um dos critérios mais utilizados na análise de laminados com falha progressiva de degradação instantânea.^{26,27,31} O critério foi inicialmente proposto por Hashin e Rotem (1973)⁹⁰ e foi posteriormente modificado no trabalho de Hashin (1980),⁹¹ tomando sua forma atual. Nele, cinco expressões são utilizadas na previsão de falha e, portanto, cinco modos de falha são considerados:^{27,91}

Falha da matriz à tração ($\sigma_2 + \sigma_3 \geq 0$):

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_t} \right)^2 + \frac{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2}{S_6^2} + \frac{\tau_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3}{S_5^2} \geq 1 \tag{127}$$

Falha da matriz à compressão ($\sigma_2 + \sigma_3 \leq 0$):

$$\frac{1}{Y_c} \left[\left(\frac{Y_c}{2S_5} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{4S_5^2} (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{S_5^2} (\tau_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3) + \frac{1}{S_6^2} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) \geq 1 \tag{128}$$

Falha da fibra à tração ($\sigma_1 > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t} \right)^2 + \frac{1}{S_6^2} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) \geq 1 \tag{129}$$

Falha da fibra à compressão ($\sigma_1 < 0$):

$$\left(\frac{|\sigma_1|}{X_c} \right) \geq 1 \tag{130}$$

Falha por cisalhamento fibra-matriz:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_6}\right)^2 \geq 1 \quad (131)$$

Por fim, para obter o fator de segurança para o critério de Hashin, é necessário analisar separadamente cada expressão e determinar seu fator de segurança. Para as expressões com termos quadráticos, o fator de segurança é obtido de maneira semelhante ao realizado no critério de Tsai-Wu. Já para a falha da fibra à compressão, o fator de segurança é simplesmente o inverso da expressão mostrada. O fator resultante será então o menor dos fatores obtidos.

4.2 Falha do Laminado

Os critérios mostrados na seção anterior são capazes de determinar a carga de falha de uma lâmina a partir de seu estado de tensões ou deformações. Após esta carga ser atingida, a lâmina sofrerá algum tipo de falha que pode ou não ser identificada pelo critério utilizado.

No projeto de estruturas laminadas, pode-se optar por finalizar a análise quando ocorrer a falha da primeira lâmina e tomar a carga obtida como a carga final da estrutura. Alternativamente, pode-se continuar a análise aplicando alguma metodologia de falha progressiva.

Experimentalmente, nota-se que cada lâmina apresenta comportamento linear até próximo à falha. Assim, até a falha da primeira lâmina, pode-se conduzir uma análise linear convencional. Porém, após a primeira falha ocorrer, a rigidez total do laminado vai diminuindo, demandando uma atualização da matriz de rigidez da estrutura à medida que a carga aplicada aumenta. De modo geral, quatro diferentes abordagens podem ser adotadas na consideração da falha de um laminado:

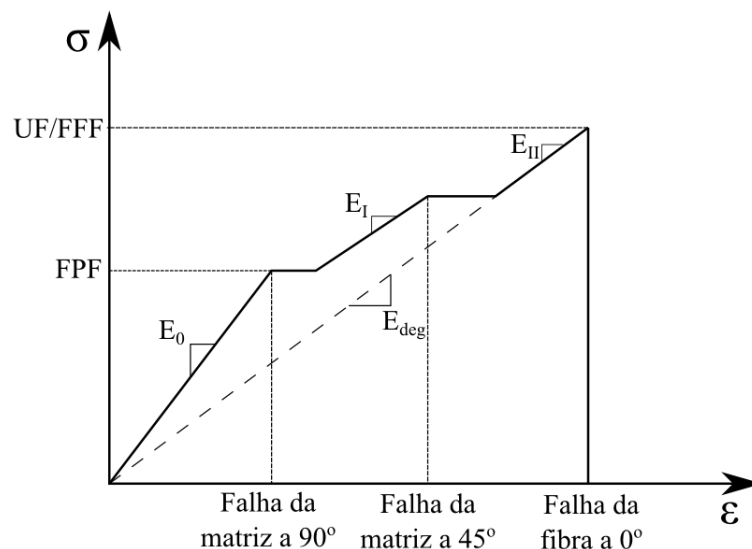
- a) Falha da Primeira Lâmina ou *First Ply Failure* (FPF), na qual considera-se que o laminado falha quando sua primeira lâmina atinge a superfície de falha dada por um critério apropriado. Naturalmente, a capacidade de carga da estrutura é reduzida e os efeitos de redistribuição de tensão são ignorados. Porém, por ser mais conservativa, pode apresentar menores fatores de segurança.
- b) Falha da Primeira Fibra ou *First Fiber Failure* (FFF), onde assim como na abordagem anterior uma análise linear é realizada. Porém, considera-se que o material possui rigidez apenas na direção de suas fibras, isto é, todas as suas constantes elásticas são nulas exceto E_1 . Pode ou não fornecer uma capacidade de carga maior que a falha da primeira lâmina, mas assume que a falha da matriz de todas as lâminas é aceitável em projeto. Como o projetista já assume que tal falha não é prejudicial, os fatores de segurança podem ser comparáveis àqueles da falha da primeira lâmina.
- c) *Análise Combinada FPF/FFF*, que consiste nas duas análises anteriores feitas em conjunto. Inicialmente, encontra-se a carga de FPF com as propriedades não

degradadas. Em seguida, degrada-se todas as propriedades exceto E_I e encontra-se a carga de FFF. Dependendo do tipo de laminado, a carga de FFF pode ser ainda menor que a carga de FPF. Assim, toma-se a maior das cargas obtidas, já que o processo de FPF já é bastante conservador. Novamente, se o valor obtido na análise degradada for tomado, assume-se que falhas na matriz são aceitáveis em projeto.

- d) Falha Progressiva ou *Progressive Failure*, onde alguma metodologia é utilizada para modelar o descarregamento e posterior redistribuição das tensões das lâminas que falham. Como a análise continua após a falha da primeira lâmina, uma maior capacidade de carga, denominada Carga Última ou *Ultimate Failure Load* (UF), é encontrada. Tal estratégia favorece a economia em projeto e permite um conhecimento maior do comportamento mecânico da estrutura estudada. Porém, como mencionado, tal processo é iterativo e, portanto, computacionalmente caro. Além disso, este processo envolve não só a utilização de um critério de falha adequado como também de redução da rigidez das lâminas que falharam. Portanto, além de mais complexo, este processo contém mais incertezas, o que leva ao uso de coeficiente de segurança mais elevados.

A Figura 31 mostra uma curva tensão-deformação de um laminado fictício com lâminas a 0° , 45° e 90° , com predominância de camadas a 0° e uma carga aplicada também a 0° . Nota-se que o comportamento do laminado permanece linear com inclinação E_0 até a falha da primeira lâmina (FPF). Com a degradação da rigidez utilizando um procedimento de falha progressiva, a análise continua, com a obtenção dos trechos de inclinação E_I e E_{II} até que as fibras a 0° falhem, ponto no qual as tensões caem a zero por falta de rigidez (UF).

Figura 31 – Tipos de falha em um laminado fictício.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que, especificamente para este laminado, a carga última (UF) foi igual à

carga obtida em uma análise de falha da primeira fibra (FFF). Tal análise é representada pela reta com inclinação E_{deg} , que possui o mesmo valor de E_{II} , quando todas as falhas de matrizes já haviam ocorrido. Porém, as cargas de FFF e de UF seriam diferentes se houvessem falhas de fibra antes que o laminado atingisse sua capacidade de carga final, isto é, entre as tensões de FPF e UF. Além disso, caso houvesse uma pequena espessura de camadas a 0° , uma análise de FFF forneceria uma carga de falha ainda menor que aquela obtida em uma análise de FPF, ocorrendo quebra de fibras a 90° e 45° por falta de rigidez na direção a 0° , fenômeno que não ocorre em uma análise de falha progressiva completa.

Nota-se, portanto, que os resultados fornecidos por cada tipo de análise dependem do tipo do laminado e dos mecanismos de falha envolvidos. No projeto de estruturas laminadas, uma estratégia de FPF é geralmente a mais utilizada, sendo a mais simples e possuindo uma margem de segurança considerável.⁸⁸ Porém, em alguns casos a reserva de segurança do laminado é muito grande, tornando interessante a realização de uma análise com falha progressiva ou uma análise em dois passos (FPF/FFF), principalmente em aplicações onde a falha da matriz é aceitável.

Na presente dissertação, exemplos de otimização tanto utilizando FPF quanto UF serão tratados. Assim, como a ideia da análise usando FPF já foi estabelecida, os principais conceitos e tipos de análise com falha progressiva serão apresentados nas próximas seções.

4.3 Falha Progressiva

Nesta seção serão discutidas as principais metodologias utilizadas na análise de compósitos laminados com falha progressiva a partir da degradação do material. Inicialmente, uma classificação geral dos métodos de degradação será apresentada, incluindo a escolha do nível no qual a degradação se dará, dos parâmetros a serem degradados e do modo como a degradação é aplicada (brusca ou gradual). Em seguida, a metodologia de aplicação de métodos de degradação bruscos em uma análise utilizando o MEF e o Método de Newton-Raphson será discutida.

A degradação da rigidez das lâminas que falham pode ser realizada utilizando diversas abordagens.^{26,31} Além da escolha de um critério de falha apropriado, como já mencionado, deve-se também decidir em que nível a degradação se dará:³¹

- a) *Nível Micromecânico*: Quando uma lâmina falha, retorna-se ao nível micromecânico, degradando os módulos da fibra e matriz E_f e E_m e posteriormente recalculando as constantes elásticas macromecânicas E_i, ν_{ij}, G_{ij} utilizando a Lei das Misturas ou outra metodologia. É a estratégia com maior complexidade, visto que a matriz e a fibra serão analisadas isoladamente.
- b) *Constantes Elásticas*: Este é o método mais utilizado. Nele, as constantes E_i, ν_{ij}, G_{ij} são diretamente degradadas sem recorrer ao nível micromecânico. As matrizes constitutivas são então recalculadas com as propriedades degradadas.

- c) *Coefficientes Q_{ij}* : Neste método, ao invés de degradar as constantes elásticas, as lâminas são descarregadas degradando diretamente suas matrizes constitutivas no sistema local. É também utilizado em muitos trabalhos, mas pode ocasionar ganhos de rigidez espúrios se as constantes forem resgatadas a partir da matriz constitutiva degradada.

Ressalta-se que em qualquer dos métodos, a lâmina falhada, que pode apresentar descontinuidades, fissuras e quebras, é substituída por um material contínuo e homogêneo de menor rigidez através do processo de degradação de suas propriedades. Tal simplificação é necessária para que se continue utilizando as relações constitutivas mostradas no Capítulo 2.⁸⁸

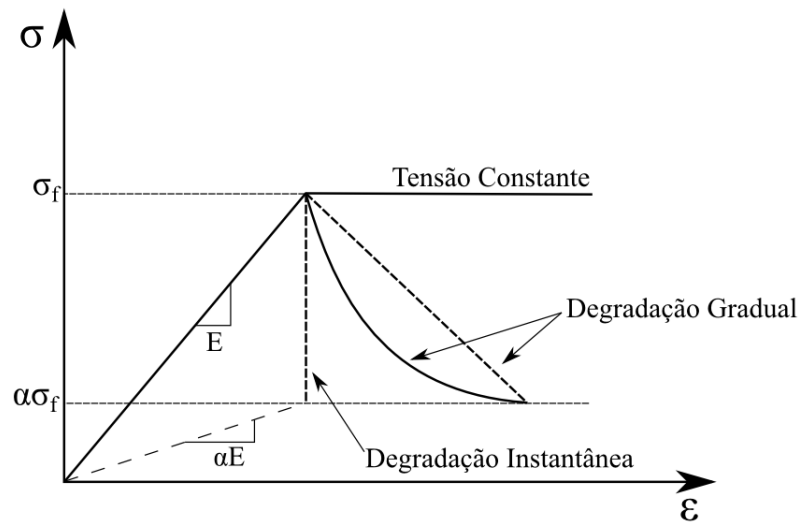
Na presente dissertação, adota-se o método mais simples, que consiste na degradação das constantes elásticas. Decidido o nível da degradação, é necessário decidir quais parâmetros serão degradados para cada tipo de falha:^{26,31,92}

- a) *Eliminação Total da Lâmina (Total Ply Discount)*, no qual todas as propriedades do ponto falhado são degradadas. Tal método foi o primeiro a ser utilizado em falha progressiva e caracteriza-se por ser o mais conservativo. Pode ser utilizado tanto em conjunto com critérios independentes do modo, eliminando a lâmina se uma falha for detectada, como com critérios dependentes quando a falha das fibras é detectada.
- b) *Degradação Não-Interativa*, na qual propriedades isoladas são degradadas dependendo do modo de falha analisado. Assim, em uma falha de matriz, apenas o módulo E_2 seria degradado e em uma falha de fibras, apenas o módulo E_1 . Tal método é um dos mais utilizados por sua simplicidade, mas pode causar inconsistências físicas, como deixar a relação constitutiva assimétrica ou eliminar sua natureza positiva-definida.
- c) *Degradação Interativa*, onde mais de uma propriedade é degradada para cada modo de falha considerado, mas sem adotar uma abordagem de eliminação total. Assim, por exemplo, para a falha das fibras, um modelo interativo poderia degradar tanto E_1 quanto ν_{12} e G_{12} . Este método procura manter certas restrições sobre as constantes elásticas de modo a evitar as inconsistências físicas que ocorrem em modelos não-interativos.

É importante destacar que uma combinação dos três métodos apresentados pode ser utilizada. É possível, por exemplo, utilizar um critério dependente como o de Hashin onde a falha da matriz ocasione uma degradação interativa e a falha das fibras cause uma degradação por eliminação total da lâmina. Por fim, o modo como se dará a degradação pode variar, sendo dividido em três tipos básicos, tensão constante, degradação instantânea e degradação gradual. Os três tipos são mostrados na Figura 32, na qual um fator de degradação α é utilizado.

No primeiro tipo, tensão constante, considera-se que a lâmina falhada é capaz de suportar uma carga igual àquela que ocasionou sua falha até que a falha completa do laminado se dê.²⁶ Nesta estratégia, cujo comportamento é similar ao elasto-plástico perfeito, a degradação

Figura 32 – Tipos de degradação.



FONTE: Adaptado de Sleight (1999)²⁶.

da lâmina não ocasiona seu descarregamento.

Já em processos de degradação instantânea, as propriedades são degradadas instantaneamente para zero ou um valor que depende do fator de degradação (α) utilizado, para todos os modos de falha considerados. Considerando que uma degradação nas constantes elásticas, representadas genericamente por E será realizada, tem-se:

$$E_{novo} = \alpha E_{orig}. \quad (132)$$

e a decisão sobre quais propriedades serão degradadas foi discutida anteriormente e geralmente depende do modo de falha. Dependendo da metodologia utilizada, o mesmo ponto pode falhar mais de uma vez, sendo geralmente uma falha de matriz seguida por uma falha de fibra.^{31,88} Porém, pode-se permitir que o mesmo ponto falhe múltiplas vezes com o mesmo modo de falha, causando um efeito de degradação gradual.^{26,28} Porém, como o dano não é descrito por uma função explícita que caracteriza sua evolução, caracteriza-se tal estratégia ainda como uma degradação instantânea.³¹

Um ponto importante da abordagem de degradação instantânea é que o material nunca deixa de ser linear-elástico, a menos que o comportamento em cisalhamento no plano seja considerado não-linear.³¹ Tal fato permite que o Método de Newton-Raphson seja utilizado apenas quando degradações ocorrem de modo a restabelecer o equilíbrio e seja dispensado nos demais passos de carga. No presente trabalho, porém, como utilizou-se também uma análise não-linear geométrica, tal estratégia não foi usada.

No que diz respeito ao parâmetro α , vários autores adotam valores nulos ou procuram adotar valores próximos de zero, mas não nulos, de modo a evitar problemas de convergência.²⁶ Quando múltiplas falhas são permitidas no mesmo ponto e para o mesmo modo de

falha, é interessante adotar fatores maiores, da ordem de 0.5.²⁸

Obviamente, a adoção de um fator pequeno está à favor da segurança, pois a degradação se dá de modo mais rápido. Por outro lado, o uso de fatores de degradação mais altos pode ser interessante de modo a reproduzir resultados experimentais, nos quais há de fato uma degradação lenta, principalmente na falha da matriz. Porém, em projeto, a utilização de um método com fraca base física como a degradação instantânea já traz muitas fontes de incerteza, motivando o uso de fatores pequenos.

Alternativamente, pode-se utilizar um fator adaptativo, sem a interferência do analista. Pode-se, por exemplo, calcular qual modo de falha contribuiu mais para a falha utilizando o critério de Tsai-Wu e expressões adicionais H_i que calculam a contribuição de cada um dos modos (Equação 138). O fator de degradação pode então ser dado por $\alpha = (1 - H_{i(max)})$. Por fim, pode-se utilizar o mesmo fator para todas as propriedades ou fatores diferentes.³¹

Já nos métodos de Degradação Gradual, as propriedades não são degradadas instantaneamente, mas ao longo da análise, utilizando alguma variável interna para controlar o processo. Deste modo, o fator de degradação α pode ser dado por:

$$\alpha = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \quad (133)$$

onde uma ou mais variáveis internas (ϕ) podem ser utilizadas. É importante mencionar que nos modelos de degradação gradual o material deixa de ser linear-elástico, exigindo o uso de métodos como o de Newton-Raphson mesmo quando uma formulação geometricamente linear é utilizada.

No uso de métodos graduais, muitos autores optaram por promover uma degradação gradual apenas em alguns modos de falha, mantendo degradações instantâneas no restante dos modos.³¹ Dentro destes métodos, duas abordagens principais podem ser identificadas. A primeira delas faz uso de menos variáveis internas, consistindo no uso dos critérios de falha de forma convencional e, a partir da predição de falha, um decaimento geralmente exponencial é aplicado às propriedades, sendo usualmente controlado pela deformação atual do ponto. Um exemplo de tal método é o mostrado no trabalho de Swanson e Christoforou (1987),⁹³ no qual a degradação na matriz é dada por:

$$E_2^d = E_2 e^{0.2(1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_2^u)} \quad (134)$$

onde ε_2^u é a deformação de ruptura da lâmina na direção 2.

A outra abordagem disponível faz uso de conhecimentos da Mecânica do Dano, muitas vezes utilizando princípios da Termodinâmica de Processos Irreversíveis, para formular tensores de dano \mathbf{D} que descrevem a progressão da falha. Porém, tais métodos exigem um grande número de variáveis internas que, como mencionado, são de difícil obtenção. Além disso, os critérios de falha utilizados devem ser reescritos em função das variáveis internas, deixando o processo ainda mais complexo.³¹

Nota-se que os processos graduais possuem uma base física mais forte e são menos passíveis de causar problemas numéricos já que a degradação não é feita de forma brusca. Porém, o grande número de variáveis internas necessário e a complexidade na formulação fazem com que os métodos de degradação instantânea, foco desta dissertação, sejam os mais utilizados em trabalhos da literatura e também em projeto.^{27,31,94}

A metodologia básica de uma análise de falha progressiva com degradação brusca utilizando Elementos Finitos e o Método de Newton-Raphson é mostrada na Figura 33. Iniciando com a estrutura descarregada, aplica-se o primeiro passo de carga e calcula-se a matriz \mathbf{C}_t . Tal cálculo é realizado a partir da integração da rigidez das lâminas na espessura do elemento, como mostrado na Seção 2.3.2. Na consideração da falha progressiva, tal integração foi feita numericamente, utilizando a Regra de Lobatto de 3 pontos, cujos pesos e coordenadas são mostradas na Tabela 5. A escolha do número de pontos foi feita de modo a considerar os dois pontos extremos de cada lâmina, além de seu centro, o que não é possível utilizando a Regra de Gauss. O uso de integração numérica permite que dentro de uma mesma lâmina, alguns pontos estejam falhados e outros não.

Tabela 5 – Regra de integração de Lobatto com 3 pontos.

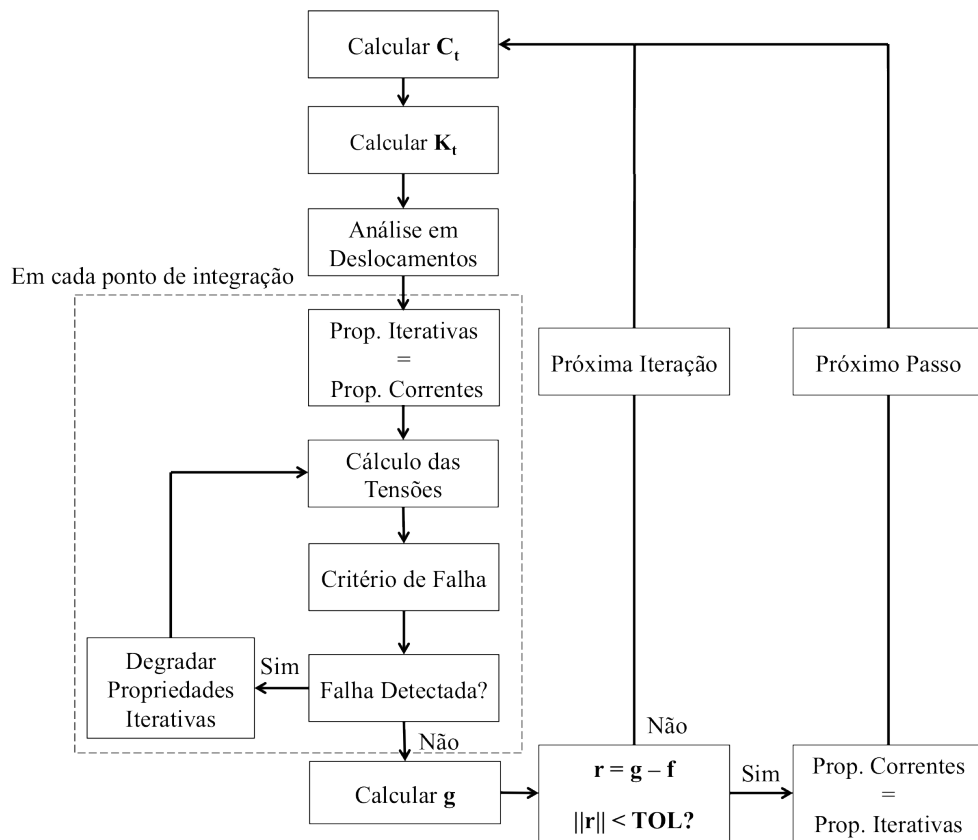
Coordenada (P)	Peso (W)
-1	$1/3$
0	$4/3$
1	$1/3$

FONTE: Crisfield (1991).³⁰

Com a matriz constitutiva tangente, a matriz \mathbf{K}_t é avaliada e os deslocamentos são encontrados. É importante ressaltar que a falha progressiva pode ser utilizada com ou sem a consideração da não-linearidade geométrica. Caso só a falha seja considerada, a matriz \mathbf{K}_t dependerá dos deslocamentos exclusivamente devido à matriz \mathbf{C}_t . Assim, o algoritmo de resolução global (*solver*) utilizado é o mesmo para qualquer tipo de não-linearidade considerada. A partir dos deslocamentos, as tensões no sistema local de cada ponto de integração na espessura são calculadas.

Com as tensões, o critério de falha é avaliado. Se uma falha for detectada, ocorre uma degradação fictícia que vale apenas durante a iteração atual. As tensões são então calculadas novamente com as propriedades degradadas e o critério é novamente checado. Tal processo se repete até que nenhuma falha seja detectada. As tensões são então usadas para avaliar o vetor de cargas internas \mathbf{g} e checar o equilíbrio com as cargas externas \mathbf{f} . Se a estrutura não estiver em equilíbrio, correções iterativas na carga e deslocamentos são aplicadas (Seção 3.5) e a matriz \mathbf{C}_t é recalculada. Antes das tensões serem novamente avaliadas, o estado do material retorna ao do último ponto convergido, isto é, quaisquer degradações a mais em relação às presentes no

Figura 33 – Falha progressiva utilizando o MEF e o Método de Newton-Raphson.



Fonte: Elaborada pelo autor.

último ponto em equilíbrio são descartadas.³⁰

Assim, trabalha-se com dois conjuntos de propriedades do material (Figura 33). As propriedades correntes são aquelas relativas ao último ponto em equilíbrio da curva carga-deslocamento. Já as propriedades iterativas podem ser degradadas múltiplas vezes a cada iteração. Como apenas o ponto obtido na última iteração realmente representa uma situação de equilíbrio, somente nele as propriedades correntes podem ser degradadas.

O processo continua até que a estrutura se equilibre. Neste ponto, se houver alguma degradação fictícia (da última iteração), ela é efetivamente aplicada ao material e inicia-se um novo passo do Método de Newton-Raphson. Tal processo continua até que o número de passos estipulado seja executado ou até que a análise iterativa não convirja, seja por falta de rigidez do material ou pela ocorrência de um ponto limite.

Por fim, para determinar a capacidade de carga final do laminado, várias metodologias podem ser usadas. Quando o Método do Controle de Deslocamento ou o Método do Comprimento de Arco são utilizados, geralmente ocorre um descarregamento na estrutura e um pico de carga pode ser identificado, representando a capacidade de carga. Já quando o Controle de Carga é usado, geralmente são obtidos níveis muito altos de deslocamento sem aumentos significativos de carga, também identificando a capacidade de carga final. Por fim, pode-se adotar outro critério, como tomar a carga referente a um certo nível de deslocamentos admissível

em projeto.

4.4 Modelos de Degradação Instantânea

Os principais métodos de falha progressiva por degradação de propriedades mecânicas foram apresentados na seção anterior. Nesta seção, os três modelos de degradação instantânea utilizados nesta dissertação serão discutidos, com a definição do critério de falha, propriedades a serem degradadas em cada modo e fatores de degradação.

4.4.1 Critério de Hashin com Múltiplas Degradações

O primeiro modelo se baseia no critério de Hashin, isto é, um critério dependente do modo. Como o modo de falha pode ser prontamente identificado, a escolha das propriedades a serem degradadas é simplificada. O esquema de degradação deste modelo é baseado naqueles propostos por Sleight (1999)²⁶ e Pietropaoli (2012),²⁷ mas algumas modificações foram realizadas.

Para a *falha da matriz*, considerou-se que tanto o comportamento no plano quanto o fora do plano foram afetados, visto que não existem expressões específicas para a falha por cisalhamento fora do plano. Além disso, aplicaram-se tais degradações tanto para a falha por tração quanto por compressão:

$$\begin{aligned} E_{2(d)} &= \alpha E_2 & G_{12(d)} &= \alpha G_{12} & G_{13(d)} &= \alpha G_{13} & G_{23(d)} &= \alpha G_{23} \\ \nu_{12(d)} &= \alpha \nu_{12} & \nu_{13(d)} &= \alpha \nu_{13} & \nu_{23(d)} &= \alpha \nu_{23} \end{aligned} \quad (135)$$

Já para a *falha das fibras*, adotou-se uma abordagem de eliminação de lâmina, isto é, todas as propriedades foram degradadas. Assim como na falha da matriz, as degradações são as mesmas tanto para tração quanto compressão:

$$\begin{aligned} E_{1(d)} &= \alpha E_1 & E_{2(d)} &= \alpha E_2 & G_{12(d)} &= \alpha G_{12} & G_{13(d)} &= \alpha G_{13} \\ G_{23(d)} &= \alpha G_{23} & \nu_{12(d)} &= \alpha \nu_{12} & \nu_{13(d)} &= \alpha \nu_{13} & \nu_{23(d)} &= \alpha \nu_{23} \end{aligned} \quad (136)$$

Por fim, definiu-se também a falha por *cisalhamento fibra-matriz* no plano, onde desta vez apenas as propriedades no plano foram degradadas:

$$E_{2(d)} = \alpha E_2 \quad G_{12(d)} = \alpha G_{12} \quad \nu_{12(d)} = \alpha \nu_{12} \quad (137)$$

Seguindo o modelo proposto por Sleight (1999),²⁶ foi permitido que o mesmo ponto falhasse múltiplas vezes para o mesmo modo de falha. Assim, como discutido anteriormente, valores altos de α podem ser utilizados para simular uma degradação gradual. Alternativamente, valores baixos podem ser escolhidos de modo a favorecer a segurança na análise.

