



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:**  
**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**LEANDRO SOARES MOREIRA**

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO  
ADERENTE VIA ELEMENTOS FINITOS**

**FORTALEZA**

**2016**

LEANDRO SOARES MOREIRA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO  
ADERENTE VIA ELEMENTOS FINITOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: João Batista Marques de Sousa Junior, D. Sc.

Coorientador: Evandro Parente Junior, D. Sc.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M837a Moreira, Leandro Soares.  
Análise não linear de vigas de concreto com protensão não aderente via elementos finitos / Leandro Soares Moreira. – 2016.  
135 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.  
Coorientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

1. concreto protendido. 2. protensão não aderente. 3. elementos finitos. I. Título.

CDD 624.1

---

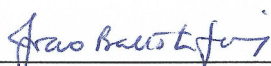
LEANDRO SOARES MOREIRA

ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO ADERENTE  
VIA ELEMENTOS FINITOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em 27 /05 /2016.

**BANCA EXAMINADORA**



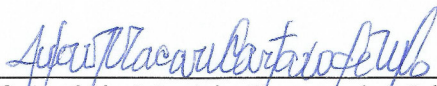
---

Prof. João Batista Marques de Sousa Junior, Dr. (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará – UFC



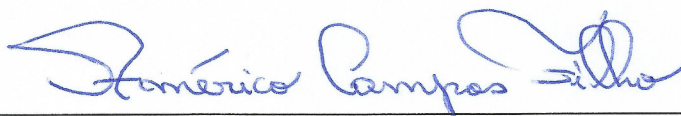
---

Prof. Evandro Parente Junior, Dr. (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará – UFC



---

Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, Dr.  
Universidade Federal do Ceará – UFC



---

Prof. Américo Campos Filho, Dr.  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

À Deus.

Aos meus pais, Moreira e Sandra.

Aos meus irmãos, José e Anderson.

À minha namorada Adryssa.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado a graça a cada passo nesse mestrado.

Agradeço de forma especial aos meus pais, que me geraram, me criaram e me educaram, sempre com o melhor que podiam dar. Eles também têm por mérito parte dessa conquista.

Eu também agradeço aos meus irmãos José e Anderson pela fiel amizade, pois sei que eles estão sempre juntos comigo. À minha namorada Adryssa, que sempre soube me incentivar nos momentos difíceis. Aos meus amigos, Jerley, Neto, Guedes e Pedro.

Agradeço ao meu orientador, Prof. João Batista Marques Sousa Junior, que teve papel fundamental para realização dessa dissertação, disponibilizando-se desde a revisão bibliográfica até os resultados finais.

Agradeço ao meu co orientador, Prof. Evandro Parente Junior, pelas contribuições relevantes para a realização da dissertação.

Aos colegas do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV).

À Capes pelo apoio financeiro.

“E ao olhar pra trás em meu peito arde a gratidão. Em tudo o que passou, a certeza da Tua presença no sol que queimou, no vento que levou, no frio que assustou. Foi o sol que inflamou, o vento que fecundou e o frio que aproximou. É que a dor é cuidado e a queda é oportuna pra recomeçar. Teu amor é o sustento constante e em todo o passado estava Tua mão a me cuidar” (Musical Estações, Primavera)

## RESUMO

Esse trabalho visa apresentar um modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas de concreto com protensão não aderente interna e externa. A teoria de vigas de Euler-Navier-Bernoulli foi utilizada para o desenvolvimento da formulação do elemento finito de pórtico plano. A não linearidade geométrica foi considerada através da formulação Lagrangiana Total. O cabo de protensão foi modelado através de elementos de treliça, a partir da discretização do cabo em trechos retos. O Método das Fatias foi utilizado para integração dos esforços internos e da matriz de rigidez tangente na seção transversal, e a integração ao longo do elemento foi feita pela quadratura de Gauss. A Lei constitutiva adotada para o concreto na compressão foi a do Eurocode 2 (2004) e Zupan e Saje (2005), embora outras curvas tenham sido implementadas para efeito de comparação. O aço da armadura passiva foi modelado como elasto-plástico, com endurecimento linear. O modelo adotado para o aço de protensão foi o de Menegotto e Pinto (1973). As perdas por atrito do aço de protensão com a bainha foram desprezadas, devido à presença de graxa entre os dois materiais. Ao final, a qualidade da formulação para a simulação de vigas protendidas com cabos não-aderentes é avaliada através da comparação com resultados experimentais, para cargas de curta duração.

**Palavras-chave:** concreto, protensão não aderente, elementos finitos.



## ABSTRACT

This work aims to present a finite element model for nonlinear material and geometric analysis of prestressed concrete beams with internal and external unbonded tendons. The beam theory of Euler-Bernoulli-Navier was used for the development of the plane frame finite element formulation. The geometric nonlinearity was found over the total Lagrangian formulation. The tendons were modeled using truss elements from the cable discretization in straight sections. The layer method was used for integration of the internal forces and the tangent stiffness matrix in cross section, and integration over the element was made by the Gaussian quadrature. The constitutive law adopted for concrete in compression was the Eurocode 2 (2004) and Zupan e Saje (2005), although other curves have been implemented for comparison. The reinforcement steel was modeled as elastic-plastic with linear hardening. The model adopted for the prestressing steel was the Menegotto and Pinto (1973) model. The frictional losses of the prestressing steel with the sheath were discarded due to the presence of grease between the two materials. At the end, the quality of the formulation for the simulation of prestressed beams with unbonded tendons is evaluated by comparison with experimental results for short-term loads.

**Palavras-chave:** prestressed concrete, unbonded tendon, finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ponte do Galeão (ou Ponte Velha) .....	18
Figura 2 - Edifício Residencial Oren (Lajes lisas protendidas).....	20
Figura 3 - Laje nervurada com viga faixa protendida.....	21
Figura 4 - Ponte protendida em balanços sucessivos.....	22
Figura 5 - Radier protendido com cordoalhas não aderentes .....	23
Figura 6 - Silo circular com parede de concreto protendido .....	24
Figura 7 - Marquise de entrada do Hospital da Mulher em Fortaleza (Foto1).....	25
Figura 8 - Vigas de concreto pré-moldado.....	26
Figura 9 - Desenho ilustrativo de mono cordoalha engraxada de sete fios.....	28
Figura 10 - Diagrama tensão-deformação de ensaio à tração de cordoalha de sete fios de 12,7 mm (CP 190 RB) .....	30
Figura 11 - Bainhas metálicas .....	31
Figura 12 - Dispositivo de ancoragem de mono cordoalha engraxada.....	33
Figura 13- Peça de concreto após a aplicação de uma protensão centrada.....	41
Figura 14 - Esquema de forças de atrito sob cabo curvo infinitesimal.....	44
Figura 15 - Cabo composto por vários trechos curvos .....	45
Figura 16 – Variação da tensão na armadura após perdas de protensão por atrito e acomodação da ancoragem.....	48
Figura 17 - Encurtamento do concreto ao longo do tempo, devido à retração.....	50
Figura 18- Elementos de treliça (a), viga (b) e pórtico plano (c). .....	60
Figura 19 - Seção do elemento antes e depois da translação e da rotação .....	61
Figura 20 - Representação dos polinômios de Hermite .....	66
Figura 21 - Elemento de viga e elemento de cabo (treliça) antes e após a deformação .....	75
Figura 22 - Interpretação física do vetor de forças internas do elemento de cabo .....	80
Figura 23 - Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão, segundo NBR 6118 (2014).....	95
Figura 24 - Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial.....	97
Figura 25 - Modelo constitutivo para o concreto segundo Hognestad (1951).....	98
Figura 26 - Modelo constitutivo para o concreto segundo Carreira e Chu (1985).....	99
Figura 27 - Modelo constitutivo do concreto adotado por Zupan e Saje (2005).....	100
Figura 28 - Modelo elasto-plástico perfeito .....	101

Figura 29 - Modelo elasto-plástico com endurecimento linear .....	101
Figura 30 - Modelo trilinear .....	102
Figura 31 - Diagrama tensão-deformação do aço de protensão, segundo Menegotto e Pinto (1973).....	103
Figura 32 - Diagrama tensão-deformado recomendado pela NBR 6118 (2014).....	104
Figura 33 - Curva de equilíbrio da viga de Burns (1962).....	106
Figura 34 - Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga B7 de Hussien et al (2012). (unidades em cm).....	107
Figura 35 - Curva de equilíbrio da viga B7 ensaiada por Hussien et al. (2012) .....	108
Figura 36 - Incremento de tensão no cabo da viga B7 de Hussien et al (2012).....	109
Figura 37 - Detalhe do carregamento e do perfil do cabo das vigas do Grupo A de Tao e Du (1985) (unidades em cm) .....	110
Figura 38 - Curva de equilíbrio da viga A1 de Tao e Du (1985) .....	111
Figura 39 - Incremento de tensão no cabo da viga A1 de Tao e Du (1985) .....	112
Figura 40 - Curva de equilíbrio da viga A2 de Tao e Du (1985) .....	112
Figura 41 - Incremento de tensão no cabo da viga A2 de Tao e Du (1985).....	113
Figura 42 - Curva de equilíbrio da viga A3 de Tao e Du (1985) .....	113
Figura 43 - Incremento de tensão no cabo da viga A3 de Tao e Du (1985) .....	114
Figura 44 - Curva de equilíbrio da viga A4 de Tao e Du (1985) .....	114
Figura 45 - Incremento de tensão no cabo da viga A4 de Tao e Du (1985) .....	115
Figura 46 - Curva de equilíbrio da viga A5 de Tao e Du (1985) .....	115
Figura 47 - Incremento de tensão no cabo da viga A5 de Tao e Du (1985) .....	116
Figura 48 - Curva de equilíbrio da viga A6 de Tao e Du (1985) .....	116
Figura 49 - Incremento de tensão no cabo da viga A6 de Tao e Du (1985) .....	117
Figura 50 - Curva de equilíbrio da viga A7 de Tao e Du (1985) .....	117
Figura 51 - Incremento de tensão no cabo da viga A7 de Tao e Du (1985) .....	118
Figura 52 - Curva de equilíbrio da viga A8 de Tao e Du (1985) .....	118
Figura 53 - Incremento de tensão no cabo da viga A8 de Tao e Du (1985) .....	119
Figura 54 - Curva de equilíbrio da viga A9 de Tao e Du (1985) .....	119
Figura 55 - Incremento de tensão no cabo da viga A9 de Tao e Du (1985) .....	120
Figura 56 - Detalhe da viga contínua ensaiada por Chen (2008) .....	121
Figura 57 - Curva de equilíbrio da viga YLA1 de Chen (2008) .....	122
Figura 58 - Incremento de tensão no cabo da viga YLA1 de Chen (2008) .....	122
Figura 59 - Detalhe das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006) (unidade em mm).....	123

Figura 60 - Seções transversais das vigas ensaiadas por Tan e Ng (2006) (unidades em mm) .....	124
Figura 61 - Curvas de equilíbrio das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006).....	125
Figura 62 - Incremento de tensão nos cabos das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006) ..	126
Figura 63 - Detalhe da viga modelada por Harajli (2002) .....	127
Figura 64 - Curva de equilíbrio da viga B6D3 de Harajli (2002).....	128

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficiente de atrito para cada tipo de cabo, conforme NBR 6118 (2014).....	46
Tabela 2 - Coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e coeficiente de perda parasita ( $k$ ), segundo ACI 343R (1988).....	46
Tabela 3 - Coeficiente $\alpha$ de acordo com o tipo de cimento.....	52
Tabela 4 - Valores médios de $\psi_{1000}$ , segundo NBR 6118 (2014).....	55
Tabela 5 - Pesos e coordenadas das quadraturas de Gauss.....	86
Tabela 6 - Pesos das quadraturas de Lobatto.....	87
Tabela 7 - Parâmetros mensurados das vigas de Tao e Du (1985).....	111
Tabela 8 - Parâmetros das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006).....	125

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	13
1.1	Objetivos .....	15
1.2	Organização da dissertação .....	15
2	GENERALIDADES DOS SISTEMAS DE PROTENSÃO.....	17
2.1	Histórico da protensão .....	17
2.2	Aplicações da protensão.....	19
2.3	Materiais.....	26
2.3.1	Concreto .....	26
2.3.2	Aços de protensão.....	28
2.3.3	Bainhas.....	31
2.3.4	Ancoragens.....	31
2.3.5	Nata de injeção .....	33
2.4	Sistemas de protensão .....	33
2.4.1	Pré-tração .....	34
2.4.2	Pós-tração.....	34
2.4.3	Comparativo entre a protensão aderente e a não aderente .....	35
2.5	Tipos de protensão.....	38
2.5.1	Protensão completa.....	38
2.5.2	Protensão limitada .....	38
2.5.3	Protensão parcial.....	39
2.5.4	Escolha do tipo de protensão.....	39
2.6	Perdas de protensão .....	41
2.6.1	Perda de protensão por encurtamento elástico do concreto .....	41
2.6.2	Perda de protensão por atrito.....	43
2.6.3	Perda de protensão por acomodação da ancoragem .....	47
2.6.4	Perda de protensão por retração do concreto .....	49
2.6.5	Perda de protensão por fluência do concreto .....	52
2.6.6	Perda de protensão por relaxação da armadura de protensão .....	55
2.6.7	Cálculo aproximado das perdas progressivas segundo NBR 6118 (2014).....	56
3	FORMULAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS .....	59
3.1	Formulação do elemento finito do concreto e da armadura passiva.....	59
3.1.1	Contribuição da armadura passiva.....	71

3.2	Formulação do elemento finito do cabo de protensão não aderente.....	73
4	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO .....	84
4.1	Métodos de integração ao longo do eixo longitudinal.....	85
4.1.1	Integração de Gauss .....	86
4.1.2	Integração de Lobatto .....	87
4.2	Integração na seção transversal .....	88
5	MÉTODO DE TRAÇADO DO CAMINHO DE EQUILÍBRIO.....	90
5.1	Controle de carga (aplicação da protensão) .....	91
5.2	Controle de deslocamentos (aplicação da carga externa) .....	93
6	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS .....	95
6.1	Concreto .....	95
6.2	Aço de armadura passiva .....	101
6.3	Aço de protensão .....	102
7	EXEMPLOS .....	105
7.1	Viga de concreto armado Burns e Siess (1962) .....	105
7.2	Viga com protensão interna de Hussien et al (2012).....	107
7.3	Vigas com protensão interna de Tao e Du (1985).....	109
7.4	Viga contínua com protensão interna YLA1 de Chen (2008).....	120
7.5	Vigas com protensão externa de Tan e Ng (2006) .....	123
7.6	Viga contínua com protensão externa de Harajli (2002) .....	126
8	CONCLUSÃO .....	129
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	130

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto é um material frágil que apresenta boa resistência à compressão, mas baixa resistência à tração, cerca de 10% da sua resistência à compressão. Baseado nesse fato, a fim de combater as tensões de tração, presentes nos esforços de flexão, por exemplo, surgiu a ideia de colocar barras de aço no interior dos elementos de concreto, nas regiões onde o concreto apresentasse tensões de tração. A esse conjunto concreto e aço, devidamente solidarizado, dá-se o nome de concreto armado.

No entanto, devido à aderência entre o aço e o concreto, formam-se fissuras na região tracionada, o que diminui significativamente a inércia da peça, aumentando os deslocamentos, além de reduzir a proteção da armadura de aço contra a corrosão.