4.4.2 Critério de Tsai-Wu com Degradação Única

O segundo modelo considerado se baseia no critério de Tsai-Wu. Como tal critério é independente do modo, ele não é capaz de prever diretamente o modo de falha. Assim, na ocasião da falha, cinco fatores são calculados de modo a avaliar a contribuição de cada modo de falha, baseado no trabalho de Engelstad (1992):⁸⁹

$$\begin{aligned}
 H_1 &= f_1\sigma_1 + f_{11}\sigma_1^2 \Rightarrow \text{Falha da fibra} \\
 H_2 &= f_2\sigma_2 + f_{22}\sigma_2^2 \Rightarrow \text{Falha da matriz} \\
 H_4 &= f_{44}\tau_{13}^2 \Rightarrow \text{Falha por cisalhamento transversal na direção 13} \\
 H_5 &= f_{55}\tau_{23}^2 \Rightarrow \text{Falha por cisalhamento transversal na direção 23} \\
 H_6 &= f_{66}\tau_{12}^2 \Rightarrow \text{Falha por cisalhamento fibra-matriz no plano}
 \end{aligned} \tag{138}$$

e o modo de falha é determinado a partir do fator que possuir o maior valor.

Nota-se que neste caso foi possível separar a falha da matriz no plano das falhas transversais, o que não foi possível utilizando o critério de Hashin. Na degradação, a estratégia adotada por Engelstad (1992) foi não-interativa, isto é, com degradação apenas da propriedade referente à direção de falha.⁸⁹ Neste trabalho optou-se por adotar expressões interativas, mas com menos interações que aquelas mostradas no modelo usando o Critério de Hashin. Ressalta-se que as degradações são consideradas iguais tanto na tração quanto na compressão.

Para a *falha das fibras*, novamente adotou-se o esquema de eliminação de lâmina, com a degradação de todas as propriedades:

$$\begin{aligned}
 E_{1(d)} &= \alpha E_1 & E_{2(d)} &= \alpha E_2 & G_{12(d)} &= \alpha G_{12} & G_{13(d)} &= \alpha G_{13} \\
 G_{23(d)} &= \alpha G_{23} & \nu_{12(d)} &= \alpha \nu_{12} & \nu_{13(d)} &= \alpha \nu_{13} & \nu_{23(d)} &= \alpha \nu_{23}
 \end{aligned} \tag{139}$$

enquanto que na *falha da matriz*, menos termos de interação foram considerados neste caso:

$$E_{2(d)} = \alpha E_2 \quad G_{12(d)} = \alpha G_{12} \quad \nu_{12(d)} = \alpha \nu_{12} \tag{140}$$

Para a falha por *cisalhamento fibra-matriz*, adotou-se a mesma degradação para o caso da falha da matriz. Por fim, para a falha por *cisalhamento transversal* no plano 13, a degradação foi:

$$G_{13(d)} = \alpha G_{13} \quad \nu_{13(d)} = \alpha \nu_{13} \tag{141}$$

e para a falha no plano 23:

$$G_{23(d)} = \alpha G_{23} \quad \nu_{23(d)} = \alpha \nu_{23} \tag{142}$$

Neste caso, ao contrário do que se considerou no modelo anterior, somente uma

falha por ponto é permitida para o mesmo modo. Assim, quando for utilizado, este modelo apresentará sempre valores baixos para o fator de degradação α .

4.4.3 Modelo de Tsai

O último dos modelos implementados no presente trabalho também é baseado no critério de Tsai-Wu, mas desta vez segue o esquema de falha progressiva proposto por Tsai *et al* (2002).^{88,95} Tal critério foi um dos mais bem colocados no WWFE (*Worldwide Failure Exercise*), no qual vários autores propuseram critérios de FPF e falha progressiva e os utilizaram para analisar os mesmos exemplos com resultados experimentais disponíveis para comparação.⁷⁶⁻⁷⁸ É importante ressaltar que o presente modelo foi formulado em termos bidimensionais em seu trabalho original. Foi, portanto, realizada sua expansão para três dimensões.

No modelo de Tsai, definem-se dois estados básicos para um ponto em uma lâmina. No primeiro, denominado *Estado Intacto*, o material possui sua rigidez e resistência original. Já no segundo estado, denominado *Estado Degradado* e representado pelo superescrito d , considera-se obrigatoriamente que ocorreu uma falha de matriz e o material saturado com fissuras é substituído por um contínuo equivalente com rigidez degradada. Além disso, nesse estado, a resistência à compressão das fibras e os termos de interação biaxiais também são afetados devido à falha da matriz. Após uma segunda falha no estado degradado, considera-se que o ponto falhou por completo.

Assim, neste modelo, cada ponto pode falhar duas vezes, sendo a primeira obrigatoriamente uma falha de matriz e a segunda uma falha de fibra. Elimina-se portanto a necessidade de definir o modo de falha utilizando os fatores H_i da Eq. (138). A degradação da primeira falha é dada por:

$$\begin{aligned} E_2^d &= \alpha_m E_2 & G_{12}^d &= \alpha_m G_{12} & G_{13}^d &= \alpha_m G_{13} & G_{23}^d &= \alpha_m G_{23} \\ V_{12}^d &= \alpha_m V_{12} & V_{13}^d &= \alpha_m V_{13} & V_{23}^d &= \alpha_m V_{23} \end{aligned} \quad (143)$$

onde $\alpha_m = 0.08$, ajustado utilizando os resultados experimentais do WWFE.^{76,88} Além disso, como mencionado, os coeficientes de interação biaxiais também são degradados:

$$\beta_{12}^d = \alpha_m \beta_{12} \quad \beta_{13}^d = \alpha_m \beta_{13} \quad \beta_{23}^d = \alpha_m \beta_{23} \quad (144)$$

No estado degradado, considera-se também uma redução na resistência à compressão das fibras, dada por:^{88,95}

$$X_c^d = X_c \left(\frac{E_2^d}{E_2} \right)^n \quad (145)$$

onde $n = 0.1$ é um fator de degradação exponencial.

Caso uma nova falha ocorra durante o estado degradado, define-se um *Estado de*

Falha, representado pelo superescrito f , no qual novas degradações são feitas, desta vez utilizando uma abordagem de eliminação de lâmina:

$$\begin{aligned} E_1^f &= \alpha_f E_1 & E_2^f &= \alpha_f E_2^d & G_{12}^f &= \alpha_f G_{12}^d & G_{13}^f &= \alpha_f G_{13}^d \\ G_{23}^f &= \alpha_f G_{23}^d & v_{12}^f &= \alpha_f v_{12}^d & v_{13}^f &= \alpha_f v_{13}^d & v_{23}^f &= \alpha_f v_{23}^d \end{aligned} \quad (146)$$

onde $\alpha_f = 0.01$. Nota-se que as duas etapas de degradação são combinadas, com a aplicação sucessiva de α_m e α_f . Novamente, os termos de interação biaxiais são degradados:

$$\beta_{12}^f = \alpha_f \beta_{12}^d \quad \beta_{13}^f = \alpha_m \beta_{13}^d \quad \beta_{23}^f = \alpha_m \beta_{23}^d \quad (147)$$

O modelo de Tsai possui, portanto, três diferentes fatores de degradação, cujos valores foram ajustados para $\alpha_m = 0.08$, $\alpha_f = 0.01$ e $n = 0.1$.

4.5 Implementação Computacional

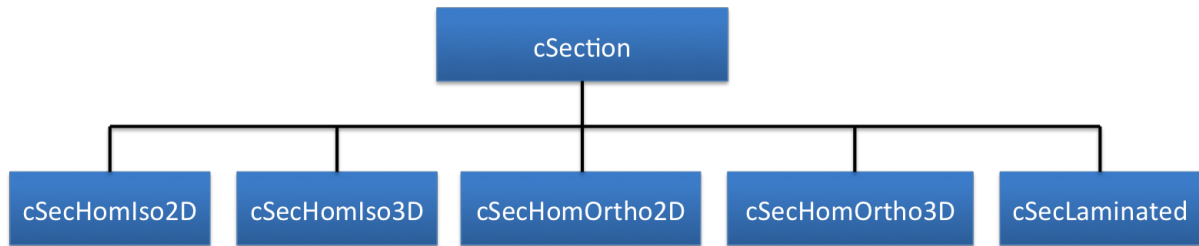
As metodologias de falha apresentadas foram implementadas no programa FAST, cuja estrutura geral de classes é mostrada na Seção 3.6.1. Originalmente, as integrais na espessura da placa tanto para o cálculo das tensões (Equação 34) quanto para a matriz constitutiva \mathbf{C} (Equação 37) eram feitas analiticamente. Assim, para cada ponto de Gauss no plano ($x - y$), apenas um objeto da classe *cConstModel* era criado e a matriz \mathbf{C} pré-integrada era diretamente implementada na classe *cAnModel* da casca abatida laminada.

Para considerar a falha progressiva, é necessário fazer uma integração durante a análise, com a utilização de pontos de integração também na espessura da casca. Como mencionado anteriormente, as integrações na espessura são realizadas utilizando a Regra de Lobatto com 3 pontos, cujas coordenadas e pesos são mostrados na Tabela 5. Para isso, foi necessário modificar a criação dos modelos constitutivos, antes feitos diretamente pela classe de elementos paramétricos *cElmParam*, e criar o conceito de seção, representado pelas classes *cSection* e *cSecAnalysis*.

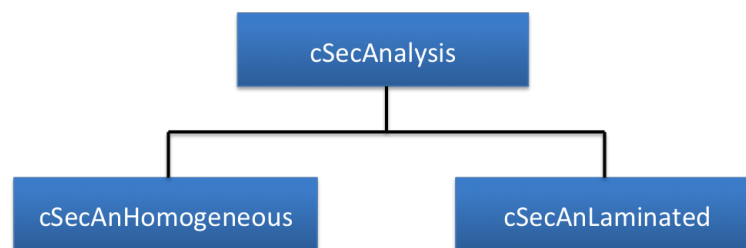
A nova classe *cSection*, cuja estrutura é mostrada na Figura 34, é basicamente uma classe de armazenamento. Para seções homogêneas e isotrópicas, ela armazena o material e a espessura da mesma, se esta for bidimensional. Já para seções ortotrópicas, ela armazena o material, espessura e os cossenos diretores de orientação do material (Equação 6). Por fim, para seções laminadas, a classe armazena o esquema de laminação da mesma, com o número de lâminas e a espessura, ângulo e material de cada uma delas.

Já a classe *cSecAnalysis*, que possui a estrutura mostrada na Figura 35, é responsável pelas possíveis integrações na seção. Assim, um objeto dela é criado para cada ponto de Gauss no plano. Dependendo então do tipo da seção, pontos de integração adicionais na espessura podem ser criados.

Para seções homogêneas, apenas um modelo constitutivo é criado e nenhuma in-

Figura 34 – Estrutura da classe *cSection*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Estrutura da classe *cSecAnalysis*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

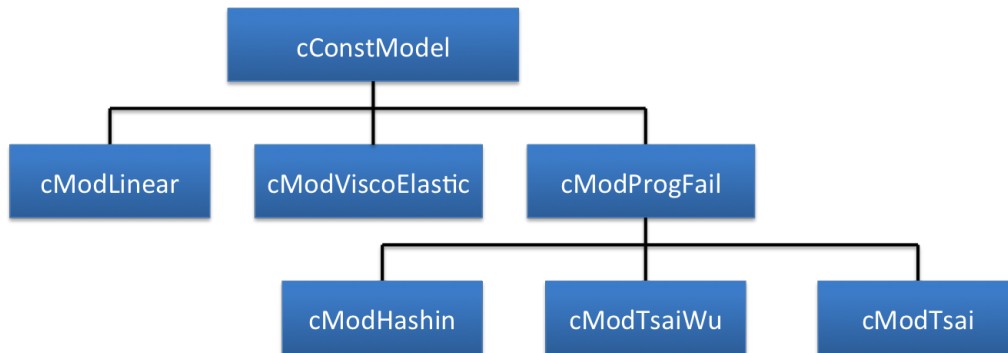
tegração numérica adicional é feita. Já para seções laminadas, três pontos de integração e, portanto, três modelos constitutivos são criados para cada lâmina. Assim, cada modelo constitutivo criado é independente e pode representar um ponto intacto ou degradado do interior de uma lâmina. Ressalta-se que o modelo constitutivo trabalha agora apenas no sistema local do material. Portanto, a matriz constitutiva pré-integrada anteriormente presente no modelo de análise de casca laminada abatida foi substituída pela matriz de uma lâmina no sistema local (Equação 30).

Além da criação das duas classes supracitadas, novos tipos de material foram criados, tendo em vista que é necessário fazer a leitura também dos fatores de degradação (Seção 4.4). Associados aos novos materiais, novos modelos constitutivos foram também implementados. A estrutura atual da classe *cConstModel* é apresentada na Figura 36, que possui forma semelhante à estrutura da classe *cMaterial*.

O modelo constitutivo possui três tarefas básicas. A primeira delas é retornar a matriz constitutiva no sistema local, obtida do modelo de análise, para que a classe *cSecAnalysis* a utilize nas integrações. A segunda é o cálculo das tensões no sistema local a partir das deformações locais, sendo então retornadas para a classe de análise realizar as integrações. A última tarefa é o cálculo do critério de falha e a degradação das propriedades. Como mencionado anteriormente, a degradação pode ser fictícia quando o ponto ainda não se encontra em equilíbrio ou real, quando a degradação da última iteração é efetivamente aplicada.³⁰

O procedimento para integrar as tensões e obter os esforços internos na seção é mostrado na Figura 37. O ponto onde as possíveis degradações são consideradas é o da obtenção

Figura 36 – Estrutura da classe *cConstModel*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

das tensões locais vindas do modelo constitutivo. Assim, se o ponto falhar, suas propriedades elásticas serão degradadas e a tensão calculada terá um valor bem mais baixo, o que ocasiona uma redistribuição da carga para outros pontos da lâmina. Por fim, o algoritmo para obtenção da Matriz Constitutiva Tangente \mathbf{C}_t é mostrado na Figura 38. Neste caso, o efeito da degradação vem da obtenção da matriz \mathbf{Q} do modelo constitutivo.

4.6 Exemplos Numéricos

Nesta seção, as metodologias de falha progressiva implementadas serão validadas e verificadas através da análise de estruturas laminadas procurando determinar tanto a carga de falha da primeira lâmina (FPF) quanto a capacidade de carga final (UF). Além disso, um breve estudo sobre a metodologia da falha da primeira fibra (FFF) também será realizado.

Três exemplos serão apresentados. Inicia-se com uma chapa sujeita a um estado de tensões uniaxial constante e condições de contorno simples. O objetivo é, portanto, avaliar o funcionamento das metodologias no cenário mais simples possível. No segundo exemplo, cargas de flexão serão analisadas, ocasionando um estado de tensões mais complexo que varia tanto no plano quanto na espessura da placa. Avalia-se assim tanto os métodos de degradação quanto a metodologia de integração das tensões e relações constitutivas. Por fim, o exemplo de casca abatida tratado na Seção 3.7.2 será analisado levando em consideração também a não-linearidade geométrica.

4.6.1 Chapa Tractionada

O primeiro exemplo trata da modelagem de uma chapa laminada ensaiada à tração constante. Os resultados foram extraídos do artigo de Reddy *et al* (1995), onde estão disponíveis tanto resultados numéricos quanto experimentais. A geometria e condições de contorno do problema são mostradas na Figura 39, onde os deslocamentos transversais foram fixados em todos os bordos e o deslocamento v foi fixado somente em um ponto de modo a evitar deslocamentos

Figura 37 – Algoritmo de integração das tensões na espessura.

```

Obter o esquema de laminação da classe cSection;
Obter a espessura total do laminado e fazer  $z_b = -h_t/2.0$ ;
para Cada lâmina i com espessura  $t_i$  faça
    Calcular a Matriz T;
    Fazer  $z_t = z_b + t_i$ ;
    para Cada ponto de integração k na lâmina faça
         $z = (z_b + z_t)/2.0 + P_k(z_t - z_b)/2.0$ ;
        Calcular as deformações no ponto:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\kappa}$ ;
        Transformar para o sistema local:  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}$ ;
        Calcular as tensões locais  $\boldsymbol{\sigma}_1$  no Modelo
        Constitutivo;
        Transformar para o sistema global:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T\boldsymbol{\sigma}_1$ ;
         $\mathbf{N} += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ;
         $\mathbf{M} += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot z \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ;
         $\mathbf{Q} += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot k_s \cdot \boldsymbol{\gamma}$ ;
    fim
     $z_b = z_t$ ;
fim

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 – Algoritmo de integração da matriz constitutiva \mathbf{C}_t .

```

Obter o esquema de laminação da classe cSection;
Obter a espessura total do laminado e fazer  $z_b = -h_t/2.0$ ;
para Cada lâmina i com espessura  $t_i$  faça
    Calcular a Matriz T;
    Fazer  $z_t = z_b + t_i$ ;
    para Cada ponto de integração k na lâmina faça
         $z = (z_b + z_t)/2.0 + P_k(z_t - z_b)/2.0$ ;
        Obter a matriz Q do Modelo Constitutivo;
        Obter a matriz no sistema global:  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^T\mathbf{Q}\mathbf{T}$ ;
         $\mathbf{A}_t += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot \bar{\mathbf{Q}}$ ;
         $\mathbf{B}_t += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot z \cdot \bar{\mathbf{Q}}$ ;
         $\mathbf{D}_t += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot z^2 \cdot \bar{\mathbf{Q}}$ ;
         $\mathbf{G}_t += 0.5 \cdot t_i \cdot W_k \cdot k_s \cdot \bar{\mathbf{Q}}_s$ ;
    fim
     $z_b = z_t$ ;
fim

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

de corpo rígido.

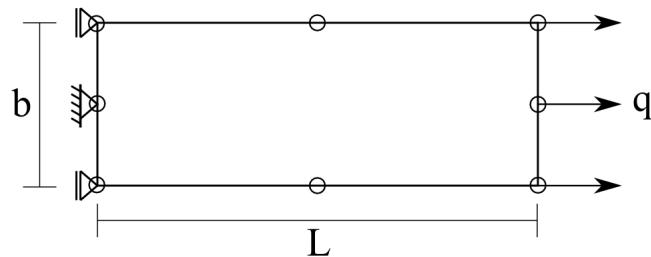
A chapa apresenta comprimento $L = 3''$ (0.0762m) e largura igual a $b = 1''$ (0.0254m) ou $b = 1.25''$ (0.03175m), dependendo da laminação utilizada. A espessura das lâminas é constante e igual a $t_{ply} = 0.0052''$ (0.132mm). Para analisar as diferenças na carga última com a variação na laminação, três esquemas (L1, L2, L3) com diferentes percentuais de fibras a 0° , $\pm 45^\circ$ e 90° foram utilizados (Tabela 6).

Tabela 6 – Laminações consideradas para o exemplo de chapa tracionada.

Exemplo	Laminação	% $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$	Largura (b)
L1	$[45^\circ/90^\circ/135^\circ/0^\circ]_{3s}$	25/50/25	0.0254m
L2	$[45^\circ/90^\circ/135^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/135^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ]_s$	58/33/8	0.0254m
L3	$[45^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/135^\circ/0^\circ/45^\circ/135^\circ/45^\circ/135^\circ]_s$	10/80/10	0.03175m

FONTE: Adaptado de Reddy *et al* (1995).²⁸

Figura 39 – Geometria e condições de contorno da chapa tracionada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o estado de tensão neste caso é constante tanto no plano quanto na espessura, apenas um elemento de casca abatida Q8 foi usado considerando integração completa de modo a evitar modos de deformação espúrios. De modo a comparar os resultados com aqueles mostrados por Reddy *et al*,²⁸ uma carga distribuída constante $q = 140.09N/m$ para $b = 1.25''$ ou $q = 175.12$ para $b = 1.00''$, equivalente a uma força total de $1lb$, foi aplicada como carga de referência. As constantes elásticas do material utilizado nas análises são apresentadas na Tabela 7.

Como estratégia de degradação, três variações foram consideradas. A primeira utiliza o método baseado no critério de Hashin (Seção 4.4.1) com $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$, caracterizando uma metodologia conservadora na qual todo o dano é aplicado de uma só vez. A segunda estratégia utiliza o mesmo critério mas com $\alpha = 0.5$, de modo a simular o aumento gradual do dano. Por fim, aplica-se também o modelo de Tsai (Seção 4.4.3). Em todos os casos, o método do Controle de Carga foi utilizado para traçar os caminhos carga-deslocamento e a falha final foi identificada quando a matriz de rigidez se tornou singular ou quando a variação de deslocamento entre dois passos foi excessivamente grande.

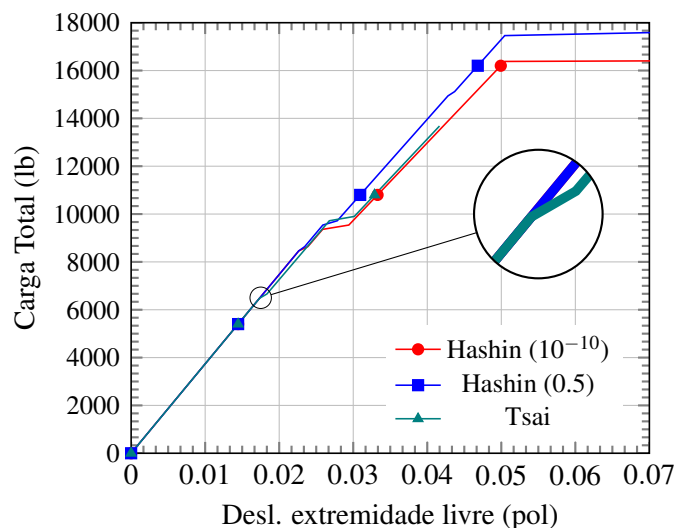
Tabela 7 – Propriedades do material.

E_1 (GPa)	161.32
$E_2 = E_3$ (GPa)	9.65
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.34
ν_{23}	0.49
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	5.99
G_{23} (GPa)	3.38
X_t (MPa)	2709.34
X_c (MPa)	1075.46
$Y_t = Z_t$ (MPa)	64.53
$Y_c = Z_c$ (MPa)	258.52
$S_6 = S_5 = S_4$ (MPa)	83.06

FONTE: Reddy *et al* (1995).²⁸

Os resultados para a laminação L1 são mostrados na Figura 40 e as cargas de falha da primeira lâmina (FPF) e final (UF) na Tabela 8. Os deslocamentos utilizados para traçar os gráficos foram os do nó central da face carregada da chapa. A falha neste caso consistiu inicialmente em falhas de matriz por tração, seguida de falhas nas fibras também por tração juntamente com falhas por cisalhamento no plano.

Figura 40 – Resultados para a Laminação L1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se uma diferença significativa no valor da carga última (UF) prevista por cada um dos métodos. Como esperado, uma maior carga última é encontrada quando se utiliza o método baseado no critério de Hashin com $\alpha = 0.5$, visto que a degradação é aplicada mais

lentamente. Já para $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$, a carga última obtida foi 12% menor. É interessante observar, porém, que a carga última se aproximou mais daquela obtida experimentalmente quando $\alpha = 0.5$, com erro de apenas -0.11% , comparado com um erro de -6.89% obtido com α menor. Isso sugere que na prática o dano realmente se dá de forma suave, fenômeno que um método de degradação brusca não consegue captar.

Tabela 8 – Resultados para o Laminado L1.

Método	FPF (lb)	UF (lb)	UF Exp. (lb)	Erro(%)
Hashin (10^{-10})	8460	16500	17720	-6.89
Hashin (0.5)	8460	17700	17720	-0.11
Tsai	6660	13860	17720	-21.78

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já o método de Tsai obteve uma carga 21.78% menor que a obtida experimentalmente, sendo o mais conservativo dos três métodos para este caso. Nota-se, porém, que mesmo o valor da falha da primeira lâmina (FPF) foi menor para o método de Tsai, como mostrado no detalhe ampliado no gráfico da Figura 40. Deste modo, ressalta-se que a própria escolha do critério já causou uma diferença nas cargas obtidas, como era esperado.

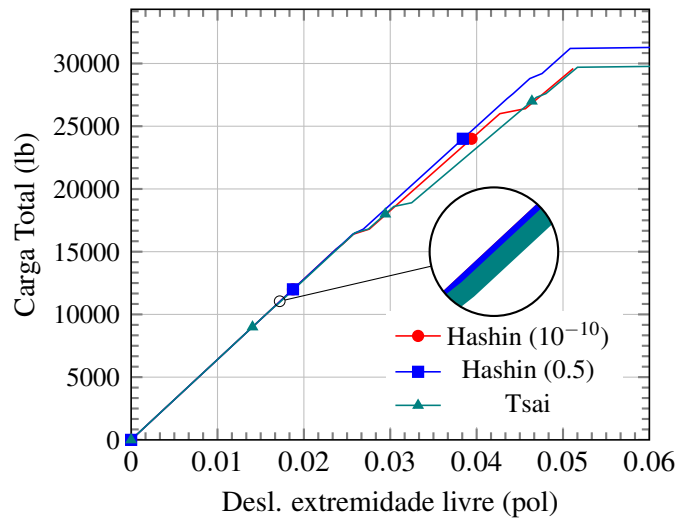
De modo geral, comparando a forma dos gráficos com os encontrados por Reddy *et al* (1995),²⁸ vê-se que o comportamento obtido é similar. Porém, os valores de carga última obtidas no presente trabalho para $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$ são maiores que os obtidos pelos autores, discrepância que pode ser justificada pela diferença entre os critérios de falha e elementos finitos utilizados. Ressalta-se que o objetivo final de qualquer metodologia de análise de falha é a concordância com os resultados experimentais e a presente formulação obteve bons resultados (Tabela 8) para ambos os valores de α , fato que não ocorreu no artigo em questão, com erros da ordem de 60% para baixos valores de α .

Os resultados para a laminação L2 são mostrados na Figura 41 e na Tabela 9. Neste caso, a falha se inicia por tração na matriz, seguida por uma falha de fibra à compressão, terminando com falhas de fibra à tração.

Assim como na laminação anterior, a utilização de $\alpha = 0.5$ causou um aumento na capacidade de carga da chapa. Porém, neste caso, o aumento distanciou a carga última daquela obtida experimentalmente, com 7.01% de erro para $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$ e 12.8% para $\alpha = 0.5$, visto que a carga última com degradação brusca já é maior que a obtida experimentalmente.

É importante notar que a natureza da falha muda com a mudança no esquema de laminação, possuindo um comportamento mais dúctil em alguns casos e mais frágil em outros. Para laminados que apresentam comportamento dúctil, o uso de um valor maior de α tende a melhorar a previsão da carga última. Já quando o comportamento é frágil, como o laminado analisado, o uso de baixos valores de α torna a análise mais realista. Como o percentual de

Figura 41 – Resultados para a Laminação L2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

lâminas na direção da carga é maior, as falhas de matriz (primeira falha) possuem importância menor, com as maiores reduções de rigidez causadas por falhas nas fibras (demais falhas), que possuem um comportamento mais frágil (Figura 41).

Já nas previsões de falha da primeira lâmina, novamente o critério de Tsai previu uma carga menor que os demais, mas ocasionando uma degradação que não causou mudanças significativas na rigidez do laminado, como pode ser visto no detalhe ampliado da Figura 41. De modo geral, tanto as cargas de FPF quanto de UF aumentaram em relação à primeira laminação, o que se deve ao aumento no percentual de lâminas a 0° (Tabela 6).

Tabela 9 – Resultados para o Laminado L2.

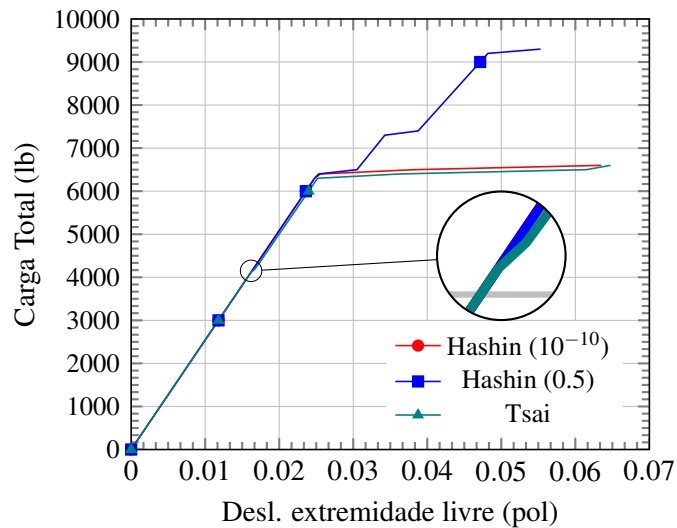
Método	FPF (lb)	UF (lb)	UF Exp. (lb)	Erro(%)
Hashin (10^{-10})	15200	29600	27660	7.01
Hashin (0.5)	15200	31200	27660	12.80
Tsai	10800	29700	27660	7.38

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por sua vez, as curvas carga-deslocamento para o laminado L3 são apresentadas na Figura 42 e as cargas de FPF e UF são mostradas na Tabela 10. A sequência de falha foi semelhante à do laminado L2, iniciando com falhas por tração na matriz, seguidas de falhas de fibra à compressão e terminando com falhas de fibra à tração.

O comportamento do laminado L3 se aproxima do observado para L1, com uma falha mais dúctil devido ao baixo percentual de fibras a 0° . Assim, como era esperado, a consideração de um alto valor de α melhorou a previsão da capacidade de carga, com um

Figura 42 – Resultados para a Laminação L3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

erro de apenas 3.1% em relação ao valor experimental. É interessante observar que neste caso os dois outros métodos (Tsai e Hashin com $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$) não foram capazes de traçar a progressão completa do dano, com cargas da ordem de 28% mais baixas que a experimental devido à desconsideração da progressão gradual do dano.

Tabela 10 – Resultados para o Laminado L3.

Método	FPF (lb)	UF (lb)	UF Exp. (lb)	Erro(%)
Hashin (10^{-10})	6300	6400	8826	-27.49
Hashin (0.5)	6300	9100	8826	3.10
Tsai	4100	6300	8826	-28.62

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como nos outros dois laminados, a carga de FPF pelo método de Tsai foi menor, como pode ser observado no detalhe ampliado da Figura 42. Desta vez, a diminuição na rigidez devido à falha da primeira lâmina foi mais significativa. Tal fato era esperado, visto que pelo método de Tsai a primeira falha é sempre na matriz e, para este laminado, o comportamento da matriz domina a falha.

Por fim, uma análise comparativa entre as cargas de FPF e UF obtidas utilizando o método de Hashin com $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$ e uma análise de falha da primeira fibra (FFF), discutida na Seção 4.2. Na análise de FFF, todas as constantes elásticas com exceção de E_1 foram anuladas, atribuindo um valor de 0.01 para os módulos de elasticidade e 0 para os coeficientes de Poisson. A Tabela 11 mostra as cargas obtidas para os três laminados.

Observando os resultados, nota-se que a estimativa da capacidade de carga ob-

Tabela 11 – Comparação entre falha da primeira fibra e falha progressiva.

Laminado	FPF (lb)	UF (lb)	FFF (lb)
L1	8460	16500	16400
L2	15200	29600	24400
L3	6300	6400	5100

Fonte: Elaborada pelo autor.

tida pelo método da falha da primeira fibra apresenta resultados variados e que dependem da laminação considerada. Para a laminação L1, como a falha da primeira fibra coincidiu com a falha final quando se realizou a análise de falha progressiva, as duas cargas (UF e FFF) foram praticamente idênticas. Neste caso, o uso da metodologia de FFF foi vantajoso, visto que é computacionalmente eficiente.

Já para a laminação L2, a carga obtida por FFF foi aproximadamente 82% da carga final obtida na análise por falha progressiva. A diferença entre os dois valores se dá devido à ocorrência de uma falha de fibras antes da ocorrência da falha final para esta laminação. Porém, apesar de não ter sido possível prever a capacidade de carga final, a análise por FFF forneceu uma carga maior que a de FPF, o que é interessante em projeto se a falha da matriz for aceitável.

Por fim, para a laminação L3, a carga de FFF foi ainda menor que a de FPF devido à insuficiência de fibras a 0° . Em outras palavras, o comportamento do laminado L3 é basicamente determinado pela matriz, que foi completamente degradada na análise de FFF. Com isso, a capacidade de carga obtida é ainda menor, comprometendo a análise por FFF.

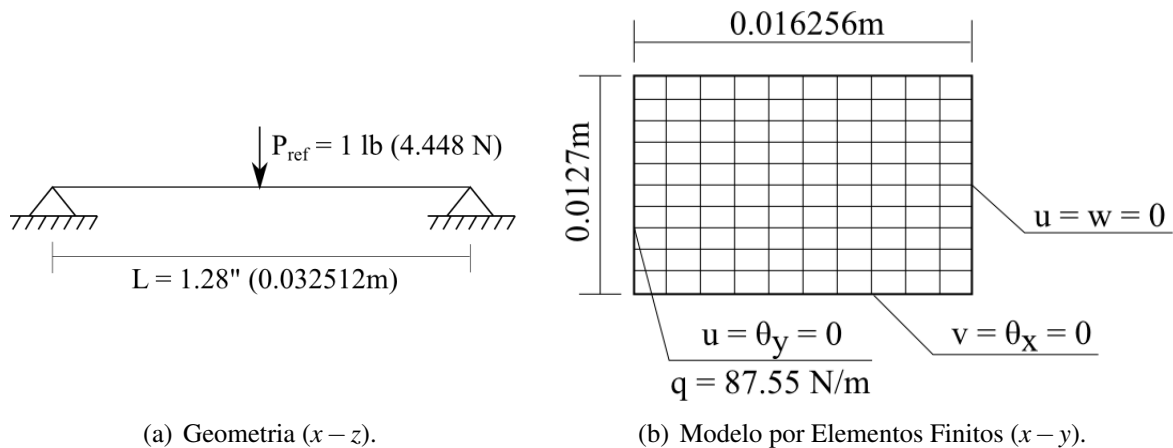
4.6.2 Placa Submetida a Flexão

Neste exemplo, a simulação de um ensaio de flexão de 3 pontos será realizada. Ao contrário do exemplo anterior, resultados experimentais não se fazem disponíveis, mas apenas resultados numéricos obtidos por Reddy *et al* (1995).²⁸ A geometria da viga no plano $x-z$ pode ser vista na Figura 43a, com a presença de dois apoios do segundo gênero e uma carga total de 1 libra (4.448N) no centro do vão $L = 1.28''$ (0.032512m). Já a largura da viga mede $b = 1''$ (0.0254m). O deslocamento u foi impedido nas duas extremidades da viga de modo a provocar um enrijecimento de membrana devido à flexão (Teoria de von Kármán).

Na modelagem por elementos finitos, uma malha de 100 elementos Q8 de casca abatida com integração reduzida foi utilizada. A simetria do problema foi explorada e apenas um quarto da viga foi modelada no plano $x-y$, como pode ser visto na Figura 43b. A carga foi distribuída ao longo da largura da viga e, também devido à simetria, somente um quarto do seu valor foi aplicado no modelo por MEF. Os três esquemas de laminação *cross-ply* utilizados são mostrados na Tabela 12. Em todos os casos, a espessura de cada lâmina foi $t = 0.127mm$

Foram realizadas tanto análises de FPF quanto de falha progressiva para as três

Figura 43 – Placa submetida a flexão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Laminações consideradas para a placa submetida a flexão.

Exemplo	Laminação
A	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_s$
B	$[90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ]_s$
C	$[0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ]_s$

FONTE: Adaptado de Reddy *et al* (1995).²⁸

laminações. Além disso, tanto análises geometricamente lineares quanto não-lineares foram realizadas. Devido ao efeito de restringir os deslocamentos u em ambos os apoios, espera-se que a capacidade de carga seja consideravelmente maior quando os termos de deformação de von Kármán forem usados. Para este exemplo, o método de Tsai-Wu com degradação única será usado com $\alpha = 1 \cdot 10^{-10}$ (Seção 4.4.2). As propriedades do material utilizado são mostradas na Tabela 13.

De modo a traçar os caminhos carga-deslocamento e obter as cargas de FPF e UF, o método do Controle de Deslocamento (Seção 3.5.2) foi utilizado para incrementar o deslocamento transversal do ponto central da placa (ponto inferior esquerdo do modelo de elementos finitos) com passos $\Delta w = 10^{-5}m$. Com isso, obteve-se um pico de carga seguido da diminuição da carga por falta de rigidez. Tal pico foi utilizado para identificar a carga final UF. Os resultados são mostrados na Tabela 14 para análise geometricamente linear e na Tabela 15 para análise considerando os termos de von Kármán.

Observando inicialmente os resultados com análise geometricamente linear, o comportamento geral da falha de cada um dos laminados pode ser avaliado. No caso do laminado A, por possuir todas as camadas a 0° , possui a maior das capacidades de carga dentre os laminados analisados. Sua falha inicia pelas lâminas externas, nas quais a tensão na direção das fibras pos-

Tabela 13 – Propriedades do material.

E_1 (GPa)	132.36
$E_2 = E_3$ (GPa)	10.75
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.24
ν_{23}	0.49
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	5.65
G_{23} (GPa)	3.38
X_t (MPa)	1513.23
X_c (MPa)	1695.92
$Y_t = Z_t$ (MPa)	43.78
$Y_c = Z_c$ (MPa)	164.42
$S_5 = S_4$ (MPa)	86.86
S_6 (MPa)	67.56

FONTE: Reddy *et al* (1995).²⁸

Tabela 14 – Resultados utilizando análise geometricamente linear.

Laminação	FPF/UF (lb)	FPF/UF Lit. (lb) ²⁸	Erro FPF/UF (%)	Modo de Falha FPF/UF
A	144.81/150.0	145/175	-0.13/-14.29	Fibra/Fibra
B	5.36/5.58	5.3/5.4	1.13/3.33	Matriz/Matriz
C	116.73/129.03	112/140	4.22/-7.84	Matriz/Fibra

Fonte: Elaborada pelo autor.

sui valor máximo na seção transversal da placa. Assim, tanto a primeira falha quanto a última se dá nas fibras, com as camadas mais próximas da superfície média falhando por último.

Já o laminado B possui todas as lâminas alinhadas a 90°, caracterizando um comportamento oposto ao do laminado A. Neste caso, a falha é comandada pela matriz, iniciando também pelas camadas externas e passando para as internas. Porém, como a matriz é menos resistente, a capacidade de carga é muito menor que a dos outros laminados.

Por último, o laminado C apresenta as lâminas externas a 0° e as internas a 90°. Diferente dos outros laminados, a falha se inicia pelas camadas internas, mesmo com menores valores de tensão, devido à baixa resistência da matriz. A falha final se dá então nas camadas externas.

Considerando os termos de deformação não-lineares, o comportamento da falha é o mesmo para os três laminados, mas há um aumento na capacidade de carga devido ao enrijecimento de membrana devido à flexão quando os deslocamentos aumentam. Comparando os resultados com os obtidos por Reddy *et al* (1995),²⁸ nota-se que em geral obteve-se boa

Tabela 15 – Resultados utilizando análise não-linear geométrica.

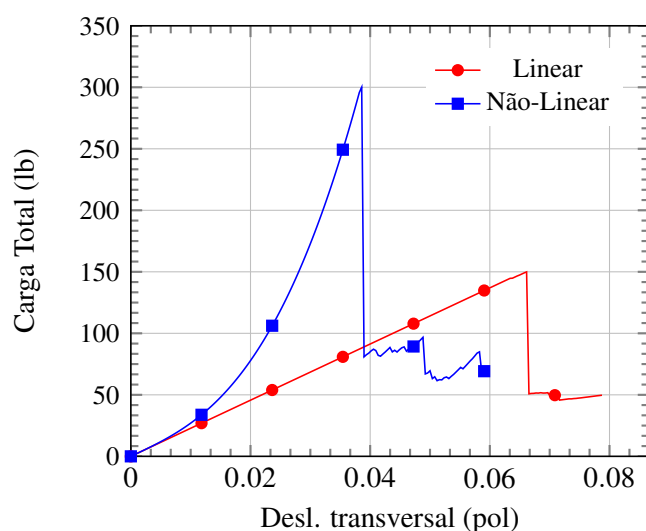
Laminação	FPF/UF (lb)	FPF/UF Lit. (lb) ²⁸	Erro FPF/UF (%)	Modo de Falha FPF/UF
A	300.04/307.14	300/410	0.01/-25.09	Fibra/Fibra
B	7.21/7.21	7.5/7.5	-3.87/-3.87	Matriz/Matriz
C	135.86/196.08	130/210	4.51/-6.63	Matriz/Fibra

Fonte: Elaborada pelo autor.

concordância, tendo em vista que, no artigo, os resultados foram apresentados em forma gráfica, dificultando sua extração. As maiores diferenças ocorreram na falha última do laminado A. Tais diferenças podem advir do tamanho do passo de carga utilizado no artigo, cujo valor não foi explicitado, e também a diferenças na metodologia de progressão do dano utilizando o método de Newton-Raphson.

De modo a observar também o comportamento da curva carga-deslocamento, a mesma foi traçada para o laminado A tanto para o caso geometricamente linear quanto para o não-linear. Os resultados são mostrados na Figura 44. Nota-se, como esperado, uma rigidez consideravelmente maior no caso geometricamente não-linear, cujo processo completo de falha ocorre em um nível menor de deslocamentos que o caso linear. Tal fato demonstra a importância do uso da análise geometricamente não-linear em conjunto com uma análise de falha progressiva.

Figura 44 – Curvas carga-deslocamento para a Laminação A.

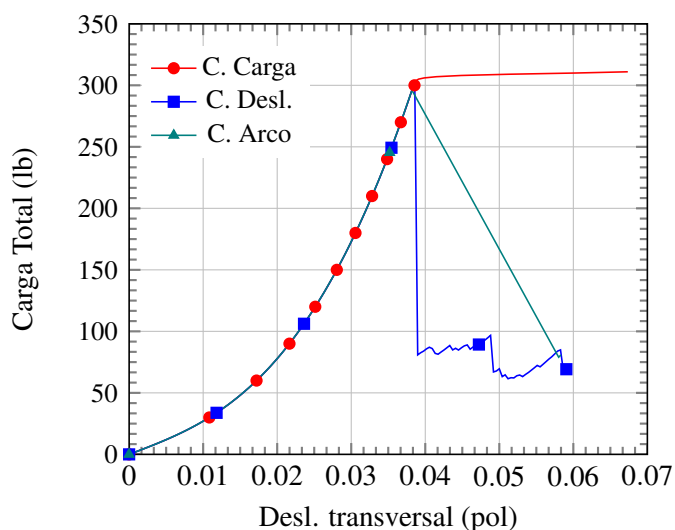


Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, uma comparação entre métodos de traçado do caminho de equilíbrio será realizada. Para isso, o laminado A será analisado considerando termos de deformação não-lineares utilizando controle de carga, controle de deslocamento e comprimento de arco de Riks-

Wempner. Os resultados são mostrados na Figura 45.

Figura 45 – Comparação entre métodos de traçado de caminho carga-deslocamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que os três métodos utilizados previram uma capacidade de carga semelhante. Porém, o caminho de equilíbrio após a falha varia conforme o método usado. Para o caso do controle de carga, não há descarregamento e os deslocamentos aumentam continuamente. Utilizando tal método, a capacidade de carga é determinada a partir do ponto obtido antes dos deslocamentos aumentarem excessivamente. Já para os outros dois métodos, um pico de carga é formado, identificando claramente a carga de falha final. Nota-se também que o caminho de descarregamento é diferente dependendo do método usado.

4.6.3 Casca Abatida

O último exemplo deste capítulo consiste na modelagem da casca abatida tratada na Seção 3.7.2 considerando também a não-linearidade do material. O objetivo é analisar o comportamento da curva carga-deslocamento quando há a ocorrência de pontos limites de carga e deslocamento e comportamento fisicamente não-linear no material ao mesmo tempo.

A geometria da casca permaneceu a mesma daquela mostrada no capítulo anterior. Aqui, somente uma das laminações, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, será utilizada e a espessura da casca será fixada em $h = 6.35\text{mm}$, levando a uma espessura das lâminas constante $t = 2.1166\text{mm}$.

As propriedades do material foram mantidas iguais às utilizadas anteriormente, mas os valores de resistência foram arbitrados de modo a permitir a análise da falha. A estimativa dos valores se deu obedecendo às mesmas proporções de resistência/rigidez do material utilizado no exemplo anterior (Tabela 13). Os valores utilizados podem ser vistos na Tabela 16.

A metodologia de falha utilizada neste caso foi a de Tsai, escolhida por apresentar um comportamento conservador (Seção 4.6.1) e pelo fato de seus fatores de degradação já terem

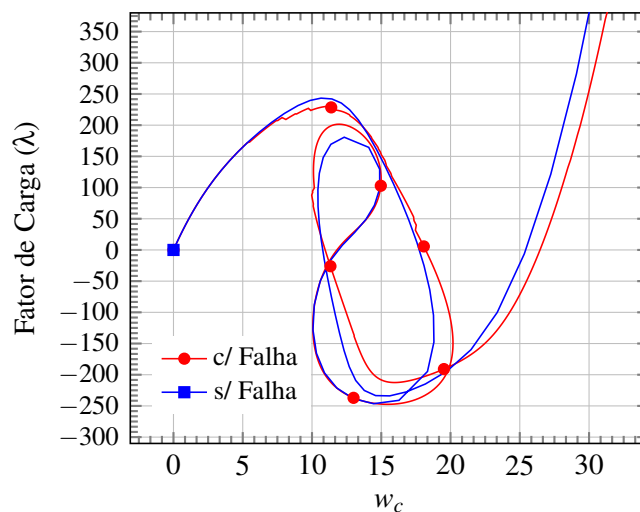
Tabela 16 – Propriedades do material.

E_1	3300
$E_2 = E_3$	1100
$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	0.25
G_{12}	660
$G_{13} = G_{23}$	440
X_t	38
X_c	42
$Y_t = Z_t$	4
$Y_c = Z_c$	17
$S_5 = S_4$	10
S_6	8

Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo ajustados baseado em resultados experimentais por Tsai *et al* (2002).⁸⁸ Para o traçado do caminho de equilíbrio, o método do Comprimento de Arco de Riks-Wempner será usado, assim como foi feito no capítulo anterior. Os resultados são mostrados na Figura 46.

Figura 46 – Casca abatida considerando não-linearidade física e geométrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que em um trecho inicial do caminho, as duas soluções apresentam o mesmo comportamento, como esperado. No nível de carga $\lambda = 174$ ocorre a falha da primeira lâmina, causando uma diminuição de rigidez e criando uma divergência entre os caminhos. Ressalta-se que tal falha também ocasionou uma diminuição na carga crítica da casca, muito embora o ponto crítico tenha se dado no mesmo nível de deslocamentos da estrutura não degra-

dada.

Continuando a seguir o caminho, a diferença entre as duas curvas se acentua, com falhas adicionais ocorrendo a cada passo. É interessante observar que, embora o material esteja degradado, as duas curvas concordam em grande parte do trecho ascendente próximo ao deslocamento $w_c = 15$. Posteriormente, as curvas voltam a divergir, mantendo tal comportamento por todo o resto do caminho. No geral, nota-se que a forma do caminho de equilíbrio foi semelhante, embora os valores das cargas críticas tenham sido distintos.

Os resultados obtidos nos três exemplos mostrados sugerem que as metodologias de falha progressiva foram corretamente formuladas e implementadas, sendo capazes de prever tanto a falha da primeira lâmina (FPF) quanto a capacidade de carga final de um laminado considerando ou não termos de deformação não-lineares. Nos próximos capítulos, o objetivo será aplicar os métodos desenvolvidos até este ponto para obter esquemas de laminação otimizados.

5 OTIMIZAÇÃO DE LAMINADOS

Este capítulo trata da otimização de compósitos laminados utilizando Algoritmos Genéticos. Inicia-se com uma breve revisão bibliográfica sobre otimização de laminados, incluindo as principais formulações de variáveis, função objetivo e restrições utilizadas. Em seguida uma formulação de algoritmo genético utilizando conceitos de computação paralela será apresentada, com a discussão sobre os operadores genéticos utilizados.

Posteriormente, a implementação computacional será discutida em detalhes, com foco na estrutura de classes do programa desenvolvido e nas funções específicas que dizem respeito à paralelização do código. Os exemplos de otimização, tanto utilizando análise linear quanto não-linear, serão mostrados no capítulo seguinte.

5.1 Considerações Gerais

Como mencionado, o processo de projeto convencional torna-se árduo em estruturas laminadas. Tal fato ocorre devido ao grande número de variáveis de projeto envolvidas, o que torna a obtenção de um projeto satisfatório uma tarefa complexa.⁴ Assim, há uma tendência cada vez maior do uso de técnicas de otimização no projeto de tais estruturas.

Para formular um problema de otimização, é necessário definir as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições. Em sua forma clássica, um problema de otimização pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Encontrar } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\text{que minimize: } f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\text{sujeito a:} \\
 &h_i(\mathbf{x}) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\
 &g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\
 &x_{k(\min)} \leq x_k \leq x_{k(\max)} \quad k = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{148}$$

onde \mathbf{x} é o vetor das variáveis de projeto, h_i são as restrições de igualdade com $p < n$ e g_j são as restrições de desigualdade.⁷

No caso de otimização de laminados, geralmente as variáveis de projeto envolvem o número, a espessura e o ângulo de orientação das lâminas. Adicionalmente, o material de cada lâmina pode também ser considerado uma variável. As variáveis podem ser consideradas tanto discretas⁸ como contínuas.^{96,97} Como função objetivo, geralmente realiza-se a minimização do custo ou alguma variável relacionada, como o peso total ou a espessura total. Adicionalmente, pode-se minimizar os deslocamentos obtidos, maximizar a capacidade de carga, a carga crítica, dentre outros.

Como basta uma mudança nos ângulos de orientação das lâminas para modificar o comportamento mecânico do laminado, múltiplas soluções podem ser obtidas para a mesma

espessura ou peso total, incentivando o uso de uma formulação multiobjetivo^{21,98} incluindo também um parâmetro de desempenho juntamente ao custo ou peso,^{8,99} como a capacidade de carga ou deslocamentos máximos. Como restrições, podem ser utilizados fatores de segurança a tensões, baseados em análises de FPF, FFF ou UF (Seção 4.2), fatores de segurança a flambagem, frequências naturais, dentre outros. Além disso, podem-se impor restrições no próprio arranjo das lâminas, como obrigar o laminado a ser simétrico ou simétrico-balanceado e restringir a espessura máxima de camadas contíguas com a mesma orientação.⁸

Para resolver o problema formulado, vários métodos podem ser utilizados. Algoritmos de programação não-linear têm sido usados com sucesso no caso do uso de variáveis contínuas.^{100,101} Já algoritmos evolucionários, notadamente Algoritmos Genéticos (AGs), vêm sendo utilizados tanto com variáveis contínuas como discretas.^{3,8,21,102} Ressalta-se que, no caso de compósitos laminados, restrições de fabricação geralmente levam a variáveis de projeto discretas, estimulando o uso de algoritmos que não exigem informações sobre os gradientes da função objetivo e restrições.^{7,100} Considerando variáveis discretas, a formulação do problema mostrada na Eq. (148) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Encontrar } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\text{que minimize: } f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\text{sujeito a:} \\
 &h_i(\mathbf{x}) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\
 &g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\
 &\text{onde:} \\
 &x_k \in \{x_{k(1)}, x_{k(2)}, \dots, x_{k(l)}\}
 \end{aligned} \tag{149}$$

De modo a avaliar a função objetivo e as restrições na otimização de estruturas laminadas, sua resposta mecânica deve ser determinada através de um procedimento de análise estrutural. O nível de fidelidade da análise, isto é, o quão bem a estrutura real é representada por um modelo mecânico idealizado, é um fator importante na qualidade dos projetos ótimos obtidos. Tal análise é geralmente realizada utilizando soluções analíticas simplificadas. Tais métodos, apesar de rápidos, só podem ser aplicados a geometrias, carregamentos e condições de contorno simples, sendo incapazes de representar estruturas reais com bons níveis de fidelidade. Porém, a grande maioria dos trabalhos atuais na área de compósitos laminados utiliza tais soluções, limitando a aplicabilidade de suas formulações.^{43,103–106}

Neste âmbito, métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF), abordado nos capítulos anteriores, começaram a ser utilizados na otimização de compósitos laminados.^{8,21–23} Porém, mesmo no MEF, múltiplos níveis de fidelidade podem ser utilizados no que diz respeito não só ao refinamento da malha, mas também ao tipo de elemento utilizado e aos tipos de não-linearidades levados em consideração. Infelizmente, o aumento da fidelidade tende a tornar o processo de análise computacionalmente caro e portanto inviável para uso com

métodos de otimização. Tal é a motivação do uso de técnicas de computação paralela,³² aplicadas com o objetivo de tornar a execução do algoritmo de otimização mais rápida. Alguns trabalhos recentes vêm explorando a paralelização na otimização de laminados.^{107–112} Nas seções que seguem, um algoritmo genético paralelo para a resolução de problemas de otimização de estruturas laminados será formulado e sua implementação computacional será descrita.

5.2 Algoritmo Genético

Na natureza, indivíduos devem possuir boas características genéticas para sobreviver. Tais indivíduos são os mais aptos e portanto possuem maiores chances de transmitir seus genes para as próximas gerações, enquanto que os indivíduos menos aptos tendem a sucumbir, causando a eliminação de suas características genéticas ao longo das gerações. Tal processo tende a levar à evolução dos indivíduos e à sua adaptação às intempéries exercidas pelo ambiente. Algoritmos Genéticos (AGs) se baseiam em princípios de genética e na Teoria da Evolução de Darwin de modo a obter um conjunto de potenciais soluções de um problema de otimização.¹¹³

AGs apresentam diversas vantagens em relação a métodos de Programação Não-Linear que levaram a um aumento em seu uso, particularmente com o aumento no poder de processamento de computadores. AGs trabalham com um conjunto de potenciais soluções sendo portanto menos suscetíveis a mínimos locais. Além disso, como não são necessárias informações de gradientes, AGs são capazes de lidar com espaços de projeto descontínuos, problemas com variáveis discretas e funções não-diferenciáveis.

Uma das principais dificuldades inerentes ao uso de AGs é o alto custo computacional. Tal custo é particularmente alto quando a função objetivo e restrições do problema são representadas por funções implícitas complexas ou quando um grande número de variáveis de projeto é utilizado. Em alguns casos, uma única otimização pode demorar horas ou dias para ser executada. Deste modo, técnicas de paralelização se tornam interessantes na diminuição dos tempos de execução de AGs.

Várias técnicas de paralelização podem ser aplicadas a AGs, tendo em vista que sua estrutura é naturalmente dividida em parcelas (indivíduos) que são independentes umas das outras durante a maior parte do processo de otimização. Tal divisão facilita sua implementação em paralelo e ajuda a diminuir o tempo gasto com a passagem de dados em arquiteturas de memória distribuída. Nesta dissertação, dois métodos de paralelização distintos serão combinados, um deles idealizado para ambientes de memória compartilhada e o outro para ambientes de memória distribuída. O resultado é um AG com paralelização híbrida que pode ser executado tanto em computadores pessoais como em *clusters* de alta performance.

O algoritmo resultante combina a simplicidade do OpenMP¹¹⁴ para arquiteturas de memória compartilhada com a flexibilidade do MPI¹¹⁵ para ambientes de memória distribuída em um Modelo de Ilhas (*Island Model*), trabalhando com múltiplas subpopulações evoluindo

simultaneamente. Além disso, de modo a acelerar a convergência, cada ilha possui um conjunto distinto de parâmetros genéticos, representando múltiplos ambientes evolutivos que trocam indivíduos periodicamente. O algoritmo foi desenvolvido tanto para computadores pessoais como para *clusters* de computação paralela. É importante ressaltar que mesmo se um *cluster* de alto desempenho não estiver disponível, vários computadores pessoais podem ser conectados em rede e utilizados para executar o AG em paralelo (*Network of Workstations*).

Muito embora existam diversas variações dos AGs, eles funcionam de maneira similar. Inicialmente, gera-se uma população inicial de indivíduos, cada um representando um ponto no espaço de projeto. No caso do presente algoritmo, tal geração é feita aleatoriamente. Tais indivíduos são classificados de acordo com sua aptidão e os mais aptos têm maior probabilidade de fazer parte da geração seguinte e cruzar. Os indivíduos resultantes de tais cruzamentos são submetidos a mutações e trocas de genes e então substituem os piores membros da população inicial, iniciando uma nova geração. O processo continua até que o critério de convergência seja atingido. Os itens seguintes procuram descrever cada etapa do algoritmo proposto.

5.2.1 Codificação

Cada laminado é um indivíduo representado por três cromossomos, cada um deles representado por uma linha em uma matriz, como mostrado na Figura 47. As colunas da matriz são, portanto, as camadas do laminado. O primeiro cromossomo guarda as *espessuras* de cada camada, o segundo guarda a *orientação das fibras* em cada camada e o terceiro e último guarda o *material* de cada uma. Ressalta-se que esta formulação permite a existência de laminados híbridos, isto é, compostos por mais de um tipo de material.

Figura 47 – Exemplo de codificação e decodificação.

Código	Espessura	Código	Ângulo	Código	Material
0	0.0mm	1	-45°	1	Material 1
1	0.1mm	2	-25°	2	Material 2
2	0.2mm	3	-5°	3	Material 3
3	0.3mm	4	+25°	4	Material 4
4	0.4mm	5	+45°	5	Material 5

Espessura	←	$\left \begin{array}{ccccc} 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right $	$\xrightarrow{\text{Decodificação}}$	$\left \begin{array}{ccccc} 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ -45^\circ & -25^\circ & 45^\circ & -45^\circ & -45^\circ \\ \text{Mat 2} & \text{Mat 3} & \text{Mat 3} & \text{Mat 5} & \text{Mat 4} \end{array} \right $
Orientação	←			
Material	←			
		Genótipo	Fenótipo	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada laminado tem uma representação *Genotípica* e outra *Fenotípica*. Na representação genotípica, os cromossomos possuem valores inteiros em cada gene, correspondendo a posições em listas que guardam os valores discretos de cada tipo de variável. Em outras

palavras, o algoritmo aqui tratado possui *codificação inteira*. Já a representação fenotípica guarda os valores reais das variáveis.