Com isso, surge a ideia da aplicação de forças que tendem a comprimir e fletir previamente o concreto (protensão), por meio de cabos de aço, que são tracionados e apoiados no concreto.

O concreto protendido pode então ser definido como o concreto submetido a tensões internas, previamente desenvolvidas através do alongamento prévio do aço, que é devidamente ancorado à peça, de modo que tais tensões resultem em um contrabalanceamento das tensões geradas pelo carregamento externo.

A ideia da aplicação da protensão é que em serviço, o concreto não apresente tensões de tração (protensão total), ou que essa tensão de tração seja limitada a um valor admissível, de modo que o concreto não fissure, fazendo com que a peça trabalhe no Estádio I, que tem uma inércia bastante superior à da peça fissurada, o que reduz significativamente as flechas, possibilitando elementos estruturais com maiores vãos e menores alturas.

A protensão combina os materiais concreto e aço de uma forma mais eficiente que o concreto armado, visto que o aço é utilizado sob altas tensões, pois este é pré-alongado e as tensões no concreto são de compressão, onde este material apresenta maior resistência.

A protensão permite o emprego de aços de alta resistência pelo fato do aço de protensão ser previamente alongado antes de começar a trabalhar em conjunto com a peça de concreto, possibilitando que tensões próximas aos limites de resistência do aço de alta resistência sejam atingidos, já que as deformações correspondentes são consideravelmente maiores do que as apresentadas nos limites de resistência à tração do concreto.

Com isso, caso os aços de alta resistência fossem utilizados com toda sua capacidade em vigas de concreto armado, como armadura passiva, as deformações no



concreto seriam tão grandes que a aderência entre o aço e o concreto seria perdida, o que levaria a peça a um comportamento inadequado para a filosofia do concreto armado, além da formação de fissuras excessivas.

A protensão sugere também a utilização de concretos de alta resistência, devido aos elevados esforços de compressão aplicados à peça, além de reduzir as deformações imediatas e progressivas, devido a fluência e retração, que são causas de perdas de protensão, como será mostrado posteriormente.

Desse modo, algumas vantagens do concreto protendido em relação ao concreto armado podem ser listadas:

- Permite estruturas com maiores vãos ( $L$ ), para a mesma altura ( $h$ ) da peça. Ou ainda, permite menores alturas ( $h$ ) da peça para o mesmo vão ( $L$ ). Ou seja, permite o emprego de estruturas mais esbeltas ( $L/h$ ).

- Desse modo, para um mesmo lançamento estrutural, a estrutura de concreto protendido apresentará um menor consumo de concreto, resultando em um peso total da estrutura menor, e conseqüentemente em menores cargas nas fundações.

- Além disso, no caso do uso de protensão em todos os elementos do pavimento (vigas e lajes), o pé-direito da edificação torna-se menor, resultando em uma menor altura do edifício, ou ainda em um maior número de pavimento para uma mesma altura. Tal redução no pé-direito pode ser bastante vantajosa quando se considera a diminuição de escavações de subsolos e comprimentos de rampas de acesso.

- Redução ou eliminação da abertura de fissuras, tornando a estrutura mais protegida contra a corrosão, aumentando assim sua durabilidade.

- Redução das flechas.

- No caso da protensão total e da protensão limitada, onde o concreto permanece intacto, ou seja, não há fissuração em serviço, a análise linear física pode ser adotada, tornando a solução mais simples.

- Redução da variação de tensão no aço, devido às cargas móveis, o que aumenta à resistência à fadiga da estrutura.

- Estruturas com maior comprimento total, sem a necessidade de juntas de dilatação, devido ao efeito da compressão.

- As estruturas protendidas são testadas antes do seu uso, visto que na fase de protensão o concreto é submetido à elevadas tensões de compressão, principalmente nas zonas

próximas às ancoragens, e o aço de protensão é submetido à uma tensão aproximadamente 80% da sua resistência última.

## **1.1 Objetivos**

O objetivo geral desse trabalho é a implementação de um modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas de concreto protendido.

Os objetivos específicos são:

- a) Desenvolver um modelo de elementos finitos, que considere o comportamento de vigas de concreto protendido com cabos não aderentes e implementá-lo no software MATLAB.
- b) Adotar leis constitutivas uniaxiais para o material concreto que represente o seu comportamento não linear.
- c) Adotar leis constitutivas uniaxiais para os materiais aço passivo e ativo que representem satisfatoriamente seus comportamentos.
- d) Verificar o modelo proposto através da comparação com resultados experimentais.

## **1.2 Organização da dissertação**

A dissertação foi dividida em oito capítulos. O capítulo 2 apresenta uma introdução ao sistema de protensão, mostrando os seus conceitos básicos. Nesse capítulo, as vantagens das estruturas de concreto protendido em relação às de concreto armado são mostradas, justificando o uso recorrente da protensão em obras. Posteriormente, um breve histórico da protensão é apresentado, bem como as principais aplicações da protensão em estruturas. Os principais materiais empregados, os sistemas de protensão e os tipos de protensão e sua escolha são mostrados. E, por fim, faz-se uma elucidação das perdas de protensão.

No capítulo 3, a formulação do modelo de análise de vigas de concreto com protensão não aderente desenvolvido nesse trabalho é apresentada. Desse modo, é mostrada a formulação dos elementos finitos de pórtico plano, que representa a viga de concreto armado, e do elemento finito de cabo, que representa o aço de protensão.

No capítulo 4, os métodos de integração longitudinal e na seção transversal do elemento finito são mostrados. Na integração longitudinal são mostrados dois métodos de integração por meio de quadraturas: Lobatto e Gauss. Para integração na seção transversal, o método das fatias é apresentado.

No capítulo 5, o método de traçado do caminho do equilíbrio adotado nesse trabalho é apresentado. Nesse capítulo, são mostrados o método do controle de carga e o método do controle de deslocamentos, que serão utilizados para o traçado do caminho de equilíbrio, bem como sua aplicação dentro do contexto do elemento finito apresentado, que considera a aplicação da protensão, através da deformação imposta.

No capítulo 6, são mostrados os principais modelos constitutivos dos materiais concreto, aço passivo e aço de protensão. Os modelos constitutivos apresentados referem-se a ensaios de compressão e tração uniaxial, visto que o modelo de elemento finitos desenvolvido nesse trabalho é de pórtico plano.

No capítulo 7, o modelo de elementos finitos desenvolvido para a simulação de vigas protendidas com cabos não-aderentes é avaliada através da comparação com resultados experimentais disponíveis na literatura, de ensaios de vigas com protensão interna e externa, com cargas de curta duração.

## **2 GENERALIDADES DOS SISTEMAS DE PROTENSÃO**

Nesse capítulo, será feito um breve histórico da protensão e suas principais aplicações. Em seguida, os conceitos gerais dos sistemas de protensão serão introduzidos, tais como: os materiais empregados, os sistemas, os tipos e as perdas de protensão.

### **2.1 Histórico da protensão**

A primeira aplicação da protensão no concreto foi em 1886, quando o engenheiro P. H. Jackson, de São Francisco, Califórnia, protendeu arcos de concreto. Em 1888, C. E. W. Doehring, da Alemanha, passou a aplicar protensão em lajes de concreto armado, após a estrutura ser carregada.

Essas aplicações eram baseadas no fato do concreto resistir melhor a compressão que a tração, e ao aplicar a protensão, a peça estaria totalmente sob tensões de compressão. Todavia, no final do século 19, várias patentes de sistemas de protensão foram sendo desenvolvidas, no entanto sem êxito, pois os efeitos de relaxação e fluência do concreto ainda eram pouco conhecidos, e a protensão se perdia com o tempo.

Em 1908, C. R. Steiner, dos Estados Unidos, sugeriu que os cabos fossem protendidos novamente após boa parte das perdas ao longo do tempo, devido à retração a fluência, terem sido desenvolvidas. Em 1925, R. E. Dill, dos Estados Unidos, propôs a alternativa de utilizar barras de aço de alta resistência revestidas para evitar a aderência com o concreto. A tentativa de Dill foi frustrada, porque não tinha aplicabilidade em termos econômicos.