O número de colunas na matriz genotípica depende do tipo de laminado considerado. Se um laminado geral é usado, o número de colunas é fixado ao máximo número de camadas. Porém, se um laminado simétrico for usado, o número de colunas é igual à metade do número máximo de camadas. Por fim, se um laminado simétrico e balanceado for usado, o número de colunas é igual a um quarto do número máximo de camadas.

As duas representações são importantes no processo de otimização. Na aplicação de operadores genéticos, o indivíduo precisa estar em sua representação genotípica. Já para a avaliação da função objetivo e restrições, a representação fenotípica deve ser utilizada. Os processos de mudança entre as duas representações são denominados Codificação e Decodificação. Tais processos podem ser vistos na Figura 47.

Neste algoritmo, a eliminação de camadas é permitida. Quando isto ocorre, seu valor de espessura na representação genotípica é fixado em zero e a camada será ignorada durante o processo de decodificação. Consequentemente, o número de colunas da representação fenotípica dependerá também do número de camadas eliminadas.

5.2.2 *Tratamento de Restrições*

Algoritmos genéticos não são capazes de tratar problemas restritos diretamente, pois, como mencionado, apenas informação sobre a função objetivo dos indivíduos é utilizada no processo. Assim, deve-se garantir de alguma forma que o processo permaneça no espaço viável ou, pelo menos, convirja para um ponto viável. Para tal propósito, vários métodos podem ser utilizados.¹¹⁶

Nos métodos chamados diretos ou interiores, somente pontos viáveis são utilizados no processo de otimização. O mais simples dos métodos diretos é chamado de pena de morte,¹¹⁶ no qual todos os pontos inviáveis gerados são simplesmente rejeitados e novos pontos são gerados até que se gere um ponto viável. Tal estratégia pode ser computacionalmente ineficiente, dependendo do espaço de projeto considerado. Além disso, indivíduos inviáveis podem conter boas características, que são descartadas no processo.

Outra alternativa é o uso de um esquema de codificação que gere fenótipos viáveis para qualquer genótipo fornecido. Tal estratégia é eficiente em problemas cujas restrições são funções explícitas. Porém, notadamente no caso de otimização de estruturas, as restrições são funções implícitas, inviabilizando o uso de tal método.

Técnicas de reparo, que trazem um ponto qualquer de volta à região viável, podem também ser utilizadas. Porém, este método é muito dependente do entendimento do problema a ser resolvido e, portanto, é de difícil generalização. Por fim, podem ser criados operadores especiais de cruzamento e mutação que gerem apenas indivíduos viáveis. Novamente, tal método é muito dependente do problema, sendo de aplicação muito difícil no caso de laminados.

Caso se permita que o algoritmo trabalhe com pontos inviáveis, tem-se os métodos indiretos ou exteriores. Em tais métodos, podem ser utilizados multiplicadores de Lagrange, formando a função Lagrangiana juntamente com a função objetivo original, ou utilizar fatores de penalidade de modo a deixar indivíduos inviáveis menos aptos, dificultando a perpetuação de suas características. Três métodos exteriores serão apresentados, o primeiro consistindo em um método de penalidade estática e os outros em métodos de penalidade adaptativa.

O método de penalidade interior mais simples consiste em arbitrar um certo valor alto, denominado fator de penalidade, e aplicá-lo à função objetivo de pontos inviáveis, com o objetivo de deixá-lo menos apto que os indivíduos viáveis. Geralmente, aplica-se uma penalidade proporcional à violação de cada restrição. Assim, o valor da função objetivo penalizada utilizando este método será:

$$f_p = f(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^m k \cdot \max(g_l(\mathbf{x}), 0) \quad (150)$$

onde o fator de penalidade k é constante para todas as restrições e também ao longo das gerações. É importante ressaltar que, para restrições com diferentes ordens de grandeza, tal estratégia deve ser utilizada com cuidado. Assim, as restrições são geralmente adimensionalizadas, mantendo a mesma ordem de grandeza. Nota-se que o fator k a ser escolhido depende do problema e do espaço de projeto, sendo fornecido pelo usuário. Como é difícil saber de início qual o valor apropriado de k , geralmente se utiliza um número muito alto ou o valor é ajustado a cada vez que o problema é rodado por completo.

O próximo método foi proposto por Deb¹¹⁷ e foi originalmente aplicado juntamente com um método de seleção por torneio. Neste método, a função objetivo de indivíduos inviáveis é inicialmente levada ao valor mais alto de toda a população (f_{max}). Então, a soma das violações de todas as restrições é adicionada. A função objetivo penalizada se torna então:

$$f_p = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for viável} \\ f_{max} + \sum_{l=1}^m \max(g_l(\mathbf{x}), 0) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for inviável} \end{cases} \quad (151)$$

Nota-se que, ao contrário do método de penalidade com fator constante, o Método de Deb não requer a escolha de nenhum parâmetro por parte do usuário. Além disso, é de fácil implementação computacional. É importante ressaltar, porém, que a eficiência de um método de penalidade está diretamente ligada ao método de seleção utilizado¹¹⁶.

Por fim, o método adaptativo proposto por Barbosa e Lemonge¹¹⁶ envolve o cálculo de um fator de penalidade para cada restrição do problema. Além disso, tais fatores (k_j) são modificados a cada geração, dependendo de valores médios de violação e da função objetivo para toda a população. Uma das características do método é que, mesmo antes de aplicar a penalidade de cada restrição, os pontos inviáveis têm sua função objetivo trazidas para o valor médio de toda a população. Assim, define-se inicialmente uma função somente para pontos

inviáveis, dada por:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) > f_m(\mathbf{x}) \\ f_m(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) < f_m(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (152)$$

Na expressão anterior, f_m é o valor da função objetivo média, calculado usando os valores de toda a população. Assim, nota-se que, independente de qual restrição foi violada no ponto \mathbf{x} , sua função objetivo é elevada ao valor médio da população. Para definir os valores dos coeficientes de penalidade para cada restrição, faz-se a média das violações de cada restrição e também a soma das médias das violações elevadas ao quadrado para todas as restrições. Os fatores de penalidade são então definidos por:

$$k_j = |f_m| \frac{g_m(j)}{\sum_{l=1}^m g_m^2(l)} \quad (153)$$

Portanto, o fator de penalidade de cada restrição é ponderado de forma que as restrições mais violadas (com maior violação média) tenham um valor maior de k . Em outras palavras, as restrições que a população está tendo mais dificuldade em satisfazer serão as mais penalizadas.¹¹⁶ Definidos então os fatores de penalidade, a forma final da função objetivo penalizada é dada por:

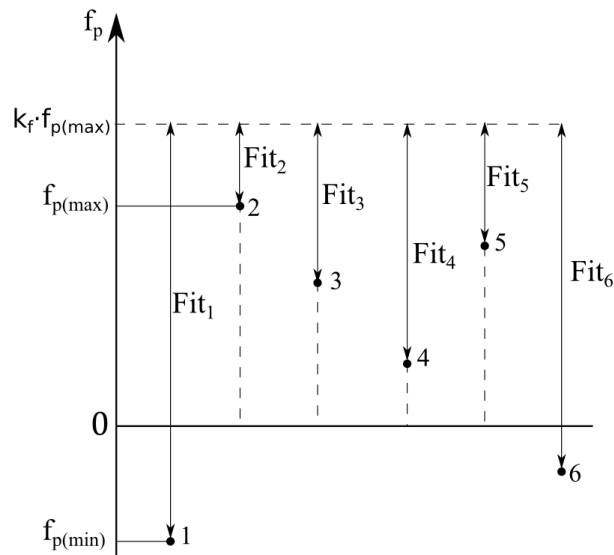
$$f_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for viável} \\ \bar{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m k_j \cdot \max(g_j(\mathbf{x}), 0) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for inviável} \end{cases} \quad (154)$$

5.2.3 Função Aptidão e Seleção

No presente algoritmo, a seleção é realizada em duas etapas. A primeira consiste na formação de uma população intermediária formada por indivíduos aptos para o cruzamento (*Mating Pool*).⁷ Posteriormente, indivíduos são selecionados para sofrer cruzamento a partir desta população intermediária. Em ambos os processos, cada indivíduo precisa possuir um valor numérico positivo que representa sua aptidão em relação aos outros indivíduos da população. Em outras palavras, tal valor, denominado Função Aptidão (*Fitness Function*), permite avaliar o quão um dado indivíduo é melhor ou pior que outros.

Como mostrado na Eq. (148), considera-se que apenas problemas de minimização serão tratados. Deste modo, a Função Aptidão é definida através de um mapeamento da função objetivo penalizada de modo a garantir que a probabilidade de seleção de qualquer indivíduo seja positiva e também que os melhores indivíduos possuam os valores de aptidão mais altos.¹¹⁸

Figura 48 – Processo de mapeamento da função objetivo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste algoritmo, o mapeamento linear será utilizado:

$$Fit_i = k_f \cdot \max(|f_{p(min)}|, |f_{p(max)}|) - f_{pi} \quad (155)$$

onde $f_{p(min)}$ e $f_{p(max)}$ são os valores mínimos e máximos da função objetivo penalizada, respectivamente, em toda a população e Fit_i é o valor da Função Aptidão. O valor k_f é utilizado no cálculo de modo a evitar que o pior indivíduo possua probabilidade de seleção nula. Em todos os exemplos desta dissertação, um valor de $k_f = 1.10$ foi utilizado. A Figura 48 representa graficamente o processo de mapeamento.

Para selecionar os indivíduos, o Método da Roleta será usado.⁵ Para o cálculo da probabilidade de seleção de cada indivíduo, pode-se optar por utilizar diretamente o valor da Função Aptidão, em um processo denominado *Seleção Proporcional À Aptidão (Fitness Proportional Selection)*:

$$p_i = \frac{Fit_i}{\sum_i^{N_{ind}} Fit_i} \quad (156)$$

onde p_i é a probabilidade de seleção do indivíduo i e N_{ind} é o número de indivíduos da população.

Alternativamente, pode-se usar a seleção por *Ranking*. Em tal método, os indivíduos da população são ordenados de acordo com seus valores de aptidão, de modo que o melhor indivíduo ocupe a posição de maior *ranking*. As probabilidades são então calculadas com base

na posição do indivíduo:

$$p_i = \frac{Rnk_i}{\sum_{k=1}^{N_{ind}} Rnk_k} \quad (157)$$

5.2.4 Cruzamento

O cruzamento (*crossover*) é um operador genético essencial para a convergência em AGs tradicionais. Ele é aplicado em dois indivíduos, denominados pais, e origina dois novos indivíduos denominados filhos, que contêm traços genéticos dos dois pais simultaneamente. Como mencionado, os indivíduos são selecionados para o cruzamento a partir da população intermediária (*mating pool*) e sua quantidade é ditada pela *taxa de cruzamento* (t_c).

Geralmente, o operador de cruzamento utilizado na otimização de estruturas laminadas consiste na definição de um ou mais planos de corte na representação genotípica dos cromossomos dos pais e a posterior recombinação das partes para formar os filhos.^{8,109,110} Por outro lado, neste trabalho um método baseado no cruzamento utilizado em AGs com codificação real será adotado.

O método consiste na combinação linear dos genes dos pais para formar os filhos. O processo é realizado individualmente em cada camada, com a geração de um número aleatório r entre 0 e 1. Tal número é então utilizado para calcular uma média ponderada dos genes dos pais, que são então arredondados para o inteiro mais próximo. A Figura 49 mostra um exemplo desse processo.

Figura 49 – Cruzamento aplicado a laminados de duas camadas.

$$\begin{array}{c}
 \text{Pai 1} \quad \left| \begin{array}{cc} \text{T1} & \text{T2} \\ \text{A1} & \text{A2} \\ \text{M1} & \text{M2} \end{array} \right| \quad \text{Filho 1} \quad \left| \begin{array}{cc} r1 \times \text{T1} + (1-r1) \times \text{T4} & r2 \times \text{T2} + (1-r2) \times \text{T5} \\ r1 \times \text{A1} + (1-r1) \times \text{A4} & r2 \times \text{A2} + (1-r2) \times \text{A5} \\ r1 \times \text{M1} + (1-r1) \times \text{M4} & r2 \times \text{M2} + (1-r2) \times \text{M5} \end{array} \right| \\
 \\
 \text{Vetor} \\
 \text{Randômico} \quad \left| \begin{array}{cc} r1 & r2 \end{array} \right| \rightarrow \\
 \\
 \text{Pai 2} \quad \left| \begin{array}{cc} \text{T4} & \text{T5} \\ \text{A4} & \text{A5} \\ \text{M4} & \text{M5} \end{array} \right| \quad \text{Filho 2} \quad \left| \begin{array}{cc} r1 \times \text{T4} + (1-r1) \times \text{T1} & r2 \times \text{T5} + (1-r2) \times \text{T2} \\ r1 \times \text{A4} + (1-r1) \times \text{A1} & r2 \times \text{A5} + (1-r2) \times \text{A2} \\ r1 \times \text{M4} + (1-r1) \times \text{M1} & r2 \times \text{M5} + (1-r2) \times \text{M2} \end{array} \right|
 \end{array}$$

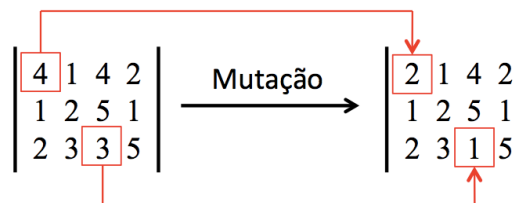
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.5 Mutação

Muito embora AGs sejam menos suscetíveis a mínimos locais, sua convergência pode ocorrer prematuramente, comprometendo os resultados obtidos. De modo a evitar tal fenômeno, é importante manter a variabilidade genética da população ao longo do processo. O

operador de mutação é uma das estratégias responsáveis por manter tal variabilidade e ajudar a explorar o espaço de projeto.

Figura 50 – Operador de mutação aplicado em dois genes de um laminado com 4 camadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

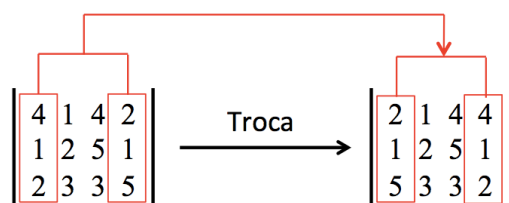
O operador é aplicado nos filhos gerados no processo de cruzamento utilizando uma *probabilidade de mutação* p_m , à qual geralmente se atribui valores baixos. Para cada camada do cromossomo em sua representação genotípica, um número aleatório r entre 0 e 1 é gerado. Se tal número for menor que a probabilidade de mutação, um inteiro aleatório dentro dos limites da lista que corresponde à variável modificada é gerado. Tal valor então substitui o valor original do gene. A Figura 50 mostra um exemplo de mutação aplicada em dois genes.

5.2.6 Operadores Para Laminados

Nesta seção, operadores específicos para problemas laminados serão apresentados. O operador de troca de lâminas (*layer swap*) modifica as propriedades mecânicas do laminado a partir da troca de posição entre duas camadas (Figura 51). Assim como o operador de mutação, ele apresenta uma probabilidade baixa de ocorrência, denominada *probabilidade de troca* (p_s). Quando o operador é aplicado, duas camadas são escolhidas aleatoriamente e suas posições são trocadas. Na matriz genotípica, isto equivale à troca de posição entre duas de suas colunas.

É importante ressaltar que o operador de troca de camadas modifica a rigidez à flexão do laminado (matriz **D**) sem modificar a rigidez de membrana (matriz **A**). Tal característica é relevante em problemas estruturais envolvendo flambagem e flexão.¹¹

Figura 51 – Operador de troca de lâminas aplicado em um laminado com 4 camadas.

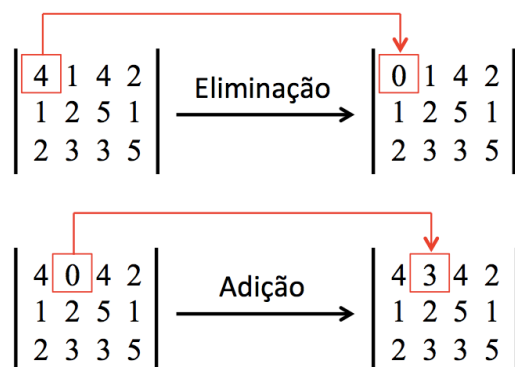


Fonte: Elaborada pelo autor.

O operador de eliminação é aplicado a cada camada e atua zerando sua espessura, efetivamente removendo a camada em questão. É importante ressaltar, porém, que tanto o

ângulo quanto o material continuam armazenados, mas são ignorados durante a decodificação. Sua probabilidade de ocorrência, denominada *probabilidade de eliminação* (p_e), geralmente possui um valor baixo, assim como a probabilidade de mutação.

Figura 52 – Operadores de adição e eliminação aplicados em um laminado com 4 camadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O operador de adição atua de forma oposta ao de eliminação. Para cada camada previamente eliminada, um valor r entre 0 e 1 é sorteado. Se ele for menor que a *probabilidade de adição* (p_a), um inteiro aleatório é atribuído à espessura da camada, obedecendo o limite máximo de valores da lista de espessuras. A Figura 52 mostra exemplos tanto da adição quanto da eliminação de lâminas.

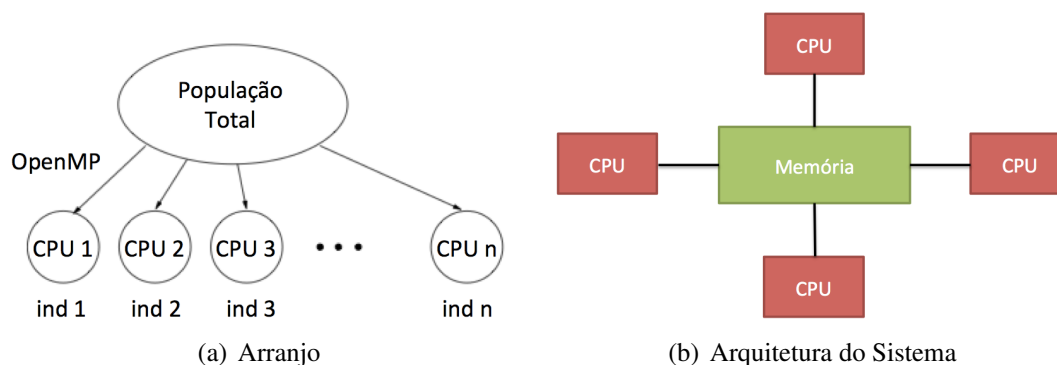
5.2.7 Paralelismo Híbrido

Como mencionado anteriormente, AGs tendem a se tornar computacionalmente caros quando o processo de avaliação dos indivíduos se torna complexo e, portanto, mais fiel à realidade. No caso particular da otimização estrutural usando o MEF, a avaliação dos indivíduos se torna a parcela do algoritmo que demanda mais tempo de processamento. Tal fato é ainda mais acentuado quando metodologias de análise não-linear são usadas. Porém, a avaliação de um indivíduo depende apenas dos valores de suas próprias variáveis e, portanto, pode ser prontamente implementada em paralelo.^{32,119}

Várias técnicas de paralelização podem ser utilizadas em AGs.³² Neste trabalho, duas técnicas distintas, a Paralelização Global e a técnica *Coarse-Grained*, serão combinadas para formar um algoritmo com paralelização híbrida.

O esquema de Paralelização Global é a forma mais simples de paralelizar um AG. É também a forma que mais se assemelha a um AG sequencial. Tal técnica mantém o conceito de população única, na qual os indivíduos podem cruzar com quaisquer outros da população.³² Consequentemente, todos os indivíduos da população competem entre si, ocupando o mesmo espaço evolutivo. Tal configuração é também chamada de panmítica, o que indica que todos os indivíduos estão livres para cruzar entre si sem restrições adicionais.¹¹⁹

Figura 53 – Paralelização Global.



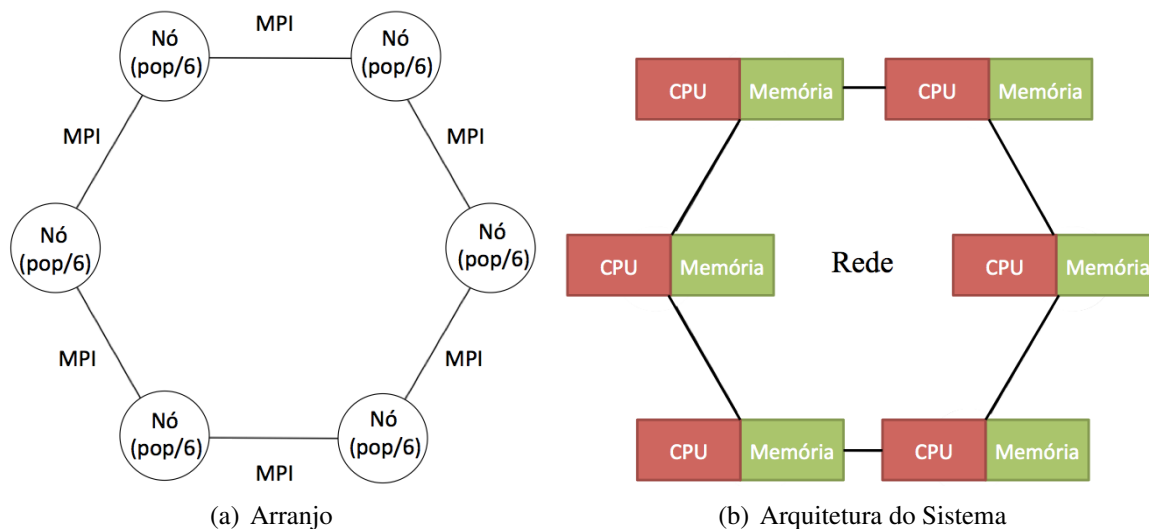
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em sua forma mais simples, a Paralelização Global consiste em paralelizar apenas a avaliação dos indivíduos. Neste trabalho, outras operações são também paralelizadas, como a aplicação dos operadores genéticos, o cálculo da função objetivo penalizada e o cálculo da função aptidão. A Figura 53 mostra a ideia básica da Paralelização Global em um ambiente de memória compartilhada.

Neste algoritmo, tal nível de paralelismo é realizado utilizando a biblioteca OpenMP,¹¹⁴ idealizada para uso em ambientes de memória compartilhada. É importante ressaltar que a Paralelização Global foi originalmente criada para uso em ambientes de memória distribuída. Nesse caso, um dos processadores é eleito o mestre (*Master Thread*) e distribui os indivíduos para os outros processadores (*Slave Threads*), posteriormente recebendo os resultados das avaliações. Porém, tais operações demandariam um esforço de implementação consideravelmente maior e introduziriam um tempo de comunicação adicional entre os computadores (*communication overhead*). Com o advento de computadores com múltiplos núcleos (*multi-core*) de memória compartilhada e o surgimento do OpenMP, o tempo de comunicação foi eliminado e a divisão de tarefas é realizada automaticamente, facilitando a implementação.

Neste âmbito, convém ressaltar que muito embora todos os computadores atuais possuam arquitetura *multi-core*, poucos programadores exploram seu potencial, deixando de utilizar a maior parte do poder de processamento disponível. Portanto, é de grande importância o estudo de técnicas de computação paralela, particularmente em aplicações computacionalmente pesadas.

A paralelização de granularidade grossa, ou *Coarse-Grained*, é também chamada de Modelo de Ilhas (*Island Model*). Nesta estratégia, a população original é dividida em uma série de subpopulações denominadas *ilhas* ou *demes*.³² Tais ilhas evoluem em paralelo e permanecem isoladas umas das outras durante a maior parte do tempo. Desta forma, a característica panmítica do algoritmo é perdida, pois indivíduos de uma ilha podem cruzar apenas com outros indivíduos da mesma ilha. Um ponto chave nesta abordagem é que as ilhas se comunicam periodicamente através de um operador denominado *Migração*.

Figura 54 – Paralelização *Coarse-Grained*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em processos naturais de evolução, a *Teoria do Equilíbrio Pontuado* diz que, durante a maior parte do tempo, uma população não exibirá mudanças genéticas significativas e se manterá em um estado de equilíbrio ou *estase*, mas mudanças ambientais bruscas têm a capacidade de causar um rápido processo evolutivo.³² Isso é especialmente válido em pequenas populações, onde mudanças evolutivas não são diluídas por um grande número de indivíduos. Em AGs, uma configuração em ilhas com pouca comunicação tende a apresentar um comportamento similar, com a inserção brusca de indivíduos através da migração ocasionando rápidas mudanças genéticas na população.

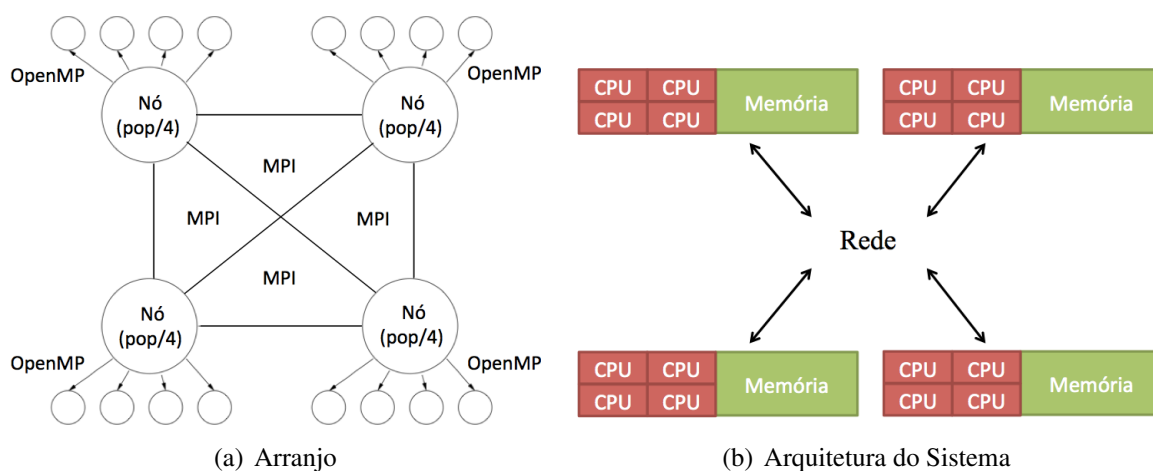
Tal ligação com a genética evolutiva, apesar de fornecer uma forte base teórica para o uso de configurações em ilhas, não foi a motivação original para sua criação. Tais algoritmos foram inicialmente idealizados com o objetivo de reduzir o tempo de comunicação em sistemas de memória distribuída a partir do isolamento de parcelas da população.³²

O desempenho de um AG *coarse-grained* é diretamente afetado por três fatores principais: o *intervalo de migração*, que representa a frequência com a qual as migrações ocorrem, a *topologia*, que governa a direção das migrações e a *taxa de migração*, que representa o número de indivíduos movidos em uma migração. A Figura 54 mostra um AG com 6 ilhas arranjadas em uma topologia de anel.

Algoritmos baseados no modelo *coarse-grained* foram desenvolvidos tendo em mente configurações de memória distribuída e têm como objetivo regular o processo de migração de modo que sua eficiência se torne igual ou melhor do que a de um AG panmítico com o mesmo número total de indivíduos, buscando também a minimização do tempo (*overhead*) de comunicação. Neste trabalho, tais comunicações foram realizadas utilizando a biblioteca MPI (*Message Passing Interface*).¹¹⁵

O algoritmo proposto é uma combinação das duas estratégias mostradas anterior-

Figura 55 – Paralelização Híbrida.



Fonte: Elaborada pelo autor.

mente em um arranjo híbrido. Em um nó de um *cluster* ou em um computador convencional com arquitetura *multi-core*, cada subpopulação evolui utilizando o esquema da Paralelização Global. Quando múltiplos nós de um *cluster* são usados ou quando vários computadores pessoais são ligados em rede (*Network of Workstations*), as múltiplas subpopulações (ilhas) são executadas em paralelo (abordagem *coarse-grained*) e realizam migrações utilizando uma topologia em malha completa (*fully connected*), onde todas as ilhas estão ligadas entre si. O AG resultante, mostrado na Figura 55, combina as melhores características do OpenMP e do MPI e pode ser executado em qualquer computador com arquitetura *multi-core*.

Aproveitando o arranjo em ilhas, os parâmetros genéticos (t_c, p_m, p_s, p_a, p_e) podem variar de uma ilha para a outra, inspirado no que foi feito no trabalho de Tanese (1987).³³ Assim, ao invés de definir valores fixos para os parâmetros, o usuário define faixas para cada um deles e os valores em cada ilha são sorteados dentro das faixas fornecidas. Isso efetivamente cria múltiplos ambientes evolutivos, o que ajuda a evitar problemas de convergência prematura, melhora a exploração do espaço de projeto e evita a necessidade de ajustar os parâmetros genéticos para cada problema analisado.

5.2.8 Balanceamento de Carga

No uso do algoritmo proposto, alguns cuidados devem ser tomados de modo a evitar problemas de balanceamento de carga, isto é, de modo a fazer com que todos os processadores trabalhem em sua capacidade máxima durante todo o processo de otimização. Em outras palavras, o balanceamento de carga não é automaticamente realizado pelo programa, sendo classificado como estático.

A primeira recomendação diz respeito ao tamanho da população. Em um computador pessoal com n núcleos ou em um cluster com n núcleos por nó, a população de cada ilha deve ser um múltiplo de n . Se, por exemplo, um computador possui 8 processadores e uma

subpopulação de 9 indivíduos é utilizada, 7 núcleos estarão ociosos enquanto o último indivíduo é avaliado, efetivamente dobrando o tempo de execução da otimização.

Outra recomendação diz respeito à taxa de cruzamento t_c . Como o número de indivíduos gerados pelo cruzamento influencia diretamente o número de avaliações de indivíduo (os filhos devem ser avaliados), o uso de diferentes taxas causa uma falta de sincronismo entre as ilhas e, portanto, um aumento no tempo de execução. Isso ocorre pois todas as ilhas devem estar na mesma geração para que o processo de migração seja iniciado. Assim, é recomendado que a taxa de cruzamento seja mantida constante, embora seja possível utilizar uma faixa de valores assim como nos outros operadores.

5.3 Implementação Computacional

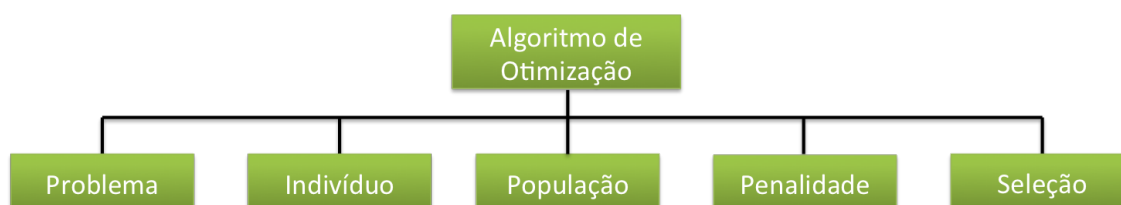
O algoritmo descrito foi implementado utilizando a linguagem C++ e o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). Foi então criado o programa BIO (*Biologically Inspired Optimization Tool*), com o objetivo de conter não só algoritmos genéticos, mas outros algoritmos evolutivos, como o Enxame de Partículas,¹²⁰ Colônia de Formigas,¹²¹ dentre outros.

Inicialmente, a estrutura geral do programa será apresentada, com a descrição das classes criadas e de suas estruturas hierárquicas. Posteriormente, detalhes de implementação das duas técnicas de computação paralela utilizadas serão mostrados. É importante ressaltar que embora o programa possa vir a comportar outros algoritmos futuramente, a presente discussão será focada na implementação do algoritmo genético formulado.

5.3.1 Estrutura Geral do Programa BIO

As principais classes do programa BIO e suas relações são mostradas na Figura 56. Assim como mostrado para o programa FAST, tal diagrama não representa relações hierárquicas entre as classes, mas relações do tipo "has a". A seguir, cada uma das classes será explicada separadamente.

Figura 56 – Estrutura Geral do Programa BIO.



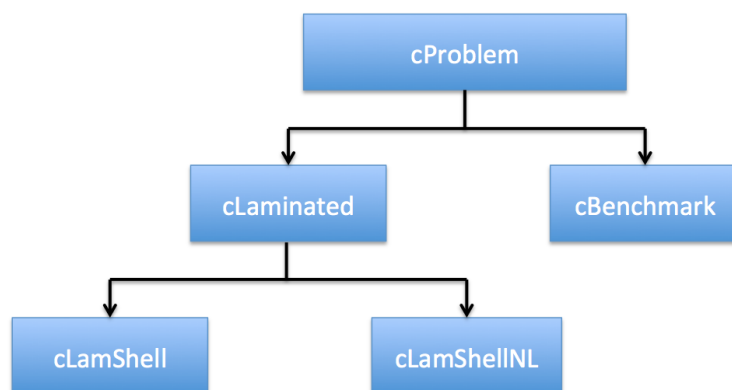
Fonte: Elaborada pelo autor.

A classe do algoritmo de otimização, *cOptAlg*, é responsável por controlar o processo de otimização, com a criação e destruição de indivíduos, aplicação de operadores genéticos e controle da convergência e critérios de parada. Atualmente, somente o algoritmo genético para

problemas laminados, *cLamGA*, está implementado, mas novos algoritmos podem ser futuramente derivados da classe base. O objeto da classe algoritmo possui objetos para as classes Problema, Penalidade, Seleção e Indivíduo.

A classe Problema, *cProblem*, lida com os aspectos relacionados ao problema de otimização a ser resolvido, com a definição das variáveis de projeto e seus limites e com a rotina de avaliação da Função Objetivo e das Restrições de um dado indivíduo. É importante ressaltar, portanto, que a classe do algoritmo não lida com os valores reais das variáveis, mas apenas com sua representação genotípica. Já a classe problema é a responsável pelo processo de decodificação e, portanto, lida com a representação fenotípica das variáveis. Ressalta-se também que a classe *cProblem* não armazena os valores das variáveis de cada indivíduo, mas apenas as listas com os possíveis valores de cada variável. A Figura 57 mostra a atual hierarquia da classe *cProblem*.

Figura 57 – Hierarquia da Classe *cProblem*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dois tipos principais de problema estão implementados. Os problemas da classe *cBenchmark* são problemas numéricos simples cujas soluções estão disponíveis na literatura. Tais problemas são utilizados para validar e verificar novas implementações realizadas no programa antes de tratar problemas mais complexos. Já a classe *cLaminated* lida com problemas relacionados a compósitos laminados, com a definição de funções comuns para qualquer tipo de problema compósito, como a decodificação e consideração de laminados simétricos e simétricos-balanceados. Dela são derivados os dois tipos de problema utilizados nesta dissertação, a classe *cLamShell* e a classe *cLamShellNL*. Em ambas, a análise de cascas é tratada utilizando o programa FAST, descrito anteriormente.

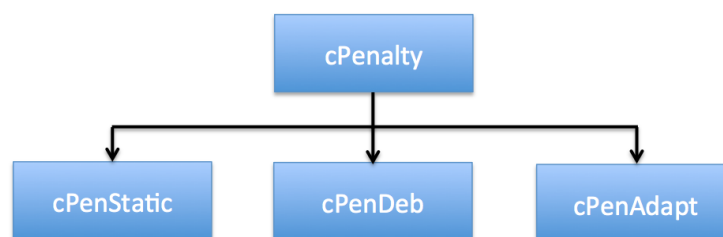
A classe *cLamShell* trata da otimização de problemas de casca lineares, cujas tensões e matrizes constitutivas são pré-integradas na seção transversal. Devido a este fato, os critérios de falha são calculados diretamente no programa de otimização a partir dos esforços resultantes em cada ponto de Gauss lidos do arquivo de saída do programa FAST. Para isso, a matriz **ABD** (Equação 36) do laminado é calculada e utilizada para encontrar as tensões em cada ponto da espessura do mesmo. As tensões são então utilizadas para calcular os fatores de segurança de

falha da primeira lâmina (FPF) utilizando algum dos critérios implementados (Máxima Tensão, Tsai-Hill, Tsai-Wu).

Já na classe *cLamShellNL*, os problemas com não-linearidade física ou geométrica são tratados. Neles, a seção transversal da casca é integrada durante a análise e os critérios de falha já são avaliados dentro do programa FAST. Assim, a implementação do problema de otimização é simplificada e somente a leitura dos valores de carga e deslocamento de cada passo da análise é realizada.

A classe Penalidade, *cPenalty*, contém os métodos de penalidade descritos na Seção 5.2.2, utilizados em problemas de otimização com restrição. A sua hierarquia é mostrada na Figura 58, contendo uma classe base abstrata e uma classe derivada para cada método. A função delas é receber um conjunto de indivíduos e calcular a função objetivo penalizada de cada um deles.

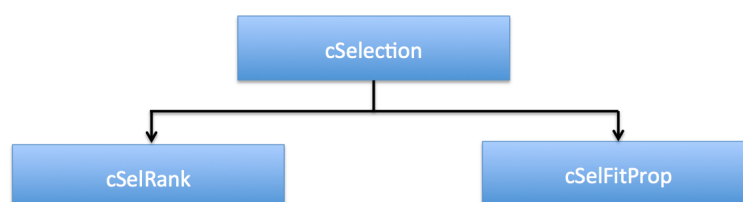
Figura 58 – Hierarquia da classe *cPenalty*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já a classe Seleção, *cSelection*, contém os dois métodos de cálculo de probabilidade de seleção mostrados na Seção 5.2.3. Sua estrutura hierárquica é mostrada na Figura 59. É importante ressaltar que ambos os métodos de seleção utilizam a estratégia da Roleta para selecionar indivíduos. Futuramente, outros métodos, como o Torneio e a Amostragem Estocástica, podem ser incorporados. O objetivo dos métodos é receber uma população de indivíduos e retornar outra população de indivíduos selecionados a partir dos primeiros.

Figura 59 – Hierarquia da classe *cSelection*.

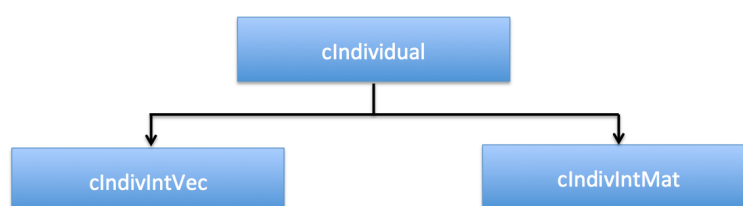


Fonte: Elaborada pelo autor.

A classe Indivíduo, *cIndividual*, é responsável por armazenar os valores das variáveis de projeto (genótipo) e os valores da função objetivo, função objetivo penalizada e aptidão.

Cada objeto representa, portanto, um indivíduo. Além de armazenar tais dados, a classe é responsável pelos operadores genéticos, cujas formulações podem variar dependendo do tipo de indivíduo utilizado. A hierarquia atual da classe é mostrada na Figura 60. Por fim, a classe População, *cPopulation*, é responsável por armazenar e gerenciar um conjunto de indivíduos, auxiliando na criação e ordenação dos mesmos. Para os problemas numéricos da classe *cBenchmark*, utiliza-se indivíduos cujas variáveis são armazenadas em um vetor de números inteiros (*cIndivIntVec*), enquanto que para problemas laminados utiliza-se indivíduos do tipo *cIndivIntMat*, cujas variáveis são armazenadas em uma matriz de inteiros.

Figura 60 – Hierarquia da classe *cIndividual*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

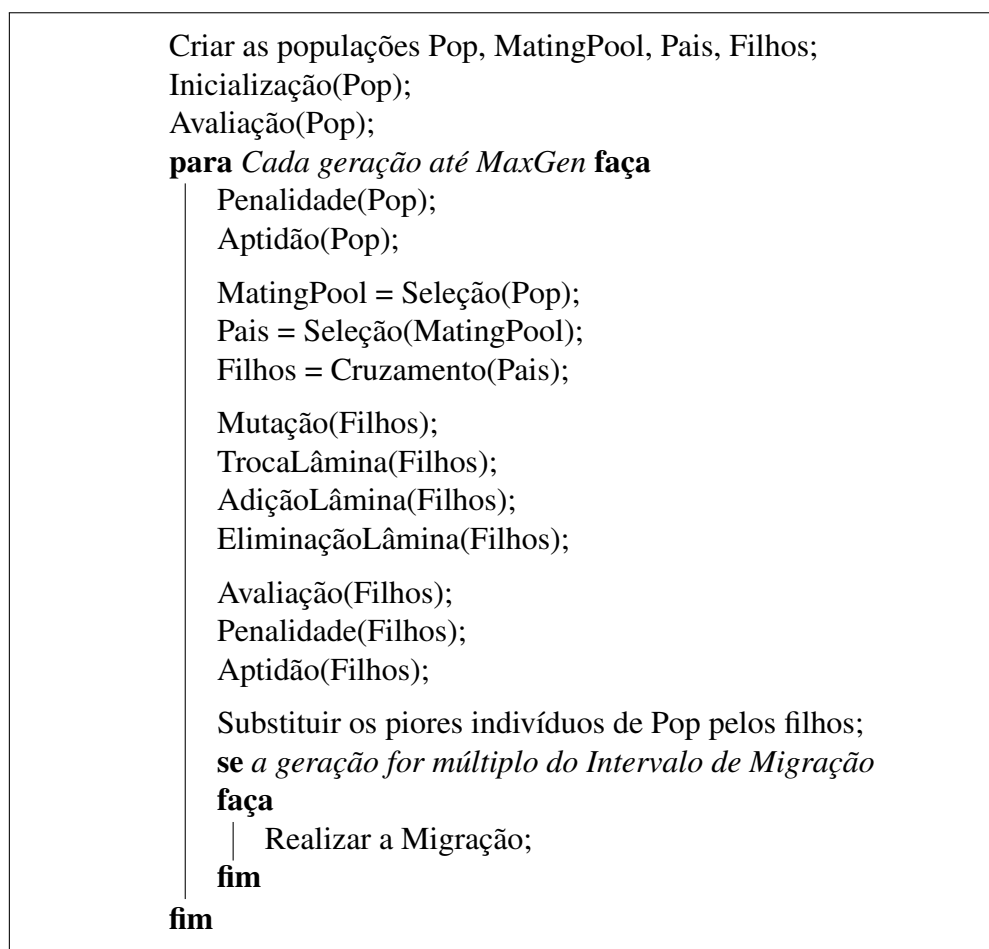
Utilizando as classes apresentadas, o fluxo da resolução de um problema usando o algoritmo proposto nesta dissertação pode ser representado pela sequência de passos mostrada na Figura 61. Nela, é importante ressaltar que o elitismo é aplicado como consequência da substituição dos piores indivíduos da população corrente pelos novos indivíduos gerados pelo cruzamento. Assim, em uma população de 100 indivíduos e utilizando uma taxa de cruzamento igual a 0.80, os 80 piores indivíduos serão substituídos pelos filhos gerados e os 20 melhores permanecerão por elitismo.

5.3.2 Técnicas de Paralelização

Como mencionado anteriormente, a paralelização do algoritmo proposto foi realizada combinando duas bibliotecas distintas, OpenMP¹¹⁴ na paralelização de tarefas dentro de cada ilha e MPI¹¹⁵ para realizar a migração entre as ilhas. As diretivas de OpenMP foram utilizadas nos laços percorrendo todos os indivíduos de uma dada população. Os principais ganhos em tempo de execução foram obtidos paralelizando os laços de avaliação da função objetivo e restrições. Os operadores genéticos também foram paralelizados, assim como parte dos procedimentos de seleção e penalidade.

A principal vantagem do OpenMP reside em seu fácil uso, consistindo no uso de diretivas de compilação denominadas *pragmas*. Assim, em todos os laços *for* a serem paralelizados, adicionou-se a diretiva `#pragma omp parallel for`. A Figura 62 mostra um trecho de código sequencial e o mesmo trecho paralelizado utilizando OpenMP, juntamente com as respectivas cargas em cada um dos 4 núcleos de um computador pessoal.

Figura 61 – Fluxo do algoritmo genético.

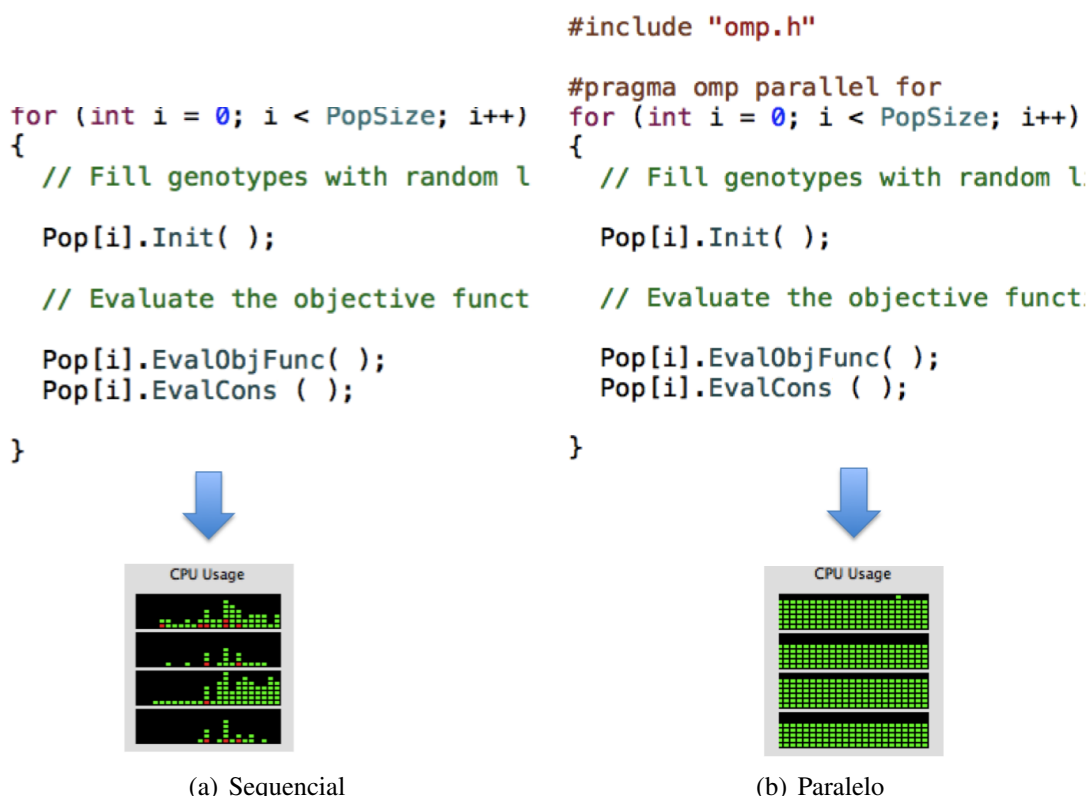


Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que a determinação da parcela do laço que vai para cada processador é feita automaticamente e o código permanece praticamente inalterado. Porém, deve-se garantir que dois processadores não tentem armazenar dados na mesma posição de memória ao mesmo tempo, o que causaria a subscrição dos dados. Isto é feito a partir da declaração de variáveis particulares para cada processador (declaradas dentro do laço) e da correta indexação de vetores e matrizes. Nota-se portanto que a paralelização utilizando OpenMP é simples, mas exige cuidados e pode exigir alterações nos códigos das regiões paralelizadas.

Utilizando OpenMP, apenas uma instância do programa é executada e a divisão do trabalho para cada unidade de processamento é realizada dinamicamente durante a execução. Já utilizando MPI, a paralelização se dá de um modo diferente. Nele, cada computador (memória distribuída) ou processador (memória compartilhada) roda uma instância independente do programa. As diretivas da biblioteca MPI têm como objetivo a passagem de dados (mensagens) entre as instâncias sendo executadas, realizando a comunicação entre as mesmas.

A paralelização usando MPI é, portanto, consideravelmente mais complexa, já que a divisão de tarefas deve ser feita explicitamente através de estruturas condicionais (*if-else*).

Figura 62 – Exemplo de paralelização de um laço *for* utilizando OpenMP.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A cada processo executando uma instância do programa é atribuído um número inteiro denominado *rank*, que o identifica dentre os outros processos. O número total de processos sendo executados, denominado *size*, também pode ser acessado por qualquer um dos processos. Utilizando apenas estes dois dados, o programador deve paralelizar o código dividindo manualmente as tarefas para cada processo.

No caso do presente algoritmo, cada instância do programa (ilha) é executada de forma independente até que a função de migração seja chamada. Nela, os melhores indivíduos da população corrente (*Pop*) são enviados utilizando a função *Send* e os piores indivíduos são substituídos por indivíduos recebidos das outras ilhas utilizando a função *Receive* (Figura 63). Ambas as funções foram implementadas na classe *cIndividual*, do mesmo modo realizado com os outros operadores genéticos.

A função *Send* envia os dados do indivíduo para todas as outras ilhas, tendo em vista que elas são interligadas em uma topologia de malha completa (*Fully Connected*). Seu algoritmo pode ser visto na Figura 64. Já a função *Receive* recebe um indivíduo de uma ilha cujo *rank* é passado como argumento e substitui os dados do indivíduo que chama a função pelos dados do indivíduo recebido, sendo utilizada portanto pelos piores indivíduos da população corrente. O algoritmo da função é mostrado na Figura 65. É importante ressaltar que em ambos os casos se torna necessário armazenar os dados em vetores de memória contígua estaticamente

Figura 63 – Algoritmo de Migração.

```

Obter rank e size;
para i de 1 até NúmeroDeMigrações faça
  para ilha de 1 até size faça
    se ilha == rank faça
      | Pop[i].Send( );
    fim
    senão
      | Pop[popsize-i].Receive(ilha);
    fim
  fim
fim

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

alocados para que possam ser empacotados e enviados pelo MPI.

Figura 64 – Algoritmo da função *Send*.

```

Obter rank e size;
Empacotar os dados para envio;
para ilha de 1 até size faça
  se ilha != rank faça
    | Enviar variáveis para ilha;
    | Enviar função objetivo para ilha;
    | Enviar restrições para ilha;
  fim
fim

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Algoritmo da função *Receive*.

Entrada: Inteiro *ilha*
Obter *rank* e *size*;
Receber variáveis de *ilha*;
Receber função objetivo de *ilha*;
Receber restrições de *ilha*;
Sobrescrever os dados do indivíduo pelos recebidos;

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 EXEMPLOS DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados exemplos numéricos de otimização de placas e cascas laminadas. Inicialmente serão otimizados dois exemplos utilizando análise linear, com o objetivo de avaliar o desempenho e realizar a verificação do AG implementado. Posteriormente, exemplos utilizando as metodologias de análise não-linear formuladas nos capítulos anteriores serão tratados.

Em todos os exemplos, a avaliação dos indivíduos para o cálculo da função objetivo e restrições foi realizada pelo Método dos Elementos Finitos através do programa FAST. A ligação entre os dois programas foi realizada utilizando arquivos de dados. Nos exemplos a serem apresentados, todas as variáveis de projeto são relacionadas ao esquema de laminação. Assim, dois arquivos auxiliares foram utilizados, o primeiro com o início do arquivo de dados do programa FAST para o exemplo em questão, contendo os parâmetros de controle da análise, coordenadas dos nós, apoios e material. Já o segundo arquivo contém a malha de elementos finitos e as cargas aplicadas. O programa de otimização então toma o primeiro arquivo, escrevendo nele o esquema de laminação de um dado indivíduo e cola o segundo arquivo no final deste, montando o arquivo de dados final para análise.

De modo a coletar os resultados, o programa BIO lê o arquivo de saída gerado na execução do programa FAST e procura os resultados desejados. É importante ressaltar que todas essas etapas fazem parte da avaliação dos indivíduos, sendo portanto executadas em paralelo.

Na execução dos exemplos, duas plataformas computacionais foram utilizadas. A principal foi um *cluster* fabricado pela empresa SGI com 5 nós (*Compute Nodes*) interligados por uma rede Gigabit em uma topologia de malha completa. Cada nó possui dois processadores AMD Opteron(TM) 6234 com 12 núcleos de 2.4 MHz cada, totalizando 24 núcleos por nó. Um Nó Mestre (*Head Node*) com a mesma configuração também se faz presente, mas é utilizado apenas para tarefas do sistema operacional. Cada nó possui 64 gigabytes de RAM e 3 terabytes de HD. O sistema roda o sistema operacional Linux Red Hat versão 4.4.5-6.

A segunda plataforma utilizada consistiu em 5 computadores pessoais ligados em rede (*Network of Workstations*). Cada um deles possui um processador Intel Core-i7(TM) de terceira geração com 4 núcleos físicos (4 núcleos virtuais adicionais podem ser utilizados através de *Hyper-Threading*), 4 gigabytes de RAM e 1 terabyte de HD. Os computadores rodam o sistema Linux Ubuntu versão 12.04.2 LTS. Ambas as plataformas pertencem ao Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará.

Por fim, ressalta-se que o método de penalidade adaptativa de Barbosa e Lemonge (2004)¹¹⁶ e a Seleção Proporcional à Aptidão, ambos descritos no Capítulo 5, foram utilizados em todos os exemplos a serem apresentados.

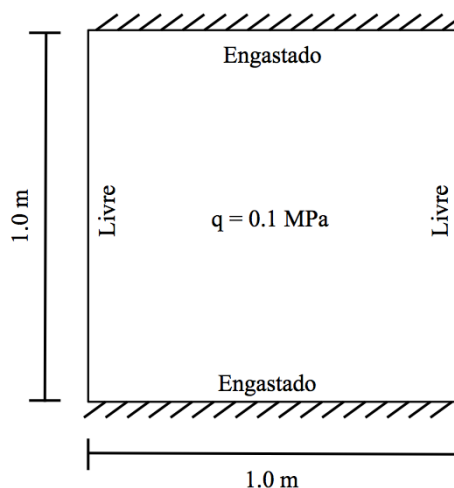
6.1 Exemplos Lineares

No primeiro conjunto de exemplos, utiliza-se apenas análise linear tanto física quanto geométrica na avaliação dos indivíduos. Isso torna possível a validação e verificação do AG implementado, a avaliação do seu desempenho e o estudo dos ganhos obtidos com o uso das técnicas de computação paralela. Para isso, dois exemplos foram escolhidos. O primeiro deles diz respeito à minimização simultânea do peso e deflexão de uma placa submetida a carga transversal e procura analisar tanto o desempenho do algoritmo como os efeitos do arranjo em ilhas. Já o segundo exemplo consiste na minimização do custo de material em um painel curvo com um furo central submetido a cargas axiais, procurando analisar o comportamento do algoritmo quando o material também é considerado uma variável de projeto.

6.1.1 Placa Submetida a Carga Transversal

O primeiro exemplo foi extraído do trabalho de Almeida e Awruch (2009)⁸ e consiste na minimização simultânea do peso e da deflexão no centro de uma placa quadrada sujeita a uma carga transversal constante. A geometria, carga e condições de contorno da placa são mostradas na Figura 66. Ela foi discretizada utilizando 400 elementos de casca abatida Q8 com integração reduzida, totalizando 6405 graus de liberdade.

Figura 66 – Geometria e condições de contorno da placa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste exemplo, o conceito de Taxa de Sucesso (*Reliability*) será utilizado. Ela é definida como o número de otimizações nas quais ao menos um ótimo global foi encontrado (N_o) dividido pelo número total de otimizações (N):⁸

$$R(\%) = 100 \cdot \frac{N_o}{N} \quad (158)$$

De modo a comparar os resultados obtidos, a placa foi considerada fina e portanto

Tabela 17 – Propriedades do Grafite-Epoxy.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ρ (kN/m^3)	X_T (MPa)	X_C (MPa)	Y_T (MPa)	Y_C (MPa)	S_6 (MPa)
181.0	10.3	7.17	0.28	15.7	1500	1500	40	246	68

FONTE: Almeida e Awruch (2009).⁸

todos os termos de cisalhamento transversal foram desprezados. Assim, as propriedades corresponderam apenas àquelas de um estado plano de tensões (Tabela 17). No presente exemplo, apenas a falha da primeira lâmina (FPF) foi considerada, com o cálculo do índice de falha λ_f utilizando o critério de Tsai-Wu (Seção 4.1.4):

$$\lambda_f = \frac{1}{FS} \quad (159)$$

onde FS é o fator de segurança mostrado na Eq. (125).