Desse modo, embora os princípios da protensão tenham sido introduzidos nos Estados Unidos e na Alemanha no final do século 19, foi em 1938 que o engenheiro francês Eugene Freyssinet quem tornou a aplicação da protensão viável em termos práticos. O sistema desenvolvido pelo engenheiro francês utilizava fios de aço de alta resistência de 5 mm, ancoragem com cones machos e fêmeas e macacos hidráulicos, que além de tracionar os fios, servia para cravar os cones.

A primeira obra em concreto protendido no Brasil foi a ponte do Galeão, localizada no Rio de Janeiro, construída em 1948 e inaugurada em janeiro de 1949. Para a construção dessa ponte, além do sistema Freyssinet ter sido utilizado, todo o material, como aço de protensão, ancoragens, bainhas, equipamentos, foram trazidos da França.

O projeto estrutural também foi de autoria de Freyssinet, sendo utilizada protensão total nos elementos estruturais protendidos, ou seja, toda as peças protendidas foram projetadas para estarem totalmente comprimidas, em serviço.

Figura 1 - Ponte do Galeão (ou Ponte Velha)



Fonte: <http://oglobo.globo.com/rio/bairros/>

No Brasil, até o final do século 20, a protensão não aderente era muito pouco utilizada em edifícios. A NBR 7197 (1989), que hoje se encontra incorporada a NBR 6118 (2014), só permitia o emprego da protensão com cabos não aderentes, se fosse adotada protensão total, o que inviabilizava os projetos em protensão não aderente do ponto de vista econômico. A NBR 6118 (2014) não faz nenhuma recomendação nesse sentido.

Em 1952, a Belgo Mineira inicia a fabricação de aço de protensão. A protensão começou então a ser difundida no país, tendo seu uso mais restrito a estruturas de pontes e viadutos, sempre utilizando protensão com aderência posterior, que é o sistema mais adotado para esse tipo de estrutura, devido às elevadas cargas acidentais.

A partir de 1997, deu-se início a fabricação das cordoalhas engraxadas e plastificadas pela Belgo Mineira. Assim, os projetistas e construtores passaram a ter a disposição uma nova solução estrutural, que pode ser vista como bastante vantajosa em termos econômicos e construtivos, quando comparada às estruturas de concreto armado

tradicional, mas também quando comparada com a protensão com aderência posterior, no caso de edifícios residenciais, onde as cargas acidentais não são tão significantes.

Todavia, com o domínio da técnica por parte dos projetistas, fabricação das mono cordoalhas não aderentes a um custo competitivo no mercado, consolidação de empresas especializadas na execução de estruturas protendidas e o desenvolvimento de projetos arquitetônicos mais ousados, onde a utilização de elementos com grandes vãos livres e esbeltes elevada são quase inevitáveis no lançamento da estrutura, a protensão tem tido sua utilização cada dia mais crescente em obras de edifícios residenciais e comerciais.

## **2.2 Aplicações da protensão**

A seguir serão mostradas algumas das principais aplicações do concreto protendido e os tipos de soluções mais comuns.

A Figura 2 mostra um edifício residencial onde foram utilizadas como solução estrutural lajes lisas protendidas, com vãos de até 7,5 metros.

Esse tipo de estrutura tem sido executado nos Estados Unidos, principalmente na Califórnia, desde a década de 50, apresentando bom desempenho. As principais vantagens desse tipo de solução estrutural, além das vantagens do concreto protendido como um todo já listadas anteriormente, são as seguintes:

- Rapidez na execução, devido à ausência de vigas.
- Aumento da produtividade, menor custo de mão-de-obra
- Redução de formas; redução de até 70% quando comparado as estruturas de concreto armado convencional (Cauduro, 2006)
- Maior flexibilidade quanto ao uso da estrutura, permitindo layouts residenciais diversos, até mesmo personalizados pelo cliente.
- Facilidade na obtenção de prumos dos pilares, que podem ser concretados antes da laje.
- Acabamento final elegante.

Figura 2 - Edifício Residencial Oren (Lajes lisas protendidas)



Fonte: <http://www.procalc.com.br/blog/wp-content/uploads/2013/02/lajes-01.jpg>

A Figura 3 ilustra a estrutura de um edifício no qual a solução estrutural adotada é constituída por vigas protendidas e lajes nervuradas, onde a altura da viga é igual a altura da laje, sendo a mesma em todo o pavimento. Esse tipo de sistema apresenta vantagens construtivas, econômicas e arquitetônicas, e tem sido amplamente utilizado nos edifícios residenciais de Fortaleza.

A grande vantagem construtiva está no fato da utilização de formas plásticas. Comparado com a utilização de formas de madeira, a velocidade de execução é maior, devido a facilidade no manuseio das formas plásticas. As formas plásticas utilizadas para moldar a laje nervurada podem ser utilizadas nas vigas faixas, o que torna o processo construtivo ainda mais rápido, reduzindo o consumo de formas de madeira na obra.

Do ponto de vista econômico, além do custo de mão-de-obra ser reduzido, a laje nervurada, principalmente para vãos superiores a 7 metros, torna-se uma solução economicamente competitiva, comparada a laje maciça de concreto armado.

Por fim, quanto a arquitetura, esse sistema é semelhante ao da laje lisa, onde a flexibilidade de layout torna-se permitida, e os problemas de vigas aparentes ou custo com forro podem ser evitados.

Figura 3 - Laje nervurada com viga faixa protendida



Fonte: <https://www.flickr.com/photos/atex/albums/72157630763273454/with/7651348846/>

Como foi dito anteriormente, a primeira obra em concreto protendido no Brasil foi de uma ponte, e a aplicação da protensão nesse tipo de obra tem sido bastante frequente, devido aos grandes vãos a serem vencidos.

A Figura 4 ilustra uma ponte protendida em balanços sucessivos. Essa solução estrutural é bastante utilizada, pelo fato de, em geral, o escoramento dos tabuleiros serem de difícil ou mesmo impossível execução, devido a passagem de rios, vales ou ainda tráfego intenso de outra avenida presente.



Figura 4 - Ponte protendida em balanços sucessivos



Fonte: <http://infraestruturaurbana.pini.com.br/solucoes-tecnicas/21/pontes-por-balanco-sucessivo-tecnica-e-indicada-para-vencer-273265-1.aspx>

A protensão também tem grande utilização em estruturas de radier. O radier é um tipo de fundação rasa, que funciona como uma laje que se apoia no solo de maneira direta e recebe as cargas verticais dos pilares e das paredes.

Esse tipo de fundação é utilizado principalmente nas situações onde as distâncias entre os pilares pequenas, em obras com grande número de unidades e em pisos industriais.

A utilização desse tipo de sistema tem os seguintes benefícios:

- Flexibilidade no posicionamento das paredes.
- Maior velocidade de execução.
- Acabamento final sem a necessidade da execução do contrapiso.

Figura 5 - Radier protendido com cordoalhas não aderentes



Fonte: <http://www.impactoprotensao.com.br/component/k2/item/21-radier>

Outro tipo de aplicação da protensão em estruturas de concreto refere-se a construção de silos com paredes protendidas. Os silos são estruturas destinadas ao armazenamento de produtos sólidos, granulares e pulverulentos, podendo ter diversas formas, dependendo do tipo de produto a ser armazenado.

A Figura 6 mostra um silo circular de concreto com parede protendida, localizado em Matozinhos – MG, construído para o armazenamento de cimento e calcário, tendo 9,50 metros de diâmetro e 24 metros de altura.

Devido ao peso do produto armazenado, surge uma pressão radial com sentido de dentro para fora. Desse modo, posicionando os cabos em torno da circunferência da parede do silo, surgem forças que contrabalançam a pressão radial causada pelo peso dos grãos.