A minimização simultânea do peso e da deflexão requer a utilização de uma formulação multiobjetivo, tendo em vista que estes são objetivos opostos. Nesse exemplo, o Método da Soma Ponderada,⁷ no qual um fator de ponderação é atribuído a cada objetivo, será utilizado. Tal método é mais indicado quando o projetista já sabe de antemão a ênfase que deseja dar a cada um dos objetivos, já que ele só é capaz de obter a curva de Pareto quando esta é convexa.¹²² Porém, como a fronteira para este problema é basicamente convexa, o Método da Soma Ponderada será utilizado devido à sua simplicidade. Definindo $w \in [0, 1]$ como o fator de ponderação dado à minimização do peso da placa, a função objetivo do problema pode ser definida por:

$$f_{obj} = w \cdot \frac{W - W_{min}}{W_{max} - W_{min}} + (1 - w) \cdot \frac{D - D_{min}}{D_{max} - D_{min}} \quad (160)$$

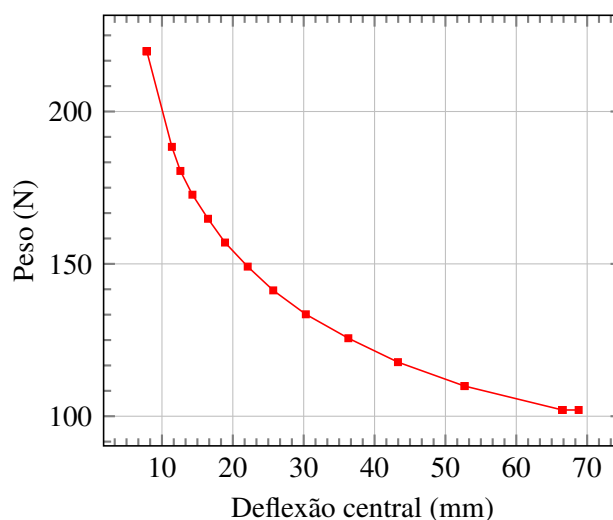
onde W é o peso e D é o deslocamento transversal do centro da placa (positivo para baixo). Os limites de normalização são obtidos fazendo $w = 0$ para obter W_{max} e D_{min} e $w = 1$ para obter W_{min} e D_{max} .

Como mencionado anteriormente, o problema inclui uma restrição de segurança baseada na falha da primeira lâmina pelo método de Tsai-Wu. Como a análise é fisicamente linear, a seção transversal da placa foi pré-integrada e as tensões foram obtidas apenas nos pontos iniciais e finais de cada lâmina. Obtendo então λ_f (Equação 159) para cada camada em cada ponto de integração no plano e tomando seu máximo λ_f^{max} , a restrição toma a forma:

$$g_1 = \lambda_f^{max} - 1 \leq 0 \quad (161)$$

A segunda restrição limita a espessura total de camadas contíguas de mesmo ângulo

Figura 67 – Fronteira de Pareto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(tt_{max}) a 2mm, caracterizando uma restrição de fabricação com o objetivo de evitar camadas muito espessas com a mesma orientação. A restrição foi expressa como:

$$g_2 = \frac{tt_{max}}{tt_{lim}} - 1 \leq 0 \quad (162)$$

6.1.1.1 Fronteira de Pareto

Primeiramente, o algoritmo proposto será utilizado para encontrar o máximo número de pontos de Pareto possível variando o fator de ponderação w em passos de 0.05. Os valores possíveis de ângulos e espessuras foram considerados os mesmos mostrados por Almeida e Awruch (2009) por motivos de comparação:⁸ $\theta \in \{-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ e $t \in \{0.75, 1.00, 1.50, 2.00\}mm$. Além disso, o número de camadas foi fixado em 8 e o laminado foi considerado simétrico.

Para cada valor de w , a otimização foi executada 100 vezes com subpopulações isoladas e 20 vezes utilizando 5 subpopulações com migração, também contabilizando 100 subpopulações. Assim, sem levar em consideração o tempo gasto com comunicação (*overhead*), o esforço computacional foi o mesmo tanto para o conjunto de otimizações isolado quanto para o conjunto com migração. Tal arranjo permite a observação de mudanças tanto na taxa de sucesso (R) quando no tempo por subpopulação (T) devido à migração.

Cada subpopulação possui 120 indivíduos e é executada por 50 gerações. Para todas as otimizações, $t_c = 0.80$. Para o conjunto isolado, $p_m = 0.10$ e $p_s = 0.05$, enquanto que no conjunto com migração, $0.05 \leq p_m \leq 0.20$ e $0.01 \leq p_s \leq 0.10$. Como o número de camadas foi fixado em 8, p_a e p_d foram considerados nulos para este problema. Os resultados são mostrados na Tabela 18 e a Fronteira de Pareto é mostrada na Figura 67.

O algoritmo foi capaz de obter ótimos globais para todos os valores de w . Porém,

Tabela 18 – Resultados para múltiplos valores de w .

w	Projeto Ótimo	$W(N)$	$D(mm)$	λ_f	Isolado		Migração	
					$R(\%)$	$T(s)$	$R(\%)$	$T(s)$
1.00	$[90^{0.75}/90^{1.0}/0^{0.75}/45^{0.75}]_s$	102.05	68.8	0.985	100%	40.91	100%	41.10
0.95	$[90^{1.0}/90^{0.75}/45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	102.05	66.5	0.992	100%	40.96	100%	41.10
0.90	$[90^{0.75}/90^{1.0}/45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	102.05	66.5	0.992	100%	40.92	100%	41.17
0.85	$[90^{0.75}/90^{1.0}/45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	102.05	66.5	0.992	100%	40.95	100%	41.12
0.80	$[90^{0.75}/90^{1.0}/45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	102.05	66.5	0.992	100%	40.97	100%	41.17
0.75	$[90^{1.0}/90^{1.0}/45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	109.90	52.7	0.836	99%	40.93	100%	41.08
0.70	$[90^{1.0}/90^{1.0}/45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	109.90	52.7	0.836	100%	40.92	100%	41.18
0.65	$[90^{1.0}/90^{1.0}/45^{0.75}/90^{1.0}]_s$	117.75	43.4	0.740	96%	40.94	100%	41.13
0.60	$[90^{1.0}/90^{1.0}/45^{1.0}/90^{1.0}]_s$	125.60	36.3	0.672	100%	40.95	100%	41.11
0.55	$[90^{2.0}/45^{0.75}/90^{0.75}/45^{0.75}]_s$	133.45	30.3	0.596	74%	40.87	100%	41.15
0.50	$[90^{2.0}/45^{0.75}/90^{1.0}/45^{0.75}]_s$	141.30	25.7	0.536	96%	40.95	100%	41.11
0.45	$[90^{2.0}/-45^{0.75}/90^{1.0}/-45^{1.0}]_s$	149.10	22.1	0.488	99%	40.98	100%	41.09
0.40	$[90^{2.0}/45^{0.75}/90^{1.5}/45^{0.75}]_s$	157.00	18.9	0.440	100%	40.96	100%	41.16
0.35	$[90^{2.0}/-45^{0.75}/90^{1.5}/-45^{1.0}]_s$	164.80	16.5	0.403	100%	40.95	100%	41.13
0.30	$[90^{2.0}/45^{0.75}/90^{2.0}/45^{0.75}]_s$	172.70	14.3	0.336	99%	40.92	100%	41.11
0.25	$[90^{2.0}/45^{0.75}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	180.50	12.6	0.337	100%	41.03	100%	41.20
0.20	$[90^{2.0}/45^{1.0}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	188.40	11.4	0.323	100%	40.96	100%	41.14
0.15	$[90^{2.0}/45^{2.0}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	219.80	7.86	0.291	100%	40.99	100%	41.08
0.10	$[90^{2.0}/45^{2.0}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	219.80	7.86	0.291	100%	40.91	100%	41.09
0.05	$[90^{2.0}/45^{2.0}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	219.80	7.86	0.291	100%	40.84	100%	41.21
0.00	$[90^{2.0}/45^{2.0}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	219.80	7.86	0.291	100%	40.97	100%	41.20

Fonte: Elaborada pelo autor.

a taxa de sucesso (R) cai abaixo de 100% para alguns casos no conjunto isolado, isto é, sem migração. Por exemplo, para $w = 0.55$, $R = 74\%$ para o conjunto de otimizações isoladas, enquanto que no conjunto com migração, $R = 100\%$ para todos os valores de w . É importante ressaltar que mesmo quando a taxa de sucesso cai abaixo de 100%, o algoritmo sempre encontra uma solução viável próxima do ótimo global.

Observando os tempos de execução, ambos obtidos no cluster, cada subpopulação com migração leva apenas 0.90% mais tempo para ser executada que uma subpopulação isolada. Tal fato mostra que os resultados podem ser melhorados utilizando migração e operadores genéticos aleatórios com um impacto muito pequeno no tempo de execução.

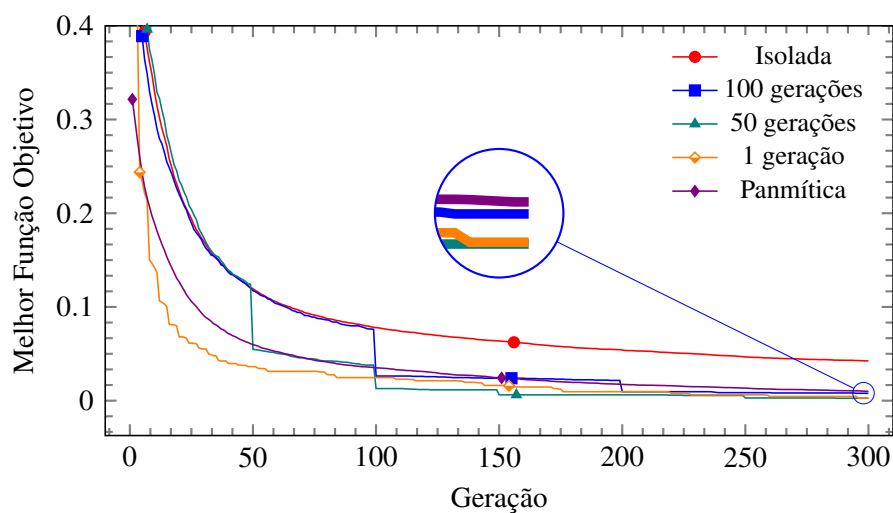
Comparando os resultados com os mostrados na literatura,⁸ um projeto mais leve foi encontrado para $w = 1.0$, com uma redução de 0.25mm na camada a 90° mais externa. Tal fato pode ser atribuído a diferenças nas formulações de elementos finitos e também na definição do critério de Tsai-Wu (valor de β_{12}), tendo em vista que λ_f é muito próximo de 1. Porém, quando a restrição de falha não está ativa, o algoritmo proposto obteve os mesmos pesos que Almeida e Awruch (2009).⁸ Comparando a deflexão no centro da placa, diferenças tendem a surgir à medida que a placa se torna espessa, com uma diferença de 0.50% para $w = 1.0$ e de 15.6% para $w = 0$. Tais discrepâncias também podem ter ocorrido devido a diferenças no tipo de elemento finito utilizado e no nível de refinamento da malha. Já no que diz respeito à taxa de sucesso, os valores obtidos foram melhores que os obtidos pelos autores até mesmo para o conjunto isolado, com menos pontos possuindo taxa de sucesso menor que 100%.

6.1.1.2 Efeitos da Migração

No próximo conjunto de otimizações, os efeitos da migração no desempenho e na taxa de sucesso do algoritmo serão estudados. Para isso, os limites das variáveis foram aumentados de modo a dificultar a solução do problema, caso contrário as diferenças na taxa de sucesso seriam imperceptíveis. Os limites inferiores e superiores das variáveis foram mantidos, com mais valores intermediários sendo adicionados: $\theta \in \{-45^\circ, -44^\circ, \dots, 89^\circ, 90^\circ\}$ e $t \in \{0.75, 1.00, \dots, 1.75, 2.00\}mm$. Além disso, de modo a analisar apenas os efeitos da migração, os operadores genéticos foram mantido fixos: $t_c = 0.80$, $p_m = 0.10$, $p_s = 0.05$. Nesse caso, a média de 200 subpopulações de 24 indivíduos cada foi considerada (40 execuções com migração ou 200 execuções sem migração). Em todos os casos, a otimização durou 300 gerações e apenas o peso foi minimizado, isto é, $w = 1.00$.

Primeiro, a influência da taxa de migração foi analisada. Para isso, intervalos de migração de 1, 5, 10, 50 e 100 gerações foram utilizados, com o número de indivíduos por migração fixado em 1. Adicionalmente, um conjunto de subpopulações isoladas foi executado, assim como um conjunto panmítico com populações de 120 indivíduos. O objetivo é encontrar uma taxa de migração que faça o algoritmo paralelizado obter uma eficiência igual ou melhor que a de uma população panmítica, que leva muito mais tempo para ser executada em um ambiente de memória distribuída como o *cluster* utilizado.³²

Figura 68 – Melhor indivíduo ao longo das gerações.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 19 – Análise do efeito da taxa de migração.

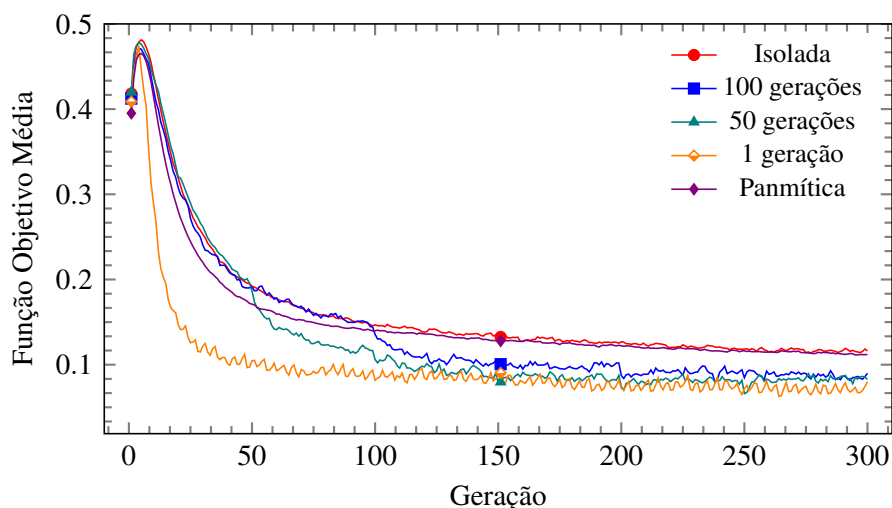
Intervalo de Migração	Número de Migrações	Taxa de Sucesso (R)	Tempo (s)
Isolada	0	36.3%	65.36
100	2	82.5%	65.36
50	5	90.4%	65.86
10	29	87.5%	67.44
5	59	85.0%	68.73
1	299	90.0%	69.23
Panmítica	0	79.3%	240.87

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 68 mostra o melhor indivíduo em cada geração, obtido como uma média de 200 subpopulações, como mencionado anteriormente. O gráfico mostra os dois casos limite, subpopulações isoladas de 24 indivíduos e populações isoladas de 120 indivíduos, assim como os resultados para três diferentes taxas de migração. A primeira observação importante é que o desempenho do algoritmo em ilhas não é apenas equivalente ao da população panmítica, mas melhor, para qualquer uma das taxas de migração analisadas. Tal fato é evidenciado pela função objetivo do melhor indivíduo na última geração (Figura 68), que é um indicador da taxa de sucesso do algoritmo, visto que o gráfico foi obtido como uma média de 200 subpopulações. A taxa de sucesso pode também ser vista na Tabela 19 para todas as taxas de migração analisadas. Assim, nota-se que o algoritmo em ilhas não é apenas mais rápido, mas também fornece melhores resultados que populações panmíticas com o mesmo número total de indivíduos.

Também é interessante observar que nas gerações onde a migração ocorre há uma queda abrupta na função objetivo do melhor indivíduo em todas as subpopulações. Isso causa uma aceleração na convergência do algoritmo, sendo mais rápida até mesmo que o caso panmítico, confirmando a relação de AGs baseados no modelo de ilhas e a *Teoria do Equilíbrio Pontuado*.³² Tal comportamento pode ser também observado traçando a função objetivo média da população corrente ao longo das gerações (Figura 69). Observando os casos com taxa de migração de 100 e 50 gerações, nota-se claramente que a função objetivo média da população sofre quedas acentuadas nas gerações nas quais a migração ocorre.

Figura 69 – Indivíduo médio ao longo das gerações.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No que diz respeito ao tempo de execução, o tempo por subpopulação aumenta com a taxa de migração, como era esperado, uma vez que o tempo de comunicação aumenta (Tabela 19). Porém, mesmo com a taxa de migração mais alta (migração em todas as gerações), o tempo total aumenta apenas 5.9% em relação ao caso totalmente isolado. Isso indica que o *overhead* de comunicação é sempre muito pequeno até mesmo em uma rede Gigabit, pois poucos dados

Tabela 20 – Análise do efeito do número de indivíduos por migração.

Indivíduos por Migração	Taxa de Sucesso (R)	Tempo (s)
1	82.5%	65.36
2	87.5%	65.36
3	84.0%	65.36
4	84.5%	65.36

Fonte: Elaborada pelo autor.

precisam ser transmitidos. Uma vez que a taxa de sucesso permanece praticamente a mesma para todas as taxas de migração analisadas, parece interessante utilizar taxas baixas (100 a 10 gerações), minimizando o tempo de comunicação.

Em seguida, a influência do número de indivíduos por migração foi considerada. Levando em consideração os resultados obtidos anteriormente, uma taxa de migração de 100 gerações foi utilizada, mas agora o número de indivíduos por migração foi aumentado. Os resultados em termos de taxa de sucesso e tempo por subpopulação são mostrados na Tabela 20. Os resultados sugerem que tanto a taxa de sucesso como o tempo não mostram sensibilidade considerável a aumentos no número de indivíduos por migração. Porém, à medida que mais indivíduos migram, a população se torna mais uniforme, correndo o risco de sofrer convergência prematura. Assim, parece melhor enviar 1 ou 2 indivíduos por migração.

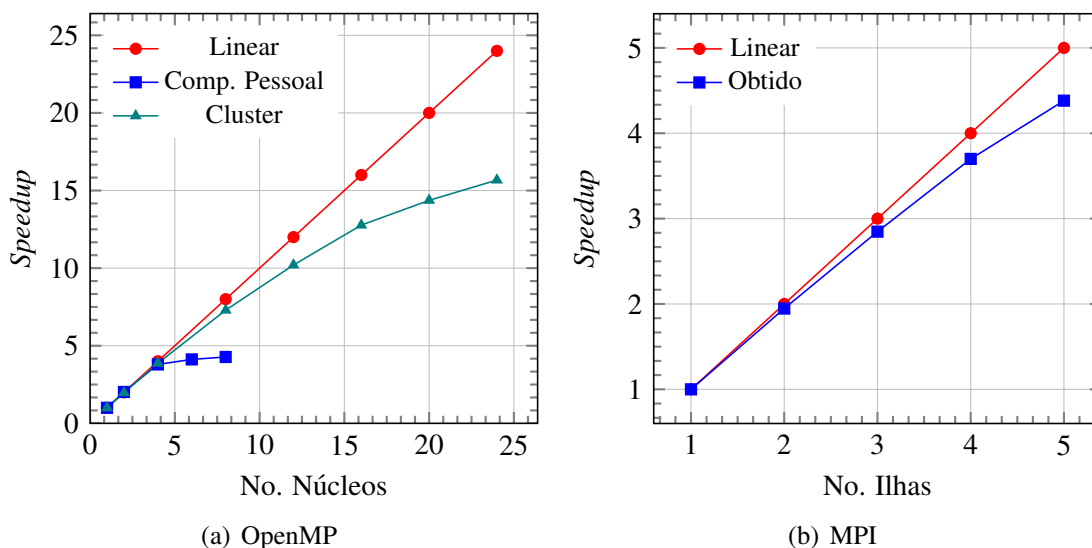
6.1.1.3 Medidas de Speedup

Por definição, o *speedup* é a relação entre o tempo de execução da versão sequencial (não-paralelizada) do algoritmo e o tempo de execução em paralelo utilizando m processadores:

$$S_m = \frac{T_1}{T_m} \quad (163)$$

O *speedup* é dito sublinear se $S_m < m$, linear se $S_m = m$ e super-linear se $S_m > m$. É importante tomar qualquer medida de *speedup* como uma média de várias execuções, tendo em vista que fatores exógenos e flutuações aleatórias no tempo de execução podem levar a medidas imprecisas. Os *speedups* do algoritmo proposto foram medidos separadamente para cada tipo de paralelização utilizado. No caso da paralelização com OpenMP, uma população isolada foi executada tanto em um nó do *cluster* quanto em um computador pessoal. Cada valor de *speedup* foi calculado como uma média de 5 execuções. Os resultados podem ser vistos na Figura 70a.

Ambos os computadores apresentaram *speedups* satisfatórios. É importante ressaltar que muito embora 8 núcleos possam ser utilizados no computador pessoal, o desempenho é próximo ao de 4 núcleos. Tal fato era esperado tendo em vista que apenas 4 núcleos físicos estão efetivamente presentes. Muito embora ambos os *speedups* tenham sido sublineares devido

Figura 70 – Medidas de *speedup*

Fonte: Elaborada pelo autor.

a porções do código não-paralelizadas, o ganho em velocidade foi substancial.

Outra observação importante é que um único núcleo do computador pessoal é aproximadamente duas vezes mais rápido que um único núcleo do *cluster*. Porém, quando paralelizado, o algoritmo roda quase duas vezes mais rápido no *cluster*, mostrando claramente a importância de técnicas de paralelização, particularmente quando uma grande quantidade de núcleos se faz disponível, como é o caso do *cluster* utilizado.

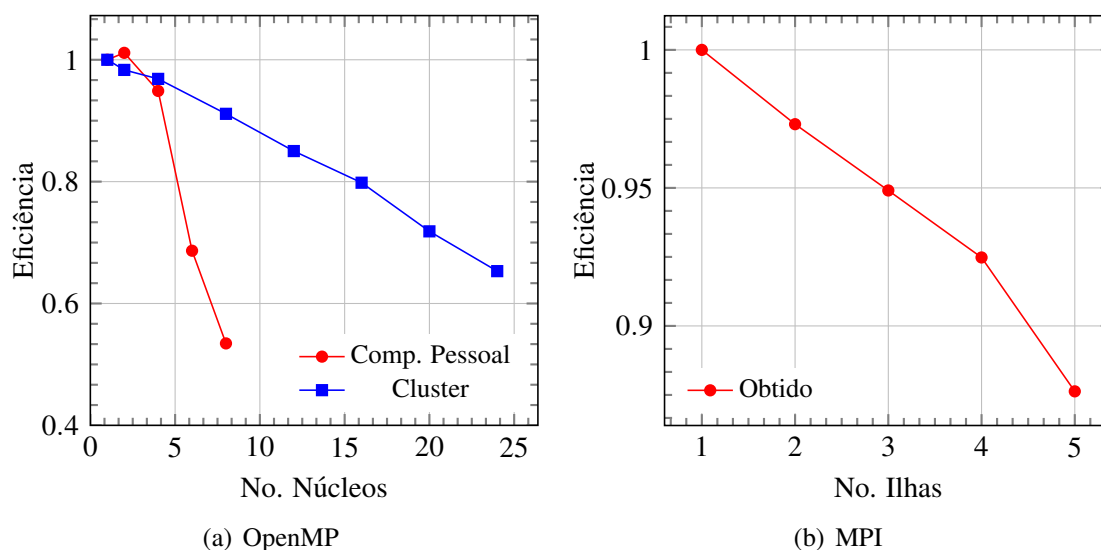
A Figura 70b mostra as medidas de *speedup* relacionadas à paralelização usando MPI com 5 migrações por execução e um número crescente de ilhas. À medida que mais ilhas vão sendo adicionadas, o tamanho da subpopulações diminui e o algoritmo roda mais rápido. O *speedup* é então medido com T_1 sendo o tempo gasto para executar uma população panmítica. O ganho obtido é também satisfatório, chegando a 4.36 quando 5 ilhas são utilizadas. Além disso, o comportamento obtido é aproximadamente linear, embora não consiga atingir o valor teórico de 5 devido a rotinas cujos tempos de execução não aumentam com o tamanho da população, como operações de *input* e *output* utilizando arquivos de dados.

Outra medida de desempenho amplamente utilizada é a Eficiência, que procura avaliar o aproveitamento do poder computacional dos processadores utilizados na execução de um programa em paralelo. Tal medida pode ser dada por:

$$E_m = \frac{S_m}{m} = \frac{T_1}{mT_m} \quad (164)$$

onde S_m é o valor de *speedup* mostrado na Eq. (163). Os valores de eficiência variam sempre entre 0 e 1, com uma eficiência de 1 representando o aproveitamento total do poder computacional de todos os processadores utilizados. Portanto, para valores de *speedup* lineares

Figura 71 – Medidas de eficiência



Fonte: Elaborada pelo autor.

e para execuções sequenciais, a eficiência será sempre unitária. Já para valores de *speedup* não-lineares, a perda de eficiência fornece uma indicação do tempo perdido em operações de comunicação. A Figura 71 mostra os valores de eficiência associados aos *speedups* mostrados na Figura 70.

6.1.2 Painel Curvo com Furo Circular

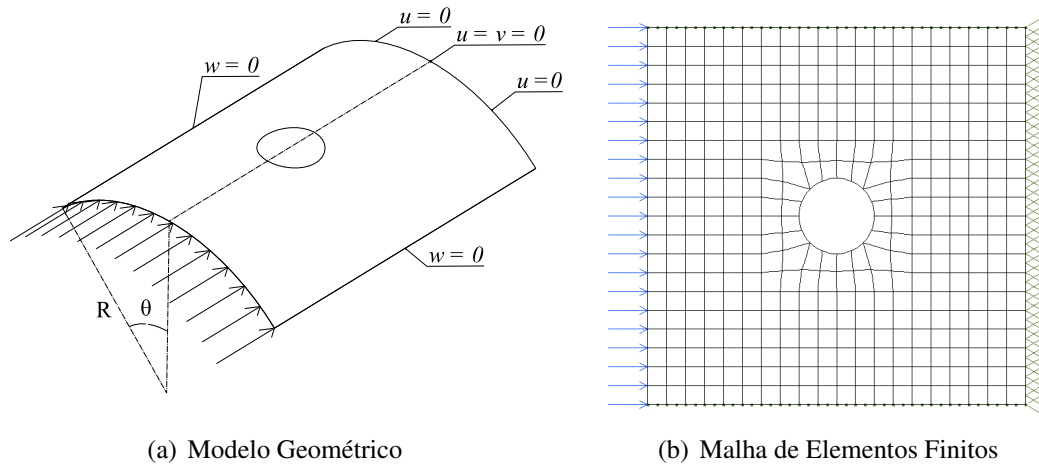
Nesse exemplo, o algoritmo proposto será usado para obter projetos ótimos de um painel curvo com um furo circular central. Tais estruturas são de uso comum, particularmente em aplicações aeroespaciais. Eles apresentam geometria, cargas e condições de contorno complexas, não sendo possível sua análise utilizando soluções analíticas simples. Assim, o uso de métodos de alta fidelidade torna-se necessário, o que conseqüentemente aumenta o tempo de execução do processo de otimização.

A geometria e a malha de elementos finitos são mostradas na Figura 72. Um total de 384 elementos de casca abatida Q8 com integração reduzida foram usados de modo a obter um nível de discretização razoável ao redor do furo, totalizando 6240 graus de liberdade.

No plano $x - y$, o painel é um quadrado com 1m de lado e o raio do furo mede 0.1m. No plano $z - y$, $R = 5m$ e $\theta = 0.1 \text{ rad}$. Uma carga axial uniformemente distribuída é aplicada em um dos lados. Assim, tanto a falha por tensões excessivas quanto a falha por flambagem devem ser avaliadas.

Os valores possíveis para as variáveis de projeto são: $\theta \in \{-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ e $t \in \{0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00\} \text{ mm}$ e o número máximo de lâminas foi fixado em 8, mas a eliminação e adição de lâminas foi permitida. Dois materiais diferentes foram considerados, fazendo com que o material se torne uma variável de projeto e resultando em 5308416 proje-

Figura 72 – Painel curvo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

tos possíveis. As propriedades mecânicas de ambos os materiais são mostradas na Tabela 21. Nota-se que o Grafite-Epoxy (ge) é claramente superior ao Kevlar-Epoxy, mas é 3 vezes mais caro. Consequentemente, o algoritmo deverá balancear o custo e o desempenho estrutural do laminado.

O objetivo é minimizar o custo total de material (C_t), que é calculado somando a contribuição de cada um dos materiais:

$$C_t = W_{ke} \cdot C_{ke} + W_{ge} \cdot C_{ge} \quad (165)$$

onde W é o peso de cada material e C é o custo relativo por unidade de peso mostrado na Tabela 21. A restrição de falha da primeira lâmina λ_f e da espessura máxima de camadas contíguas também são utilizadas neste problema. Além disso, uma restrição de flambagem, dada pelo fator λ_b , também é considerada. Tal fator representa a carga crítica de flambagem em relação à carga aplicada. As expressões para as restrições são:

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda_f^{max} - 1 \leq 0 \\ g_2 &= \frac{tt_{max}}{tt_{lim}} - 1 \leq 0 \\ g_3 &= 1 - \lambda_b \leq 0 \end{aligned} \quad (166)$$

Cinco ilhas foram utilizadas e a migração foi fixada em um indivíduo a cada 10 gerações. Os parâmetros genéticos utilizados foram: $r_c = 0.80$, $0.05 \leq p_m \leq 0.20$, $0.01 \leq p_s \leq 0.05$, $0.01 \leq p_a \leq 0.05$ e $0.01 \leq p_d \leq 0.05$. Inicialmente, a carga aplicada foi fixada em 400 kN/m e os efeitos do tamanho das subpopulações e do número de gerações foram estudados. Para cada caso, 200 subpopulações foram executadas e a taxa de sucesso média foi obtida. Além disso, o número de avaliações da função objetivo foi medido e representado como um

Tabela 21 – Propriedades dos materiais.