Figura 6 - Silo circular com parede de concreto protendido



Fonte: <http://www.mmprojetoconsultoria.com.br/portfolio-category/silos/>

A Figura 7 mostra a marquise de entrada do Hospital da Mulher em Fortaleza, onde foi utilizada protensão não aderente tanto na laje, quanto na estrutura de sustentação da laje, que é composta por um trecho reto, com a forma de um pilar, e um trecho de semicircunferência, tendo a forma final semelhante a uma bengala.

Esse tipo de estrutura pode ser classificado como obra de arte. A laje em balanço apresenta as seguintes dimensões: 24 metros de comprimento, 8 metros de largura e uma altura de 37 cm.

Na estrutura de sustentação da laje foram utilizados 130 mono cordoalhas não aderentes de sete fios de 15 mm, sendo protendidas ativamente por ambos os extremos. Após a retirada das escoras, observou-se um deslocamento vertical no ponto central de contato da estrutura de sustentação com a laje de 2 mm.

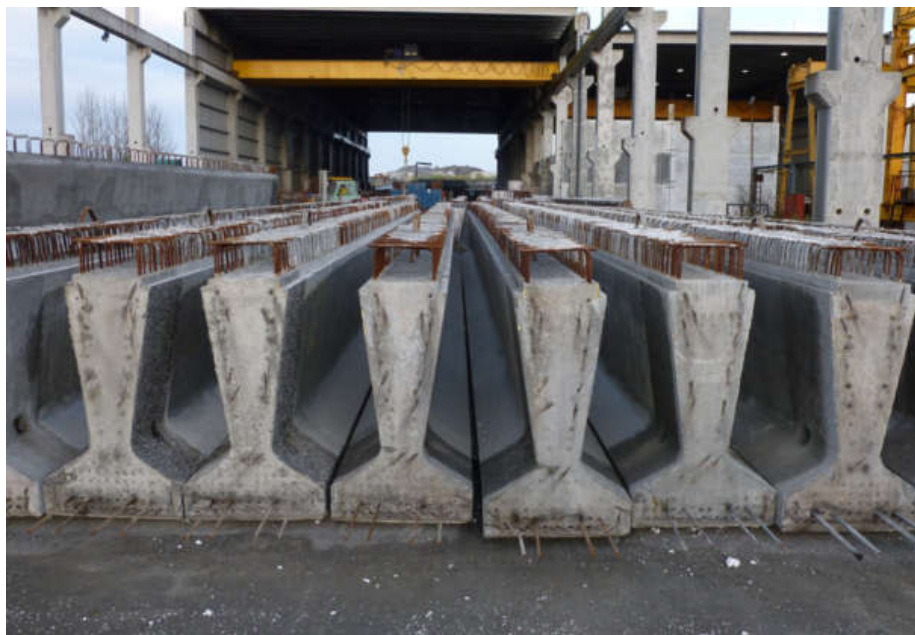
Figura 7 - Marquise de entrada do Hospital da Mulher em Fortaleza (Foto1)



Fonte: <http://www.impactoprotensao.com.br/component/k2/item/20-protens%C3%A3o-n%C3%A3o-aderente-com-cordoalhas-engraxadas>

Embora não seja o foco desse trabalho, a protensão é também amplamente utilizada na produção de peças de concreto pré-fabricadas, onde o concreto é moldado e protendido em pista de protensão. A Figura 8 ilustra vigas protendidas de concreto pré-moldado.

Figura 8 - Vigas de concreto pré-moldado



Fonte: <http://www.bancrete.com/products/precast-bridge-beams/>

## 2.3 Materiais

O concreto protendido é composto pelos seguintes materiais: concreto, aço de protensão, aço para armadura passiva, sendo utilizados ainda outros tipos de equipamentos como: bainhas, ancoragens, nata de cimento, macacos hidráulicos, que podem variar entre cada sistema de protensão.

Nessa seção, serão mostradas as principais características de cada um desses materiais, sendo os modelos constitutivos (relação tensão-deformação) dos materiais concreto, aço de protensão e aço passivo mostrados no capítulo 6.

### 2.3.1 Concreto

O concreto utilizado em estruturas protendidas tem, de modo geral, resistência superior ao utilizado em estruturas de concreto armado. Enquanto para o concreto armado, os valores usuais para a resistência característica do concreto à compressão variam entre 20 e 35 MPa, os valores de resistência encontrados para o concreto protendido variam entre 30 e 55 MPa.

Segundo Lin e Burns (1982), a experiência em estruturas de concreto protendido mostra que o uso de concretos com resistência entre 28 e 34 MPa levam a projetos mais econômicos, podendo ser adotados ainda valores de resistência do concreto de até 41 MPa em concreto protendido com aderência posterior. A explicação está no fato de que a produção deste concreto é viável in loco e o seu custo é relativamente baixo, quando comparado ao aumento de resistência da peça. No entanto, a escolha deve ser determinada analisando cada projeto.

Já os concretos com resistência entre 41 e 55 MPa são mais utilizados em peças de concreto pré-moldado, visto que esse tipo de concreto requer um controle tecnológico mais refinado.

O uso de concreto de alta resistência em estruturas de concreto protendido tem sua justificativa baseada nos seguintes aspectos:

- As ancoragens são em geral projetadas para serem utilizadas em concretos de alta resistência, a fim de que o seu custo seja reduzido. Desse modo, a utilização de concretos de menor resistência pode se tornar inviável, visto que existe o risco de o concreto falhar na aplicação da protensão, sendo necessário o uso de ancoragens especiais.
- Os concretos de alta resistência possuem maior módulo de elasticidade, o que reduz as perdas de protensão devido ao encurtamento elástico, à retração e à fluência do concreto.
- Como toda a seção de concreto permanece intacta em serviço, a escolha por concretos de alta resistência reduz significativamente as dimensões da peça, reduzindo seu peso próprio, o que capacita a estrutura a vencer maiores vãos.
- Concretos de alta resistência proporcionam uma maior proteção do aço de protensão contra a corrosão, que por estarem sob tensões muito elevadas são mais suscetíveis a corrosão.

É importante notar que o controle tecnológico em estruturas de concreto protendido deve ser mais rigoroso, de modo que a resistência à compressão deve ser necessariamente atingida. Essa exigência é necessária pelo fato de mais partes das peças de concreto protendido estarem submetidas a elevadas tensões de compressão.

No caso de uma viga simplesmente apoiada, as tensões de compressão no concreto são altas: no centro do vão, na face superior da viga, quando submetidas a carregamentos de alta magnitude, na face inferior, quando a protensão é aplicada e nas regiões próximas ao apoio, através das quais as tensões de propagam para o restante da peça.

### 2.3.2 Aços de protensão

Nas estruturas de concreto protendido, os aços de alta resistência são massivamente adotados para aplicação de protensão nas peças, sendo sua utilização garantida pelo pré-alongamento aplicado no mesmo, de modo que as tensões próximas aos limites de resistência do aço de alta resistência sejam atingidas, sem que haja fissuração significativa do concreto.

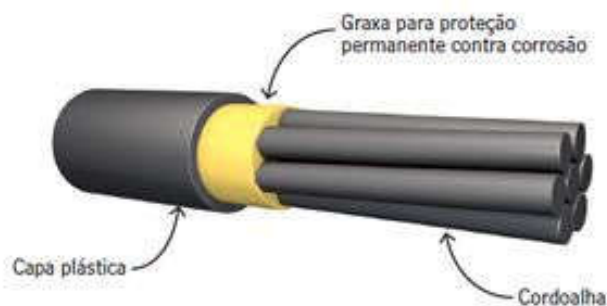
Os aços de alta resistência não possuem patamar de escoamento definido, sendo a tensão de escoamento definida pela tensão correspondente a um valor específico de deformação previamente determinado, que é em geral estabelecido como sendo igual a 0.1%.

Os três tipos de aço de protensão são os seguintes:

- Fios de aço carbono trefilados a frio e posteriormente submetidos a um tratamento térmico ou ainda termomecânico.
- Cordoalha de dois, três e de sete fios, com um fio central com diâmetro nominal no mínimo 2% maior do que os fios externos para a cordoalha de sete fios, sendo estes firmemente encordoados com um passo de 12 a 16 vezes o diâmetro nominal da cordoalha.
- Barras de aço laminadas a quente.

O tipo de aço mais utilizado em estruturas de concreto protendido com aderência posterior é a cordoalha de sete fios com diâmetro de 12,7 mm cada, tendo a cordoalha uma resistência última de aproximadamente 1860 MPa. A Figura 9 ilustra uma mono cordoalha engraxada de sete fios.

Figura 9 - Desenho ilustrativo de mono cordoalha engraxada de sete fios



Devido ao processo de trefilação utilizado na produção dos fios de aço, processo inverso ao de extrusão, onde o aço tem sua seção transversal reduzida e aumenta sua resistência última, a deformação referente ao limite de elasticidade dos fios torna-se baixa. Com isso, os fios são aquecidos a uma temperatura de 400 °C a fim de aliviar as tensões internas residuais do processo de trefilação, e conseqüentemente elevar os valores de deformação de escoamento do aço, tornando-os mais dúcteis. Esse processo é conhecido como revenimento.

No entanto, devido a esse incremento de temperatura no aço, o mesmo apresenta uma maior relaxação. Para evitar essa relaxação excessiva do aço, os mesmos podem ser aquecidos sob tensão, processo denominado estabilização, dando origem aos aços de relaxação baixa.

Assim, os aços de protensão são classificados também quanto ao tipo de tratamento utilizado no processo de revenimento.

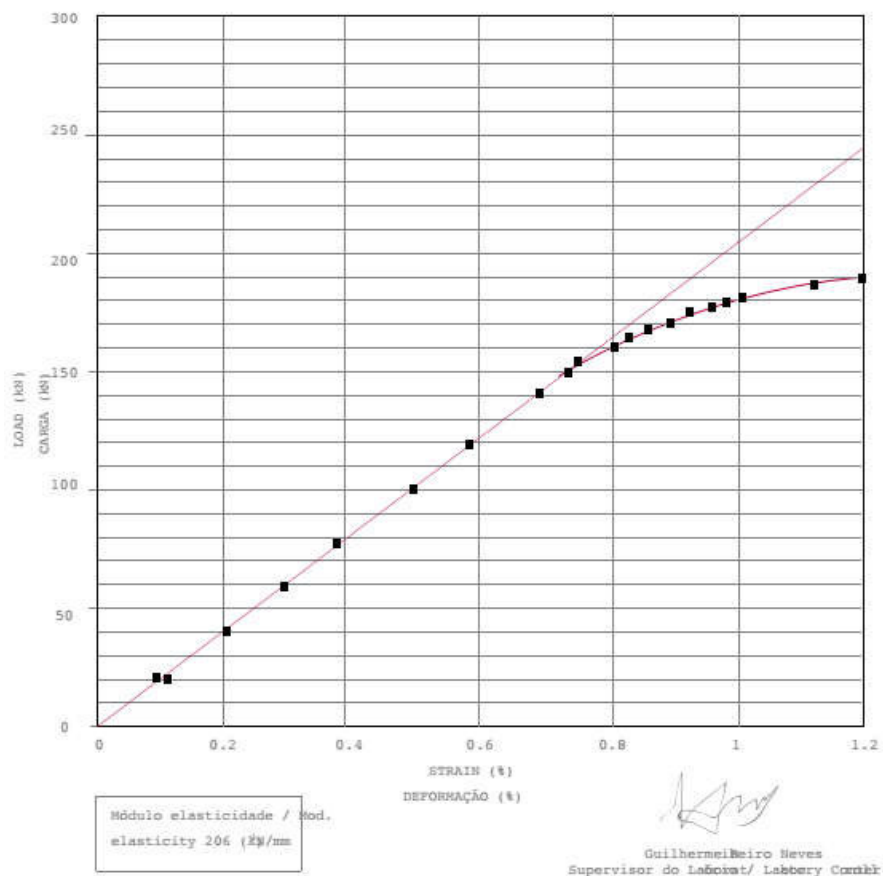
- Aço de relaxação baixa (RB) ou aliviados: aço no qual é realizado o processo de estabilização, onde o mesmo é aquecido sob aplicação de tensão, conferindo uma relaxação máxima de 2 a 3% para tensões iniciais iguais a 70 e 80% da tensão limite de resistência especificada, respectivamente.

- Aço de relaxação normal (RN) ou estabilizado: aço no qual o processo de revenimento é feito sem aplicação de tensão no aço, conferindo uma relaxação máxima de 5 a 8,5% para tensões iniciais iguais a 70 e 80% da tensão limite de resistência especificada, respectivamente.

A Figura 10 mostra o diagrama tensão-deformação de um ensaio à tração de uma cordoalha de sete fios de 12,7 mm (CP 190 RB) realizado pela Belgo Beakert Arames no dia 19/02/2002, segundo a procedimento descrito na NBR 7483 (1990). O módulo de elasticidade determinado no ensaio foi de 206 GPa. O diagrama tensão-deformação tem um intervalo de deformação entre 0 e 1,2%. A deformação última da cordoalha de sete fios varia aproximadamente entre 5 a 6%, ou seja, apenas um trecho é mostrado no ensaio.



Figura 10 - Diagrama tensão-deformação de ensaio à tração de cordoalha de sete fios de 12,7 mm (CP 190 RB)



Fonte: Catálogo ArcelorMittal (2009)

A NBR 6118 (2014) estabelece ainda limites de forças aplicadas no aço de protensão, conforme os itens abaixo:

- Na pré-tração, por ocasião da aplicação da força de protensão, a tensão na armadura de protensão na saída do aparelho de tração deve respeitar os limites  $0,77 f_{ptk}$  e  $0,90 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação normal e  $0,77 f_{ptk}$  e  $0,85 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação baixa;
- Na pós-tração com aderência posterior, por ocasião da aplicação da força de protensão, a tensão na armadura de protensão na saída do aparelho de tração deve respeitar os limites  $0,74 f_{ptk}$  e  $0,87 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação normal, e  $0,74 f_{ptk}$  e  $0,82 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação baixa;
- Na pós-tração sem aderência, para as cordoalhas engraxadas, com aços da classe de relaxação baixa, os valores-limites da tensão na armadura de protensão na saída do aparelho de tração podem ser elevados para  $0,80 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$ ;

- Nos aços CP-85/105, fornecidos em barras, os limites passam a ser  $0,72 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$ , respectivamente.

### 2.3.3 Bainhas

As bainhas são tubos nos quais são introduzidos os aços de protensão de modo que, mesmo após a concretagem da peça, o aço seja capaz de deslizar no interior da bainha, possibilitando a aplicação de protensão. Desse modo, as bainhas estão presentes apenas nas estruturas protendidas com aderência posterior ou sem aderência.

As bainhas para protensão com aderência posterior são fabricadas com chapas de aço laminadas a frio costuradas em hélice e em geral com ondulações em sua superfície de modo que o atrito entre a bainha e o concreto seja aumentado.

As bainhas para protensão sem aderência são feitas de plástico de alta resistência extrudado, sendo neste caso, o espaço entre a bainha e o aço preenchido por graxa, e o cabo não possui emendas.

Figura 11 - Bainhas metálicas



Fonte: <http://www.prepron.com.br/materiais.php>

### 2.3.4 Ancoragens

A ancoragem do aço de protensão pode ser feita basicamente de duas maneiras:

- Ancoragem por aderência entre o aço de protensão e o concreto.
- Ancoragem por meio de placas de ancoragens, sendo utilizadas roscas e porcas, ou ainda cunhas e porta-cunhas para prender o aço de protensão.