	Kevlar-Epoxy	Grafite-Epoxy
E_1 (GPa)	87	181
$E_2 = E_3$ (GPa)	5.5	10.3
ν_{12}	0.34	0.28
ν_{13}	0.30	0.30
ν_{23}	0.49	0.49
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	2.2	7.17
G_{23} (GPa)	1.47	4.80
X_t (MPa)	1280	1500
X_c (MPa)	335	1500
$Y_t = Z_t$ (MPa)	30	40
$Y_c = Z_c$ (MPa)	158	246
$S_6 = S_5 = S_4$ (MPa)	49	68
Custo (u.c./N)	1.0	3.0

FONTE: Almeida e Awruch (2009).⁸

Tabela 22 – Influência do tamanho da subpopulação e do número de gerações.

	24 ind	48 ind	72 ind	96 ind
50 ger	31% (0.02%)	43% (0.04%)	46% (0.05%)	72% (0.07%)
100 ger	60% (0.03%)	70% (0.07%)	86% (0.11%)	87% (0.14%)
150 ger	70% (0.05%)	82% (0.11%)	83% (0.16%)	90% (0.22%)
200 ger	80% (0.07%)	95% (0.14%)	94% (0.21%)	98% (0.29%)

percentual do espaço de projeto (%EP).

O número de avaliações pode ser entendido como uma outra medida do desempenho do algoritmo e também como uma medida indireta do tempo de otimização. Quatro tamanhos de subpopulação e quatro valores para o número de gerações foram combinados e os resultados são mostrados na Tabela 22, onde o primeiro número é a taxa de sucesso R(%) e o número em parênteses é o percentual do espaço de projeto explorado %EP. Ressalta-se que, mesmo nos casos com baixas taxas de sucesso, todos os projetos obtidos foram viáveis.

A combinação escolhida é mostrada em negrito na Tabela 22, apresentando alta taxa de sucesso com um número relativamente baixo de avaliações de indivíduo. Tanto o número de gerações quanto o tamanho das subpopulações afetaram o desempenho do algoritmo, mas, neste problema em particular, o número de gerações parece ter um impacto maior que o tamanho da subpopulação.

A carga aplicada foi então variada de modo a investigar a escolha de materiais nos projetos ótimos. Ela foi variada de 50 kN/m para 450 kN/m e os resultados são mostrados na Tabela 23. Como esperado, o custo total do laminado aumenta à medida que a carga vai aumentando, não só pelo aumento na espessura total, mas também por mudanças no material escolhido. Para cargas baixas, o Kevlar-Epoxy é usado em todas as camadas devido ao seu menor custo. Porém, quando a carga vai aumentando, ocorre uma mudança gradual de material nas camadas externas. Isso ocorre pois o comportamento do problema é dominado pela flexão, fato evidenciado pela restrição de flambagem ativa. Nesse tipo de problema, as camadas internas, mais próximas à superfície média, têm pouco impacto no comportamento estrutural. Tal comportamento é também indicado pela restrição de falha inativa, ligada ao comportamento do laminado em membrana.

Tabela 23 – Projetos ótimos com a variação da carga.

Carga (kN/m)	Projeto Ótimo	%KE	%GE	Custo	λ_f	λ_b	t (mm)
50	$[0_{ke}^{0.75}/45_{ke}^{0.75}/-45_{ke}^{1.0}/0_{ke}^{1.0}]s$	100	0	91.53	0.128	1.003	7.0
100	$[45_{ke}^{0.75}/-45_{ke}^{1.25}/0_{ke}^{2.0}/90_{ke}^{0.75}]s$	100	0	124.22	0.171	1.006	9.5
200	$[-45_{ke}^{1.75}/45_{ke}^{2.0}/90_{ke}^{2.0}/0_{ke}^{1.0}]s$	100	0	176.52	0.368	1.008	13.5
300	$[-45_{ke}^{2.0}/45_{ge}^{2.0}/0_{ke}^{2.0}/45_{ke}^{1.0}]s$	71.4	28.6	313.24	0.464	1.016	14.0
400	$[-45_{ge}^{1.75}/45_{ge}^{2.0}/0_{ke}^{2.0}/90_{ke}^{1.0}]s$	44.4	55.6	420.61	0.453	1.005	13.5
450	$[-45_{ge}^{1.75}/45_{ge}^{2.0}/0_{ge}^{2.0}/90_{ke}^{1.0}]s$	14.8	85.2	550.78	0.172	1.008	13.5

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Exemplos Não-Lineares

Nesta seção, dois exemplos de otimização serão tratados utilizando as metodologias de análise não-linear física e geométrica apresentadas nos capítulos anteriores. O primeiro exemplo trata da otimização da placa quadrada submetida a flexão mostrada na Seção 6.1.1 e tem como objetivo demonstrar como a consideração das duas não-linearidades pode levar à obtenção de projetos mais eficientes. Já o segundo exemplo considera a otimização de um painel curvo também submetido a flexão e procura estudar as diferenças entre os projetos ótimos obtidos dependendo da restrição em deslocamentos utilizada.

6.2.1 Placa Submetida a Carga Transversal

No primeiro exemplo (Seção 6.1.1), considerou-se a otimização simultânea do peso e da deflexão de uma placa quadrada sujeita a cargas transversais e engastada em duas faces opostas deixando as demais livres. Novamente, a geometria, carga e condições de contorno da placa podem ser vistas na Figura 66. No exemplo inicial, otimizou-se a estrutura buscando

minimizar tanto o peso quanto a deflexão no centro da placa utilizando uma análise geometricamente linear e uma restrição relativa à carga de falha da primeira lâmina (FPF), vista na Eq. (161).

Porém, nos exemplos de falha progressiva, analisou-se uma placa com condições de contorno similares também sujeita a cargas de flexão utilizando tanto falha progressiva como termos de deformação não-lineares (Seção 4.6.2). Como pode ser visto na Figura 44, há uma diferença significativa na capacidade de carga quando se compara a solução linear com a não-linear. A motivação deste exemplo é, portanto, procurar obter espessuras e deslocamentos menores que os obtidos na otimização utilizando análise linear (Tabela 18) através da consideração das duas não-linearidades, representando projetos mais eficientes.

Inicialmente, buscou-se estudar o comportamento estrutural dos projetos ótimos obtidos na Seção 6.1.1 tanto para a minimização do peso quanto para a minimização da deflexão. Para isso, traçou-se a curva linear utilizando o critério de Tsai-Wu considerando que a falha ocorre quando a primeira lâmina falha (FPF) e a curva não-linear utilizando o método baseado no critério de Hashin com $\alpha = 10^{-10}$ (Seção 4.4.1). Utilizou-se uma malha de 100 elementos Q8 com integração reduzida e o Método do Controle de Deslocamento aplicando o deslocamento desejado em 50 passos. As propriedades do material são mostradas na Tabela 17. É importante ressaltar que a carga de referência foi mantida como a carga real aplicada (0.1 MPa). Assim, os valores de capacidade de carga serão medidos em relação à carga total.

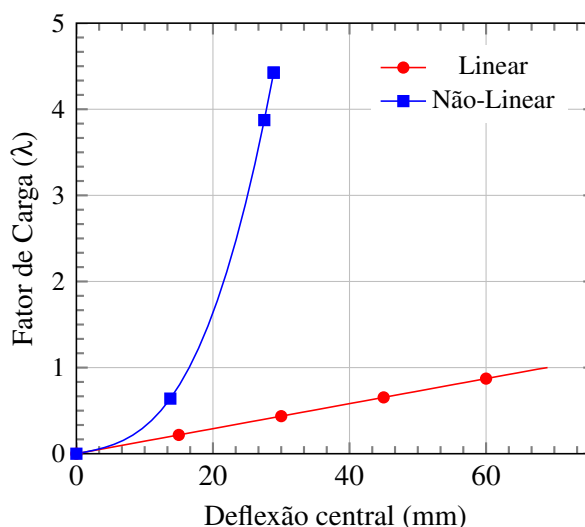
Tomando inicialmente o projeto ótimo com ênfase na minimização do peso, tem-se a laminação $[90^{0.75}/90^{1.0}/0^{0.75}/45^{0.75}]_s$. Neste caso, a análise foi executada até um valor de deslocamento igual a 68.8mm utilizando um valor de $\Delta D = -1.376\text{mm}$ e 50 passos. Os resultados das análises são mostrados na Figura 73. Ressalta-se que o último ponto obtido na curva não-linear representa sua falha final (UF), tendo em vista que o método de Newton-Raphson não convergiu no passo seguinte. Assim, observou-se uma carga de FPF de $\lambda_{FPF} = 2.90$ e uma carga de UF $\lambda_{UF} = 4.42$.

Como pode ser observado, a capacidade de carga do projeto ótimo é quase 5 vezes maior que a obtida na análise linear. Assim como ocorreu no exemplo da Seção 4.6.2, o aumento significativo da capacidade de carga ocorreu devido aos termos de deformação não-lineares da Teoria de von Kármán. Outro aspecto importante diz respeito aos deslocamentos. Nota-se que o nível de deslocamentos máximo atingido pela estrutura foi mais de 2 vezes menor que o previsto na análise linear.

É importante ressaltar que se uma análise de FPF fosse utilizada, a capacidade de carga seria apenas 2.90 vezes maior que a obtida no caso geometricamente linear ao invés de 4.42 vezes maior. Tal fato mostra a vantagem de utilizar também uma análise por falha progressiva. De modo geral, nota-se que, para o caso dessa estrutura neste nível de deslocamentos, a análise linear possui um nível de fidelidade significativamente mais baixo que a não-linear, fornecendo projetos excessivamente conservadores.

Analisando então o outro caso extremo, quando buscou-se minimizar o desloca-

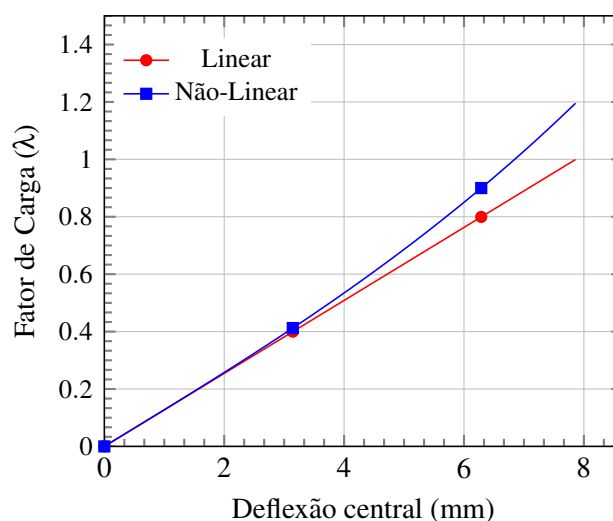
Figura 73 – Análise do projeto ótimo linear obtido minimizando o peso.



Fonte: Elaborada pelo autor.

mento no centro da placa, toma-se a laminação $[90^{2.0}/45^{2.0}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$ e executa-se a análise até um deslocamento igual a 7.86mm (50 passos com $\Delta D = -0.1572\text{mm}$). Os resultados são mostrados na Figura 74. Neste caso, não ocorreu falha e o comportamento foi determinado apenas pela não-linearidade geométrica. Obteve-se uma capacidade de carga de 1.20, isto é, 20% maior que a do caso linear.

Figura 74 – Análise do projeto ótimo linear obtido minimizando o deslocamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante notar que as diferenças no caso deste projeto são significativamente menores que no caso anterior, fato que já era esperado tendo em vista que os valores de deslocamento são mais baixos e, por isso, a resposta não-linear é mais próxima da linear. Tal é o motivo que leva as normas e códigos a exigirem que o nível de deslocamentos em estruturas dimen-

onadas linearmente não ultrapasse certos limites. Se os deslocamentos forem suficientemente pequenos, uma análise não-linear pode ser dispensada e a estrutura pode ser dimensionada no regime linear. O projeto obtido minimizando o deslocamento é, portanto, significativamente mais racional que aquele obtido minimizando o peso. Isso mostra a importância da inclusão de restrições em deslocamento em problemas de minimização de peso ou custo.

Porém, mesmo neste caso, é possível obter diminuições no peso com o uso da análise não-linear, visto que a capacidade de carga ainda foi 20% maior que a obtida anteriormente. Tomou-se então todos os valores de deslocamento obtidos para os projetos da Tabela 18 e realizaram-se novas otimizações limitando o deslocamento máximo aos valores em questão e considerando as duas não-linearidades. O objetivo é, portanto, analisar os ganhos em peso nos projetos obtidos (W_{lin} e W_{nonlin}) para cada nível de deslocamento. A restrição em deslocamentos não foi aplicada explicitamente, mas apenas ajustando o tamanho do passo em deslocamento e mantendo uma análise em 50 passos. Assim, dispensa-se o uso de uma função multiobjetivo e também de uma restrição adicional. O objetivo é portanto minimizar apenas o peso:

$$f_{obj} = W \quad (167)$$

Já as restrições permanecem semelhantes às utilizadas na otimização linear, mas neste caso, a restrição de falha se refere ao maior fator de carga obtido no traçado da curva carga-deslocamento λ_{max} . Dependendo do nível de deslocamentos atingido e do esquema de laminação considerado, este valor pode ou não representar a carga última da placa. A restrição é dada por:

$$g_1 = 1 - \lambda_{max} \leq 0 \quad (168)$$

Adicionalmente, a restrição de camadas contíguas foi mantida:

$$g_2 = \frac{tt_{max}}{tt_{lim}} - 1 \leq 0 \quad (169)$$

com $tt_{lim} = 2mm$.

Nos limites das variáveis, mantiveram-se os ângulos com os mesmos limites utilizados nas otimizações lineares: $\theta \in \{-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$. Porém, como são esperadas diminuições significativas na espessura dos projetos ótimos com a consideração da análise não-linear, a espessura mínima foi diminuída para 0.1mm: $t \in \{0.1, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.50, 2.00\}$ mm, mantendo o número máximo de lâminas em 8. O problema foi executado utilizando 5 subpopulações de 24 indivíduos cada, 50 gerações e com migração de um indivíduo a cada 10 gerações. Manteve-se a malha de 100 elementos utilizada para realizar as análises mostradas. O tempo de execução médio de cada otimização foi de 30 minutos, enquanto que na otimização com análise linear tal tempo foi de 3 minutos. É importante ressaltar que no exemplo linear, uma malha 4 vezes maior foi utilizada em cada análise e o número de indivíduos foi 5 vezes maior.

Tabela 24 – Resultados da otimização variando o deslocamento máximo.

D_{\max} (mm)	Projeto Ótimo	λ_{\max}	W_{nonlin} (N)	W_{lin} (N)	Dif. (%)	Falha
7.86	$[90^{2.0}/45^{1.5}/90^{2.0}/45^{1.0}]_s$	1.01	204.1	219.8	7.14	Não
11.4	$[90^{1.5}/45^{1.0}/90^{1.5}/-45^{1.0}]_s$	1.00	157.0	188.4	16.7	Não
12.6	$[90^{2.0}/45^{1.0}/90^{0.75}/-45^{0.75}]_s$	1.04	141.3	180.5	21.7	Não
14.3	$[90^{2.0}/0^{0.75}/90^{1.0}]_s$	1.06	117.7	172.7	31.8	Não
16.5	$[90^{1.0}/45^{1.0}/90^{1.0}]_s$	1.02	94.2	164.8	42.8	Não
18.9	$[90^{0.75}/-45^{0.75}/90^{0.75}]_s$	1.04	70.6	157.0	55.0	Não
22.1	$[90^{0.75}/-45^{1.0}]_s$	1.12	54.9	149.1	63.1	Não
25.7	$[90^{0.75}/90^{0.75}]_s$	1.01	23.5	141.3	83.3	Não
30.3	$[90^{0.50}/90^{0.50}]_s$	1.09	15.7	133.5	88.2	Não
36.3	$[90^{0.25}/45^{0.10}]_s$	1.03	10.9	125.6	91.2	FPF
43.4	$[90^{0.10}/-45^{0.10}/90^{0.10}]_s$	1.04	9.42	117.7	92.0	UF
52.7	$[90^{0.10}/90^{0.10}]_s$	1.75	6.28	109.9	94.2	UF
66.5	$[90^{0.10}/90^{0.10}]_s$	1.75	6.28	102.5	93.8	UF
68.8	$[90^{0.10}/90^{0.10}]_s$	1.75	6.28	102.5	93.8	UF

Fonte: Elaborada pelo autor.

Estima-se portanto que otimização não-linear demora cerca de 200 vezes mais que a linear. Tal fato demonstra a importância do uso de uma implementação em paralelo.

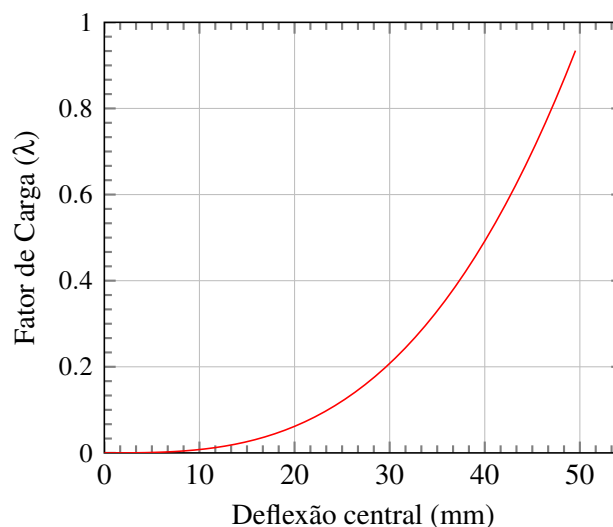
A taxa de cruzamento foi fixada em $t_c = 0.80$ e as faixas de probabilidade dos operadores genéticos foram: $0.05 \leq p_m \leq 0.20$, $0.01 \leq p_s \leq 0.05$, $0.01 \leq p_a \leq 0.05$ e $0.01 \leq p_d \leq 0.05$. Ressalta-se que, ao contrário do exemplo linear, permitiu-se a adição e eliminação de lâminas. Devido ao alto custo computacional, não buscou-se avaliar a taxa de sucesso para este problema. A otimização foi simplesmente executada 10 vezes e o ótimo foi extraído. Os resultados para todos os valores de deslocamento avaliados são mostrados na Tabela 24. Nela, além dos valores obtidos para o peso da placa para os dois tipos de análise, mostra-se a diminuição percentual no peso quando as não-linearidades são consideradas. Já a última coluna indica se o projeto ótimo exibe falha do material. Se há pelo menos a falha da primeira lâmina, indica-se na tabela por FPF e se há falha final indica-se por UF.

Observando os resultados obtidos, nota-se que mesmo para baixos valores de deslocamento, há um ganho na eficiência do projeto com a consideração da não-linearidade geométrica. Para o valor mais baixo de deslocamento, obteve-se um projeto 7.14% mais leve que o obtido anteriormente. É importante ressaltar que tais ganhos ocorreram somente devido à não-linearidade geométrica, pois não ocorre falha em nenhuma lâmina. Em outras palavras, nos projetos onde a falha não ocorreu, o mesmo resultado teria sido obtido se uma restrição de FPF considerando o material fisicamente linear tivesse sido utilizada.

À medida que os deslocamentos aumentam, a diminuição do peso em relação aos projetos otimizados com análise linear se acentua, com diminuição de até 94% da espessura do laminado. Isto era esperado, tendo em vista que a divergência entre as respostas linear e não-linear aumenta em valores de deslocamento elevados. A partir do valor de deslocamento 36.3mm, a não-linearidade física passa a influenciar no projeto ótimo obtido. Para esses casos, se uma restrição de FPF tivesse sido utilizada, o peso obtido teria sido maior.

Outro aspecto interessante pode ser visto analisando os valores de capacidade de carga obtidos nos projetos ótimos. Nota-se que até o valor de deslocamento 43.4mm a capacidade de carga é muito próxima de 1, o que era esperado visto que o algoritmo procura suportar a carga com a mínima rigidez possível. Já para os três últimos valores de deslocamento, a capacidade de carga permanece em 1.75 e o projeto ótimo se mantém inalterado. Tal fato ocorre pois aproxima-se do projeto com espessura mínima, utilizando apenas duas camadas a 90° de 0.1mm cada (devido à simetria). Analisando este caso com qualquer um dos três últimos valores de deslocamento máximo mostrados na tabela, obtém-se o comportamento mostrado na Figura 75.

Figura 75 – Análise do projeto com espessura mínima.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como se pode notar, o laminado falha antes que a capacidade de carga atinja o valor de 1, com a falha ocorrendo antes que o deslocamento atinja 50mm. Isto força o algoritmo a utilizar o projeto com a segunda menor espessura mínima, $[90^{0.1}/90^{0.1}]_s$. Por fim, é importante ressaltar que o algoritmo de otimização tende a aumentar o percentual de fibras na direção da carga aplicada, o que tende a criar situações de falha mais frágeis (Seção 4.6.1). Assim, deve-se ter cautela ao utilizar métodos que supõem uma suavização da falha, tal como o método baseado no critério de Hashin com altos valores de α .

6.2.2 Painel Curvo Submetido a Carga Transversal

O último exemplo trata da minimização da espessura de um painel curvo laminado baseado no exemplo com não-linearidade geométrica mostrado no artigo de Almeida e Awruch (2009).⁸ A geometria e condições de contorno do painel são as mesmas utilizadas no exemplo da Seção 3.7.2, sendo mostradas na Figura 16, onde $R = 2.54\text{m}$, $L = 0.254\text{m}$ e $\theta = 0.1$ rad. Novamente, utilizou-se na modelagem uma malha de 100 elementos Q8 com integração reduzida.

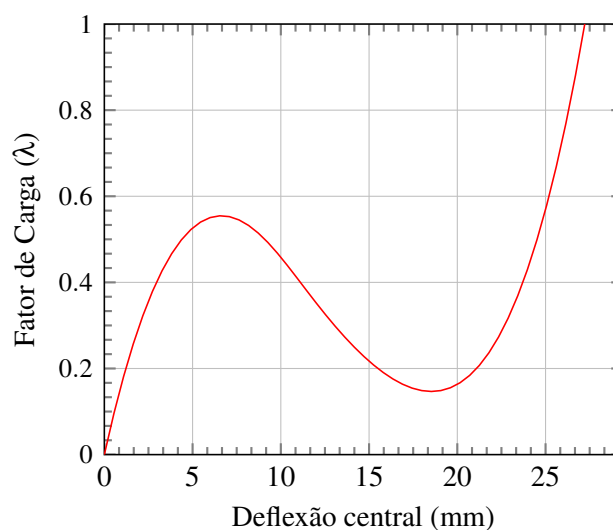
As propriedades do material utilizado na otimização são mostradas na Tabela 25. Inicialmente, tomou-se o projeto ótimo encontrado por Almeida e Awruch (2009), dado por $[(90^{0.9}/90^{0.9}/45^{0.9})_2/90^{0.9}]_s$ e realizou-se uma análise utilizando os dois tipos de análise não-linear. No caso da falha, o método de Hashin com $\alpha = 10^{-10}$ foi utilizado assim como no exemplo anterior. Foi utilizado o Método do Controle de Deslocamento em 50 passos e incrementando o deslocamento no centro do painel com $\Delta D = -0.545\text{mm}$. O resultado é mostrado na Figura 76.

Tabela 25 – Propriedades do material.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ρ (kN/m^3)	X_T (MPa)	X_C (MPa)	Y_T (MPa)	Y_C (MPa)	S_6 (MPa)
39.0	8.6	3.8	0.28	20.6	1080	620	39	128	89

FONTE: Almeida e Awruch (2009).⁸

Figura 76 – Análise do projeto ótimo obtido por Almeida e Awruch.



Fonte: Almeida e Awruch (2009).⁸

Analisando a curva carga-deslocamento obtida, nota-se que, para a espessura uti-

lizada, a capacidade de carga requerida foi obtida após o ponto crítico, com fator de carga $\lambda_c = 0.55$. Porém, um deslocamento de 27.2mm pode ser considerado excessivo em projeto. Além disso, a existência de um ponto crítico pode não ser interessante ao projetista. Assim, foram considerados três níveis de deslocamento na presente otimização: O nível que o projeto ótimo do exemplo original atinge (27.2mm), um nível de deslocamentos intermediário, mas após o ponto crítico (10.0mm) e um antes do ponto crítico (3.0mm).

Tal como no exemplo anterior, foram utilizadas 5 ilhas com 24 indivíduos cada e o algoritmo foi executado por 50 gerações. Já os valores dos operadores genéticos são: $t_c = 0.80$, $0.05 \leq p_m \leq 0.20$, $0.01 \leq p_s \leq 0.05$, $0.01 \leq p_a \leq 0.05$ e $0.10 \leq p_d \leq 0.20$. As duas restrições do exemplo anterior permanecem também neste:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 - \lambda_{max} \leq 0 \\ g_2 &= \frac{tt_{max} - tt_{lim}}{tt_{lim}} \leq 0 \end{aligned} \quad (170)$$

mas desta vez o valor de tt_{lim} foi fixado em 1.8mm, o mesmo utilizado no artigo de Almeida e Awruch (2009).⁸

No artigo, os autores optaram por utilizar uma função multiobjetivo buscando tanto maximizar a carga no ponto crítico (Figura 76) quanto minimizar o deslocamento no ponto onde $\lambda = 1.0$. No presente trabalho, o problema será abordado de uma forma diferente. A função objetivo a ser minimizada é simplesmente a espessura total de compósito h_t :

$$f_{obj} = h_t \quad (171)$$

No que diz respeito às variáveis de projeto, os autores fixaram a espessura total do laminado em 12.6mm e a espessura de cada camada em 0.9mm, resultando em um laminado de 14 camadas e 2187 projetos possíveis. As variáveis de projeto foram portanto apenas a orientação das fibras de cada camada. Porém, ao fixar a espessura do laminado, não seria possível estudar o efeito da variação do deslocamento máximo permitido. Por outro lado, deseja-se também replicar os resultados obtidos pelos autores, o que não seria possível se a espessura fosse tratada como variável de projeto, visto que a espessura mínima teria de ser fixada em 0.9mm e qualquer valor maior violaria a restrição de camadas contíguas g_2 .

Assim, a espessura foi tratada como variável de modo indireto. Fixou-se seu valor em 0.9mm assim como no exemplo original, mas um número máximo de 30 camadas foi utilizado e a probabilidade de eliminação foi aumentada para $[0.10, \dots, 0.20]$. Espera-se que, quando fixado o valor de deslocamento de 27.2mm, 16 camadas sejam eliminadas e seja encontrado o mesmo projeto ótimo mostrado em Almeida e Awruch (2009).⁸ Para os ângulos, utilizaram-se os mesmos limites do exemplo anterior: $\theta \in \{-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$.

Os resultados para os três valores de deslocamento máximo são mostrados na Tabela 26. Como a espessura é fixa, apenas os valores dos ângulos foram mostrados nos esquemas

Tabela 26 – Resultados da otimização variando o deslocamento máximo.

Projeto	D_{\max} (mm)	Projeto Ótimo	λ_{\max} (mm)	h_t	Falha
1	3.00	[90/90/45/90/-45/90/90/0/90/90/45/45/-45]s	1.00	23.4	Não
2	10.0	[90/90/-45/90/0/90/45/90/90/0]s	1.00	18.0	Não
3	27.2	[90/90/45/90/90/45/90]s	1.01	12.6	Não

Fonte: Elaborada pelo autor.

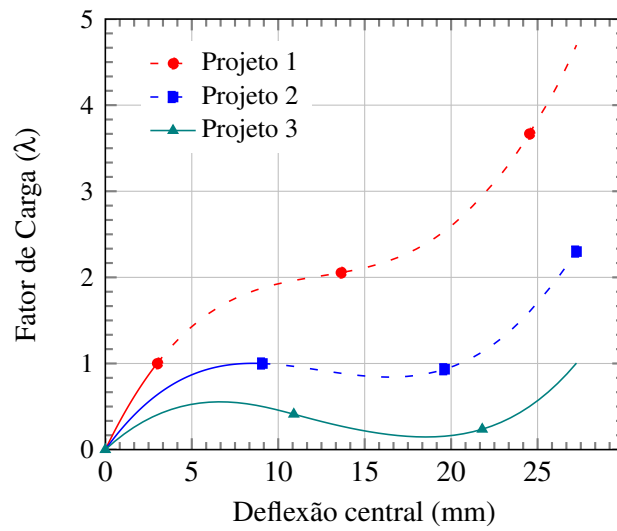
de laminação ótimos. As curvas carga-deslocamento para os três projetos ótimos obtidos são então traçadas na Figura 77. Para coletar os resultados, a otimização foi executada 5 vezes (25 subpopulações no total). O tempo médio de cada otimização foi de 40 minutos no *cluster*.