A ancoragem da armadura de protensão por aderência acontece do mesmo modo da ancoragem da armadura passiva, onde um certo comprimento é necessário para que as tensões no aço sejam transferidas para o concreto por atrito.

Nas peças protendidas com aderência inicial, o procedimento de ancoragem padrão é feito por meio da aderência entre o concreto e o aço de protensão.

Nesse caso, como as forças de protensão são de 3 a 4 vezes maior que na ancoragem da armadura passiva, tem-se que as barras devem ser nervuradas ou tenham um perfilado adequado, a fim de que se desenvolvem por meio dessas saliências, aderência mecânica capaz de transferir as tensões do aço de protensão para o concreto.

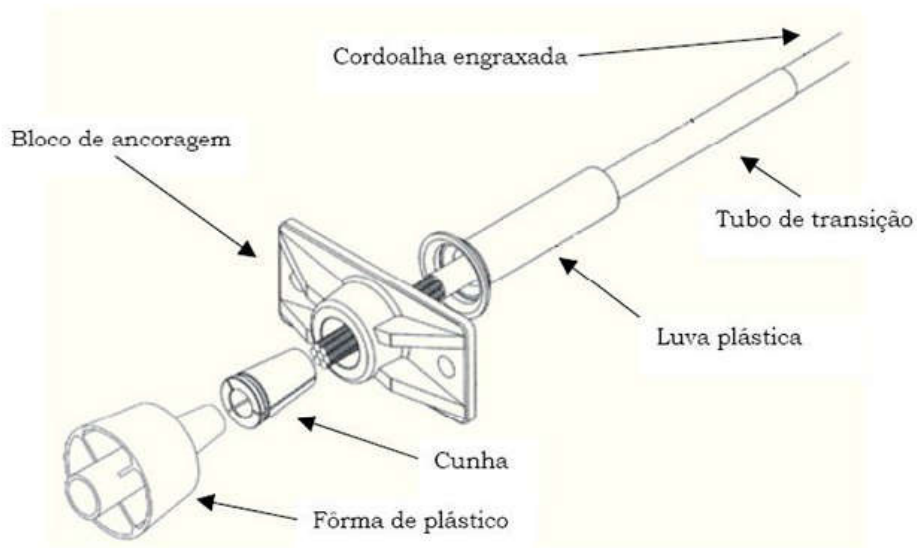
Para peças protendidas com aderência posterior, a ancoragem por aderência também pode ser adotada. Nesse caso, são utilizadas algumas estratégias para que o aço de protensão, que se encontra a priori no interior da bainha, entre em contato com o concreto nas regiões próximas ao apoio e assim a ancoragem pode ser desenvolvida.

A distribuição dos aços de protensão nas extremidades pode ser feita de modo que mesmo para fios lisos, que são comuns nesse tipo de sistema, o comprimento de ancoragem não se torne excessivamente grande. Desse modo, os aços podem ser dispostos em feixes de fios, em leque, em forma de laço, com ondulações e ganchos.

Na pós-tração, a ancoragem pode ser feita por meio de roscas e porcas ou ainda por meio de cunhas. A ancoragem por meio de roscas e porcas tem seu uso limitado a barras de aço redondas.

A ancoragem por meio de cunhas é a mais utilizada, sendo a patente desse tipo de sistema designada a Freyssinet, embora outras empresas tenham desenvolvido sistemas semelhantes, como VSL, Inryco e Prescon. As cunhas de ancoragens do sistema Freyssinet são feitas para fios de 12,7 mm e 15,24 mm.

Figura 12 - Dispositivo de ancoragem de mono cordoalha engraxada



Fonte: Bastos (2015)

### 2.3.5 Nata de injeção

No sistema de protensão com aderência posterior, a nata de injeção ou ainda calda de cimento deve ser injetada dentro da bainha, preenchendo os espaços entre o aço de protensão e a bainha, conferindo assim aderência entre o aço de protensão e a bainha, e conseqüentemente garantindo aderência entre o aço de protensão e o concreto que envolve a bainha, visto que a bainha está aderida ao concreto.

Além de garantir a aderência entre o concreto e o aço de protensão, a nata de injeção aumenta a proteção do aço contra a corrosão. Devido ao efeito da corrosão sob tensão, o cimento e os aditivos utilizados não podem conter cloro.

Para a injeção da calda de cimento, as bainhas devem ser preparadas através da disposição de pontos de injeção nos locais mais baixos e de respiro nos locais mais altos. Para que a injeção seja feita de maneira satisfatória, a nata de injeção deve ter boa fluidez durante toda à execução da injeção.

## 2.4 Sistemas de protensão

Os sistemas de protensão são basicamente: sistema de protensão com cabo pré-tracionado e sistema de protensão com cabo pós-tracionado.

#### **2.4.1 Pré-tração**

O sistema de protensão com cabo pré-tracionado, chamado ainda de protensão com aderência inicial, é caracterizado pela aplicação de protensão antes do endurecimento do concreto, sendo uma técnica empregada usualmente para fabricação de peças pré-fabricados de concreto.

O processo de execução das peças pré-tracionadas é feito em bancadas ou pistas de protensão, onde os aços de protensão são tensionados e fixos a blocos de ancoragens independentes da peça de concreto.

Os cabos são dispostos retos, ou ainda por trechos retos, com a utilização de desviadores. As armaduras passivas são posicionadas e então é feita a concretagem. Após o processo de cura, quando a aderência entre o aço de protensão e o concreto já foi estabelecida, os aços de protensão são liberados dos blocos de ancoragem, sendo a força de protensão transferida para o concreto.

#### **2.4.2 Pós-tração**

O sistema com cabo pós-tracionado é dividido em dois tipos: protensão com aderência posterior e protensão sem aderência.

A protensão com aderência posterior ocorre quando a aplicação da protensão na peça é feita após o endurecimento do concreto, sendo os fios ou cordoalhas ancorados na própria peça.

Nesse sistema de protensão, a armadura de protensão é colocada em bainhas, onde permanece inicialmente livre para se deslocar em relação aos mesmos. Esse conjunto dado pelo aço de protensão no interior da bainha, chamado de cabo, é então colocado nas formas, juntamente com as armaduras passivas. A concretagem é feita e após o endurecimento do concreto, os aços de protensão são tracionados por meio de dispositivos (em geral, macacos hidráulicos) que se apoiam na própria peça de concreto.

Após a aplicação da protensão, a aderência entre o aço de protensão e a bainha, e conseqüentemente entre o aço de protensão e o concreto, é adquirida por meio da injeção de nata de cimento no interior da bainha, entre os dois materiais.

A protensão sem aderência segue o mesmo procedimento da protensão com aderência posterior, exceto na injeção de nata de cimento que não é feita.

Atualmente, as cordoalhas engraxadas e plastificadas com polietileno de alta densidade (PEAD) tem tido sua aplicação cada vez mais crescente nesse tipo de sistema. Além de diminuir o atrito entre a bainha e a cordoalha, a graxa presente entre a armadura de protensão e a bainha é um agente inibidor da corrosão.

A protensão sem aderência também pode ser feita por meio de cabos externos à peça de concreto. Esse procedimento é usualmente adotado para o reforço/recuperação de estruturas de concreto.

### **2.4.3 Comparativo entre a protensão aderente e a não aderente**

A protensão não aderente tem sido largamente utilizada nos Estados Unidos desde a década de 50, e a sua técnica tendo sido amplamente estudada e experimentada, conhecida e dominada pelos projetistas e construtores, apresenta credibilidade em termos de segurança e durabilidade.