Observando o projeto 3, nota-se que a mesma laminação ótima obtida por Almeida e Awruch (2009) foi também obtida no presente trabalho, considerando a mesma faixa de deslocamentos. Tal resultado é importante ao mostrar que o mesmo projeto ótimo pode ser obtido utilizando formulações de otimização distintas. Como esperado, ao restringir ainda mais o deslocamento, a espessura total do painel aumentou de modo a fornecer a rigidez necessária para que um valor de $\lambda = 1.0$ fosse atingido dentro da faixa de deslocamentos exigida. Em todos os casos, a restrição de capacidade de carga está ativa, assim como a restrição de camadas contíguas. Ressalta-se também que nenhum dos projetos ótimos exibiram falha, com a otimização sendo comandada pela não-linearidade geométrica.

Analisando as curvas carga-deslocamento mostradas na Figura 77, nota-se que cada uma das curvas atinge a capacidade de carga unitária em um valor diferente de deslocamentos como consequência da imposição da restrição de deslocamento máximo. De modo a observar um trecho maior da curva para todos os projetos, os gráficos foram prolongados (curvas tracejadas) até o nível de deslocamentos obtido pelo terceiro projeto, 27.2mm. Nota-se que houveram mudanças significativas no comportamento geometricamente não-linear da estrutura quando a espessura do laminado aumentou. Comparando a curva do projeto 1 com as demais, nota-se que o ponto limite foi eliminado pela alta rigidez da estrutura e mesmo no projeto 2, não há uma queda acentuada da carga no ponto limite.

É importante ressaltar que as três configurações encontradas são aceitáveis dependendo das premissas adotadas em projeto. Em certas aplicações, grandes deslocamentos e a presença de pontos críticos pode ser aceitável. Em tais casos, o projeto 3 seria interessante por ser aquele com a menor espessura total de compósito e, portanto, o projeto com menor custo de material. Porém, se grandes deslocamentos ou a perda de estabilidade da estrutura forem inaceitáveis, o projeto 1 seria o mais recomendado, muito embora possua um custo maior.

Figura 77 – Análise dos projetos ótimos obtidos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou investigar a otimização de estruturas laminadas utilizando procedimentos de análise de alta fidelidade. Para isso, procurou-se evitar o uso de soluções analíticas simplificadas e utilizar o Método dos Elementos Finitos, capaz de representar geometrias, carregamentos e condições de contorno complexas. Porém, mesmo utilizando o MEF, o uso de uma análise linear pode levar a projetos excessivamente conservadores dependendo da estrutura considerada. Por tal motivo, dois tipos de análise não-linear foram considerados neste trabalho. O primeiro diz respeito ao uso de termos de deformação não-lineares, permitindo a consideração de grandes deslocamentos e rotações moderadas. O segundo diz respeito à modelagem da falha progressiva, fenômeno que ocorre quando a estrutura sai de seu regime elástico. Já no processo de otimização, uma nova formulação de Algoritmo Genético com paralelização híbrida e operadores específicos para o tratamento de estruturas laminadas foi proposta e utilizada na obtenção de projetos ótimos.

Na análise pelo Método dos Elementos Finitos, foi desenvolvido e implementado um elemento de casca abatida baseado na Teoria de Marguerre. De modo a permitir o tratamento de estruturas laminadas, as integrações na espessura foram modificadas com a aplicação da Teoria de Laminação de Primeira Ordem (FSDT). A implementação foi realizada de modo a permitir tanto o uso de seções pré-integradas como o uso de integração numérica, com a presença de pontos de integração na espessura da casca. Nos exemplos tratados considerando análise geometricamente não-linear, notou-se uma ótima concordância com resultados analíticos e com soluções obtidas por outros autores se o elemento for utilizado dentro das limitações de sua formulação. É importante ressaltar que bons resultados foram obtidos tanto para cascas isotrópicas como para cascas com diversos esquemas de laminação, validando e verificando as implementações realizadas.

No que diz respeito à consideração da falha progressiva, foi formulada uma metodologia de degradação de propriedades mecânicas no contexto de uma análise pelo Método dos Elementos Finitos utilizando o Método de Newton-Raphson. É importante ressaltar que, uma vez inserida no processo de análise por Newton-Raphson, a formulação proposta permite que a falha progressiva possa ser modelada juntamente com a consideração da não-linearidade geométrica em um mesmo processo de análise incremental-iterativo. Com base em tal metodologia, três esquemas de degradação brusca foram desenvolvidos e implementados, tendo como base diferentes critérios de falha. Nos exemplos numéricos, as cargas de falha obtidas pelas formulações implementadas foram comparadas tanto com resultados numéricos como experimentais, obtidos na literatura.

Os resultados sugeriram que, para estruturas cujas falhas são comandadas pela matriz, o uso de um fator de degradação alto melhora a previsão da carga de ruptura, simulando uma evolução gradual do dano, o que efetivamente ocorre em simulações experimentais. Já para estruturas cujas falhas são comandadas pelas fibras, a ruptura tende a possuir uma natureza frágil e o uso de fatores altos tende a superestimar a carga de falha final. No que diz respeito

às metodologias de falha utilizadas, aquela desenvolvida por Tsai *et al* (2002) previu cargas de ruptura sempre mais conservadoras que as obtidas utilizando os outros métodos. Ressalta-se também que o uso de fatores de degradação próximos de zero é um procedimento conservador, mas já fornece maior capacidade de carga que uma análise por FPF.

Comparando as curvas obtidas utilizando diferentes métodos de traçado do caminho de equilíbrio quando a falha do laminado está envolvida, conclui-se que eles tendem a divergir após a falha final. No caso do Controle de Carga, o descarregamento da estrutura não é possível, ocasionando um aumento espúrio nos deslocamentos, muitas vezes atingindo valores várias ordens de grandeza maiores que aqueles antes da falha. Já no caso do Controle de Deslocamento e do Comprimento de Arco, o descarregamento é permitido, mas o caminho pelo qual ele se dá difere dependendo do método utilizado.

O Algoritmo Genético desenvolvido neste trabalho foi implementado em paralelo e combina duas técnicas distintas, a Paralelização Global e a técnica de granularidade grossa (*coarse-grain*), cada uma delas utilizando bibliotecas de paralelização distintas. Dentro de uma ilha, os processos são paralelizados utilizando OpenMP e a migração entre ilhas é realizada utilizando MPI. A principal vantagem desta abordagem é a capacidade de executar o algoritmo tanto em computadores isolados, considerando apenas uma ilha, como em computadores ligados em rede (*Network of Workstations*) ou em um cluster de computação de alto desempenho utilizando múltiplas ilhas.

Neste âmbito, vale ressaltar a importância de explorar o poder computacional em arquiteturas *multi-core*. Atualmente, o poder de processamento de computadores pessoais vem aumentando não mais em termos de frequência (*clock*) dos processadores, mas sim em número de núcleos de processamento. Hoje, praticamente qualquer computador, incluindo telefones celulares, possuem múltiplos núcleos. Porém, o sistema operacional não realiza a paralelização dos programas automaticamente, cabendo aos programadores a adaptação de códigos já existentes ou a concepção de novos programas já com a paralelização em mente. Devido a este fato, grande parte do poder de processamento pode ser perdido se o programador não paralelizar seu código.

Exemplos de otimização considerando tanto análise linear quanto não-linear foram apresentados. Nos exemplos lineares, os resultados obtidos confirmaram que o algoritmo foi corretamente formulado e implementado. Além disso, concluiu-se que a utilização de uma configuração em ilhas não apenas faz com que a otimização seja executada mais rapidamente, mas também produz melhores resultados em relação a uma configuração panmítica, concordando com a teoria evolutiva do Equilíbrio Pontuado.³²

Analisando o efeito do uso de diferentes intervalos de migração, notou-se que mesmo com um pequeno número de migrações (grandes intervalos), o algoritmo já atinge uma eficiência maior que a obtida utilizando uma única população com o mesmo número total de indivíduos (panmítica). Tal fato auxilia na minimização do tempo de comunicação entre ilhas (*overhead* de comunicação). Analisando então o efeito da variação no número de indivíduos

por migração, não foram notadas mudanças significativas na eficiência do algoritmo com o aumento no número de indivíduos. No que diz respeito aos valores das taxas e probabilidades genéticas, notou-se que o uso de diferentes valores em cada ilha forneceu bons resultados e evitou a necessidade de estudos paramétricos para seu ajuste em cada problema tratado (*tuning*). Por fim, valores de *speedup* satisfatórios foram obtidos para ambos os tipos de paralelização usados, tanto em um cluster quanto em um computador pessoal.

Nos exemplos de otimização considerando análise não-linear, notou-se um significativo ganho de rigidez nas cascas devido aos termos de deformação de von Kármán. Tal fenômeno levou à obtenção de projetos significativamente mais leves e, portanto, mais econômicos, quando comparados aos obtidos utilizando análise linear. Nota-se, portanto, que a utilização de processos de análise de alta fidelidade, além de permitir uma melhor representação matemática da estrutura real modelada, pode levar à obtenção de projetos consideravelmente mais econômicos. Porém, é importante ressaltar que os processos de análise não-linear introduzem incertezas adicionais ao processo de projeto e, portanto, devem exigir o uso de fatores de segurança maiores.

De modo geral, todos os objetivos traçados foram atingidos. As metodologias formuladas e implementadas se mostraram capazes de fornecer bons resultados na análise e otimização de cascas laminadas considerando procedimentos de análise estrutural de alta fidelidade. Além disso, a maior das dificuldades enfrentadas no uso de AGs com procedimentos de análise complexos, o alto custo computacional, foi superada com sucesso através do uso das técnicas de computação paralela. Espera-se, portanto, que as metodologias mostradas no trabalho possam ser utilizadas na obtenção de projetos ótimos de cascas laminadas em trabalhos futuros.

7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

O presente trabalho abordou vários temas distintos, tanto em análise quanto em otimização de estruturas laminadas. Para cada um deles, algumas sugestões para trabalhos futuros podem ser feitas:

- a) Teorias de Laminação: Consideração de teorias de ordem mais alta (HSDT), Teoria do Zigzag ou Teorias *Layerwise*. Utilização de elementos sólidos laminados;
- b) Análise Não-linear Geométrica: Implementação de elementos de casca laminada que considerem grandes rotações.
- c) Análise Não-linear Física: Utilização de métodos de degradação gradual exponencial ou métodos baseados na Mecânica do Dano. Uso de outros critérios de falha como o de Puck, LaRC03, dentre outros.
- d) Otimização de Laminados: Utilização de outros algoritmos de otimização evolucionários, como Enxame de Partículas ou Colônia de Formigas. Implementação

do AG utilizando outras técnicas de paralelização, como por exemplo as técnicas de granularidade fina (*fine-grain*). Utilização de redes neurais em treinadas pelo MEF.

REFERÊNCIAS

- 1 JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2a. ed. Taylor & Francis, 1999.
- 2 JAIN, H. K. **Laminated composite stiffened panels application and behaviour**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Indian Institute of Technology Roorkee, 2009.
- 3 AZARAFZA, R.; KHALILI, S. M. R.; JAFARI, A. A.; DAVAR, A. Analysis and optimization of laminated composite circular cylindrical shells subjected to compressive axial and transverse transient dynamic loads. **Thin-Walled Structures**, v. 47, 2009.
- 4 TEÓFILO, F. A. F. **Análise e projeto de risers compósitos em catenária**. 2010. 154 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Brasil, 2010.
- 5 GURDAL, Z.; HAFTKA, R. T.; HAJELA, P. **Design and optimization of laminated composite materials**. John Wiley & Sons, 1999.
- 6 VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. Vanderplaats Research and Development, 2001.
- 7 ARORA, J. **Introduction to optimum design**. 2nd. ed. Elsevier, 2004.
- 8 ALMEIDA, F. S.; AWRUCH, A. M. Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis. **Composite Structures**, v. 88, p. 443–454, 2009.
- 9 ALMEIDA, F. S. **Otimização de estruturas de materiais compósitos laminados utilizando algoritmos genéticos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.
- 10 LÓPEZ, S. D. C. **Otimização de placas e cascas de materiais compósitos utilizando algoritmos genéticos, redes neurais e elementos finitos**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- 11 REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis**. 2nd. ed. CRC Press, 2004.
- 12 HERAKOVICH, C. T. **Mechanics of fibrous composite**. John Wiley & Sons, 1998.
- 13 REN, J. G. Analysis of laminated circular cylindrical shells under axisymmetric loading. **Composite Structures**, v. 30, p. 271–280, 1995.
- 14 MARTHA, L. F.; PARENTE JR, E. An object-oriented framework for finite element programming. **In: Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)**, 2002.
- 15 SIMULIA. Abaqus/standard user's manual - version 6.12, 2012.
- 16 HOSSAIN, S. J.; SINHA, P. K.; SHEIKH, A. H. A finite element formulation for the analysis of laminated composite shells. **Computers and Structures**, v. 82, 2004.

- 17 PARK, T.; KIM, K.; HAN, S. Linear static and dynamic analysis of laminated composite plates and shells using a 4-node quasi-conforming shell element. **Composites Part B: Engineering**, v. 37, 2006.
- 18 ROCHA, I. B. C. M.; PARENTE JR, E.; MELO, A. M. C.; SILVA, R. F. Optimization of laminated plates using finite element analysis and genetic algorithms. **In: XXXII CI-LAMCE**, 2011.
- 19 AKHRAS, G.; LI, W. C. Progressive failure analysis of thick composite plates using the spline finite strip method. **Composite Structures**, v. 79, p. 34–43.
- 20 SANTOS, H.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M.; REDDY, J. N. A semi-analytical finite element model for analysis of laminated 3d axisymmetric shells: Bending, free vibration and buckling. **Composite Structures**, v. 71, 2005.
- 21 WALKER, M.; SMITH, R. E. A technique for the multiobjective optimisation of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis. **Composite Structures**, v. 62, p. 123–128, 2003.
- 22 WALKER, M.; SMITH, R. E. A simple self-design methodology for laminated composite structures to minimize mass. **Advances in Engineering Software**, v. 34, p. 601–605, 2003.
- 23 TOPAL, U.; UZMAN, U. Strength optimization of laminated composite plates. **Journal of Composite Materials**, v. 42, 2008.
- 24 ZHANG, Y. X.; YANG, C. H. A family of simple and robust finite elements for linear and geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 75, 2006.
- 25 SHIRBHATE, N. J.; TUNGIKAR, V. B. Geometrical nonlinear analysis of composite structures by zigzag theory - a review. **In: International Conference on Modeling, Optimization and Computing**, v. 1298, 2010.
- 26 SLEIGHT, D. W. Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures. Relatório técnico, National Aeronautics and Space Administration - NASA, 1999.
- 27 PIETROPAOLI, E. Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (usermat) developed and implemented in ansys. **Applied Composite Materials**, v. 19, 2012.
- 28 REDDY, Y. S. N.; MOORTHY, C. M. D.; REDDY, J. N. Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. **International Journal of Non-linear Mechanics**, v. 30, p. 629–649, 1995.
- 29 HOLANDA, A. S. **Análise do equilíbrio e estabilidade de placas com restrições de contato**. 2000. 190 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- 30 CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures - volume**

- 1: Essentials.** 1a. ed. John Wiley & Sons, 1991.
- 31 GARNICH, M. R.; AKULA, V. M. K. Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, 2009.
- 32 CANTU-PAZ, E. A survey of parallel genetic algorithms. Relatório técnico, 1997.
- 33 TANESE, R. Parallel genetic algorithms for a hypercube. In: . Hillsdale, NJ, USA: L. Erlbaum Associates Inc., c1987. p. 177–183.
- 34 LIN, S.-C.; PUNCH III, W. F.; GOODMAN, E. D. Coarse-grain parallel genetic algorithms: Categorization and new approach, 1994.
- 35 BELO, I. M. **Análise eficiente de compósitos laminados planos utilizando-se a formulação de elementos finitos corrigida a priori sem os efeitos do travamento.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Paraná, 2006.
- 36 MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium.** Prentice-Hall, 1969.
- 37 COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; DE WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis.** John Wiley & Sons, 2002.
- 38 KIRCHHOFF, G. **Vorlesungen uber mathematisch physik, mechanik.** 3a. ed. 1883.
- 39 DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials.** 2nd. ed. Oxford University Press, 2006.
- 40 MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 18, p. 31–38.
- 41 GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 20, 2005.
- 42 ZHANG, Y. X.; YANG, C. H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 88, 2009.
- 43 DI SCIUVA, M.; GHERLONE, M.; LOMARIO, D. Multiconstrained optimization of laminated and sandwich plates using evolutionary algorithms and higher-order plate theories. **Composite Structures**, v. 59, 2003.
- 44 GHERLONE, M.; TESSLER, A.; SCIUVA, M. C0 beam elements based on the refined zigzag theory for multilayered composite and sandwich laminates. **Composite Structures**, v. 93, 2011.
- 45 KAPURIA, S.; DUMIR, P. C.; AHMED, A. An efficient higher order zigzag theory for composite and sandwich beams subjected to thermal loading. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40.

- 46 FARES, M. E.; ELMARGHANY, M. K. A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. **Composite Structures**, v. 82, 2008.
- 47 ROCHA, I. B. C. M.; PARENTE JR, E.; MELO, A. M. C.; HOLANDA, A. S. Análise de tubos de materiais compósitos através do método dos elementos finitos. **In: XXIX CILAMCE**, 2008.
- 48 PAI, P. F. Total-lagrangian formulation and finite-element analysis of highly flexible plates and shells. **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 12, 2007.
- 49 KREJA, I.; SCHMIDT, R. Large rotations in first-order shear deformation fe analysis of laminated shells. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 41, 2006.
- 50 PAI, P. F.; PALAZOTTO, A. N. Nonlinear displacement-based finite-element analyses of composite shells - a new total lagrangian formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 32, 1995.
- 51 BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Klaus-Jurgen Bathe, 1996.
- 52 LI, Z. X.; LIU, Y. F.; IZZUDDIN, B. A.; VU-QUOC, L. A stabilized co-rotational curved quadrilateral composite shell element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 86, 2011.
- 53 KIM, K.; HAN, S.; SUTHASUPRADIT, S. Geometrically non-linear analysis of laminated composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 42, 2007.
- 54 HAN, S.; TABIEI, A.; PARK, W. Geometrically nonlinear analysis of laminated composite thin shells using a modified first-order shear deformable element-based lagrangian shell element. **Composite Structures**, v. 82, 2008.
- 55 MARGUERRE, K. Zur theorie der gekrumnten platte grosser formänderung. In: Fifth International Congress for Applied Mechanics. c1938.
- 56 PARENTE JR, E. **Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares**. 2000. 184 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- 57 VON KARMAN, T. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. **Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften**, v. 4, p. 311–385, 1910.
- 58 ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. **The finite element method for solid and structural mechanics**. McGraw Hill, 2005. v. II.
- 59 TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. 2a ed. ed. McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1959.
- 60 PARENTE JR., E.; HOLANDA, A. S.; SILVA, S. M. B. A. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, v. 38, p. 505–520, 2006.

- 61 BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 74, 1979.
- 62 SIMONS, J.; BERGAN, P. G. Hyperplane displacement control methods in nonlinear analysis. **Innovative Methods for Nonlinear Problems**, 1984.
- 63 POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 17, 1981.
- 64 WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, 1971.
- 65 RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, 1979.
- 66 CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. **Computers and Structures**, v. 13, 1981.
- 67 RAMM, E. Strategies for tracing the non-linear response near limit-points. **Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, 1981.
- 68 CRISFIELD, M. A. Accelerated solution techniques and concrete cracking. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 33, 1982.
- 69 MATTHIES, H.; STRANG, G. The solution of non-linear finite element equations. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 14, 1979.
- 70 MEEK, J. L.; LONGANTHAN, S. Large displacement analysis of space-frame structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 72, 1989.
- 71 FENG, Y. T.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. **Computers and Structures**, v. 58, 1996.
- 72 FORDE, B. W. R.; STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 27, 1987.
- 73 SCHWEIZERHOF, K. H.; P., W. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1986.
- 74 SZE, K. Y.; LIU, X. H.; LO, S. H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite Element in Analysis and Design**, v. 40, 2004.
- 75 NALI, P.; CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. **Composites: Part B**, 2011.
- 76 SODEN, P. D.; HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates. **Composites Science and Technology**, v. 58, p. 1225–1254, 1998.
- 77 HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. A comparison of the predictive ca-

- pabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence. **Composites Science and Technology**, v. 62, p. 1725–1797, 2002.
- 78 HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: comparison with experimental evidence. **Composites Science and Technology**, v. 64, p. 549–588, 2004.
- 79 LABEAS, G.; BELESIS, S.; STAMATELOS, D. Interaction of damage failure and post-buckling behaviour of composite plates with cut-outs by progressive damage modeling. **Composites Part B**, v. 39, p. 304–315, 2008.
- 80 LIU, P. F.; ZHENG, J. Y. Progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite laminates using continuum damage mechanics. **Materials Science and Engineering A**, v. 485, p. 711–717, 2008.
- 81 PADHI, G. S.; SHENOI, R. A.; MOY, S. S. J.; HAWKINGS, G. L. Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending. **Composite Structures**, v. 40, p. 277–291, 1998.
- 82 SPOTTSWOOD, S. M.; PALAZOTTO, A. N. Progressive failure analysis of a composite shell. **Composite Structures**, v. 53, p. 117–131, 2001.
- 83 TAY, T. E.; LIU, G.; TAN, V. B. C.; SUN, X. S.; PHAM, D. C. Progressive failure analysis of composites. **Journal of Composite Materials**, v. 42, p. 1921–1946, 2008.
- 84 NAIK, G. N.; MURTY, A. V. K. A failure mechanism-based approach for design of composite laminates. **Composite Structures**, v. 45, 1999.
- 85 CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. Springer, 1998.
- 86 TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. Relatório técnico, Air Force Materials Laboratory, 1972.
- 87 GOL'DENBLAT, I. I.; KOPNOV, V. A. Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state. **Mekhanika Polimerov**, v. 1, p. 70–78, 1965.
- 88 KURAISHI, A.; TSAI, S. W.; LIU, K. K. A progressive quadratic failure criterion, part b. **Composites Science and Technology**, v. 62, 2002.
- 89 ENGELSTAD, S. P.; REDDY, J. N.; KNIGHT JR, N. F. Postbuckling response and failure prediction of graphite-epoxy plates loaded in compression. **AIAA Journal**, v. 30, 1992.
- 90 HASHIN, Z.; ROTEM, A. A fatigue criterion for fiber-reinforced materials. **Journal of Composite Materials**, v. 7, p. 448–464, 1973.
- 91 HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of Applied Mechanics**, v. 47, p. 329–334, 1980.
- 92 REDDY, Y. S.; REDDY, J. N. Three-dimensional finite element progressive failure analysis of composite laminates under axial extension. **American Society for Testing and Materials (ASTM)**, 1993.

- 93 SWANSON, S. R.; CHRISTOFOROU, A. P. Progressive failure in carbon/epoxy laminates under biaxial stress. **ASME Journal of Engineering Materials Technology**, v. 109, p. 12–16, 1987.
- 94 VERITAS, D. N. **Dnv-os-c501 - composite components - offshore standard**, 2010.
- 95 LIU, K. K.; TSAI, S. W. A progressive quadratic failure criterion for a laminate. **Composites Science and Technology**, v. 58, 1998.
- 96 POTGIETER, E.; STANDER, N. The genetic algorithm applied to stiffness maximization of laminated plates: review and comparison. **Structural Optimization**, v. 15, p. 221–229, 1998.
- 97 PARK, J. H.; HWANG, J. H.; LEE, C. S.; HWANG, W. Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms. **Composite Structures**, v. 52, p. 217–231, 2001.
- 98 MARLER, R. T.; ARORA, J. S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, p. 369–395, 2004.
- 99 DEKA, D. J.; SANDEEP, G.; CHAKRABORTY, D.; DUTTA, A. Multiobjective optimization of laminated composites using finite element method and genetic algorithm. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 24, p. 273–, 2005.
- 100 SILVA, R. F.; ROCHA, I. B. C. M.; PARENTE JR, E.; MELO, A. M. C.; HOLANDA, A. S. Optimization of laminated tubes using finite element analysis. **In: XXXI CILAMCE**, 2010.
- 101 WALKER, M.; HAMILTON, R. A technique for optimally designing fibre-reinforced laminated plates under in-plane loads for minimum weight with manufacturing uncertainties accounted for. **Engineering with Computers**, v. 21, p. 282–288, 2006.
- 102 LEMANSKI, S. L.; HILL, G. F. J. WEAVER, P. M. The relative merits of genetic algorithms in the optimization of laminated cylindrical shells. **In: 3rd ASMO Conference on Engineering Design Optimization**, 2001.
- 103 AKBULUT, M.; SONMES, F. O. Optimum design of composite laminates for minimum thickness. **Computers and Structures**, v. 86, p. 1974–1982, 2008.
- 104 RAO, A. R. M.; ARVIND, N. A scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminate composites. **Composite Structures**, v. 70, p. 383–402, 2005.
- 105 IJSSELMUIDEN, S. T.; ABDALLA, M. M.; SERESTA, O.; GURDAL, Z. Multi-step blended stacking sequence design of panel assemblies with buckling constraints. **Composites: Part B**, v. 40, p. 329–336, 2009.
- 106 PELLETIER, J. L.; VEL, S. S. Multi-objective optimization of fiber reinforced composite laminates for strength, stiffness and minimal mass. **Computers and Structures**, v. 84, 2006.
- 107 PUNCH III, W. F.; AVERILL, R. C.; GOODMAN, E. D.; LIN, S.-C.; DING, Y.; YIP,

- Y. C. Optimal design of laminated composite structures using coarse-grain parallel genetic algorithms. **Computing Systems in Engineering**, v. 5, p. 415–423, 1994.
- 108 OMKAR, S. N.; VENKATESH, A.; MUDIGERE, M. Mpi-based parallel synchronous vector evaluated particle swarm optimization for multi-objective design optimization of composite structures. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 25, p. 1611–1627, 2012.
- 109 RAHUL; CHAKRABORTY, D.; DUTTA, A. Optimization of frp composites against impact induced failure using island model parallel genetic algorithm. **Composites Science and Technology**, v. 65, p. 2003–2013, 2005.
- 110 HENDERSON, J. L. Laminated plate design using genetic algorithms and parallel processing. **Computing Systems in Engineering**, v. 5, p. 441–453, 1994.
- 111 KELLER, D. Optimization of ply angles in laminated composite structures by a hybrid, asynchronous, parallel evolutionary algorithm. **Composite Structures**, v. 92.
- 112 LEE, D. S.; MORILLO, C.; BUGEDA, G.; OLLER, S.; ONATE, E. Multilayered composite structure design optimisation using distributed/parallel multi-objective evolutionary algorithms. **Composite Structures**, v. 94, p. 1087–1096, 2012.
- 113 HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975.
- 114 OpenMP Architecture Review Board. OpenMP application program interface version 3.1, 2011.
- 115 GABRIEL, E.; FAGG, G. E.; BOSILCA, G.; ANGSKUN, T.; DONGARRA, J. J.; SQUYRES, J. M.; SAHAY, V.; KAMBADUR, P.; BARRETT, B.; LUMSDAINE, A.; CASTAIN, R. H.; DANIEL, D. J.; GRAHAM, R. L.; WOODALL, T. S. Open MPI: Goals, concept, and design of a next generation MPI implementation. In: . Budapest, Hungary: , c2004. p. 97–104.
- 116 BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 703–736, 2004.
- 117 DEB, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 186, p. 311–338, 2000.
- 118 GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search optimization and machine learning**. Addison-Wesley Professional, 1989.
- 119 ALBA, E.; TROYA, J. M. A survey of parallel distributed genetic algorithms. **Complexity**, v. 4, p. 31–52, 1999.
- 120 KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. c1995.
- 121 COLORNI, A.; DORIGO, M.; MANIEZZO, V. Distributed optimization by ant colonies.

In: European Conference on Artificial Life - ECAL91. c1991.

- 122 ATHAN, T. W.; PAPALAMBROS, P. Y. A note on weighted criteria methods for compromise solutions in multi-objective optimization. **Engineering Optimization**, v. 27, p. 155–176, 1996.