Entretanto, segundo Aalami (1994), devido ao fato da técnica da protensão ser recente, deficiência de especificações normativas e problemas construtivos fizeram com que algumas estruturas de concreto protendido com cabos sem aderência sofressem deterioração precoce. No entanto, na América do Norte, do ponto de vista estatístico, as estruturas desse tipo têm tido um bom desempenho, para o fim que foram projetadas.

Todavia, como qualquer sistema construtivo, a protensão não aderente apresenta vantagens e desvantagens quando comparado a um outro tipo de sistema. Assim, nesse tópico serão feitas algumas comparações e esclarecimentos necessários da protensão aderente e não aderente.

As vantagens da protensão não aderente em relação a protensão aderente são:

- A proteção do aço de protensão apresenta maior controle de qualidade, quando na fabricação do cabo é disposta graxa entre o aço e a bainha;
- Nesse mesmo caso, o aço de protensão fica mais protegido contra corrosão no período em que este ainda não se encontra no interior da peça de concreto;
- Maior excentricidade do cabo.
- Execução mais rápida; eliminação da injeção de nata de cimento após a aplicação da protensão, uso de macaco hidráulico pequeno, maior facilidade de transporte e montagem devido ao peso de cada cordoalha (0,88 kg/m para cordoalha de sete fios de 12,7

mm), não há necessidade de retificação da cordoalha, porque não há folga entre a bainha plástica e o aço de protensão;

- Redução da armadura de fretagem na zona de ancoragem da peça.
- Perdas de atrito em geral inferiores para cabos com comprimento menores a 25 metros;
- Se necessário, os cabos de protensão podem ser retirados e substituídos;

Nos cabos de protensão não aderente, as cordoalhas engraxadas e plastificadas com polietileno de alta densidade (PEAD) apresentam uma elevada proteção à corrosão pelo fato do processo de fabricação ser feito por meio de um processo contínuo (sem emendas), onde a cordoalha recebe uma camada de graxa e, por extrusão, um revestimento de polietileno de alta densidade é aplicado.

Nesse tipo de cabo, o aço de protensão encontra-se protegido desde o seu processo de fabricação e o controle de qualidade é maior quando comparado à operação de injeção de nata de cimento. Além da operação de injeção ter sido eliminada, os cabos são em geral mais flexíveis, sendo mais fáceis de serem transportados e montados.

Segundo Aalami (1994), os cabos não aderentes podem ainda ser fabricados de modo a se obter uma proteção do aço de protensão específica para construção em ambientes agressivos.

No caso do uso de cordoalhas engraxadas, o cabo pode ser traçado com uma maior excentricidade, devido ao pequeno diâmetro do mesmo, permitindo um uso mais eficiente da protensão.

Na protensão não aderente, como cada cabo é ancorado por apenas uma placa de ancoragem, as tensões de compressão concentradas próximas a zona de ancoragem são minimizadas, diminuindo assim as armaduras de fretagem, distribuídas para combater tais tensões.

É importante ressaltar que essa vantagem pode ser vista como uma limitação, visto que o número de cabos acaba sendo limitado pelas dimensões da seção transversal da peça.

Devido ao fato do coeficiente de atrito entre o fio ou cordoalha e a bainha ( $\mu$ ) na protensão aderente ser maior quando comparado à protensão não aderente tem-se que a perda por atrito é geralmente maior nos cabos aderentes. No entanto, a perda por atrito causada por ondulações parasitas é maior no sistema de protensão não aderente, visto que os cabos são mais flexíveis.

A perda de protensão parasita depende basicamente de um coeficiente de perda parasita ( $k$ ) e do comprimento do cabo. Sendo assim, nota-se que, a partir de certo comprimento, a intensidade da perda de protensão parasita torna-se superior a perda por atrito angular.

Segundo Aalami (1994), em estruturas protendidas com comprimento maior que 25 metros, tem-se que a perda por atrito (angular + parasita) no sistema de protensão não aderente é geralmente maior do que no sistema de protensão aderente.

As vantagens da protensão aderente em relação a protensão não aderente são:

- Os cabos aderentes funcionam como armadura adicional após a aplicação da protensão, devido à aderência entre o concreto e o cabo;
- Maior segurança ao colapso;
- Perdas de atrito em geral inferiores para cabos com comprimento maiores que 25 metros;

Em geral, o traçado do cabo é escolhido de modo que a força equivalente de protensão seja contrária à carga aplicada na estrutura. Considerando o caso mais comum, onde o traçado do cabo é parabólico, tem-se uma força equivalente contrária a uma carga distribuída constante, que em geral equilibra uma parte da carga permanente.

No entanto, em serviço, a peça pode ser solicitada a uma carga acidental diferente do que a força de protensão equivalente foi projetada para equilibrar. Nesse caso, a protensão aderente é mais eficiente, visto que após a aplicação da protensão, a aderência garante que a variação de deformação do cabo será igual ao do concreto que o envolve.

Além disso, ao se formar fissuras na peça, os cabos aderentes sofrem grandes deformações localizadas próximas a fissura devido à aderência entre os materiais, o que torna o cabo um elemento resistente.

Já na protensão não aderente, essas deformações localizadas são distribuídas quase que linearmente ao longo do cabo, devido ao pequeno atrito entre a bainha e o aço, o que faz com que a variação de tensão naquela seção seja muito pequena.

Sendo assim, o cabo não aderente não pode ser considerado um elemento resistente após a aplicação da protensão e armadura adicional deve ser disposta para controlar a abertura de fissuras e a segurança no estado limite último da peça.



A maior segurança ao colapso em estruturas de concreto protendido aderente deve-se ao fato de caso um cabo venha a romper-se numa dada seção, o restante do cabo permanece aderido ao concreto, funcionando ainda como elemento resistente nas demais seções.

No caso da ruptura de um cabo não aderente, como o cabo está vinculado apenas às extremidades da peça, o mesmo deixa de cumprir sua função estrutural ao longo de todo o seu comprimento.

Vale ressaltar que mesmo em uma estrutura de concreto protendido aderente a ruptura brusca de um cabo pode destruir a aderência entre o concreto e a armadura de protensão, dependendo da força no cabo e da qualidade da nata de cimento.

## **2.5 Tipos de protensão**

O tipo de protensão é definido pelo grau de protensão aplicado na peça. O grau de protensão define o quanto a formação de fissuras no concreto é limitada pela ação da protensão na peça. Os tipos de protensão são: protensão completa (ou total), protensão limitada e protensão parcial.

### **2.5.1 Protensão completa**

Segundo Leonhardt (1983), na protensão completa, a ação da protensão torna a maior tensão de tração na direção resistente principal da peça igual a zero.

Segundo a NBR 6118 (2014) a protensão é dita completa quando duas condições são verificadas:

- a) Para as combinações frequentes de ações, é respeitado o estado limite de descompressão (ELS-D).
- b) Para as combinações raras de ações é respeitado o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

### **2.5.2 Protensão limitada**

Segundo Leonhardt (1983), na protensão limitada, a ação da protensão torna a maior tensão de tração na direção resistente principal da peça igual ou menor que uma tensão de tração admissível do concreto.

Segundo a NBR 6118 (2014) a protensão é dita limitada quando duas condições são verificadas:

- a) Para as combinações quase permanente de ações, é respeitado o estado limite de descompressão (ELS-D).
- b) Para as combinações frequentes de ações é respeitado o estado limite de formação de fissuras (ELS-F).

### **2.5.3 Protensão parcial**

Segundo Leonhardt (1983), na protensão parcial, as tensões de tração na direção resistente principal da peça não são restritas a um determinado valor admissível.

Segundo a NBR 6118 (2014) a protensão é dita parcial quando duas condições são verificadas:

- a) Para as combinações frequentes de ações é respeitado o estado limite de abertura de fissuras (ELS-W), com  $w \leq 0.2$  mm.

As tensões de tração próximas às extremidades das peças de pré-tração são permitidas, visto que a protensão só é integralmente transferida à peça a partir de um certo comprimento distante do apoio.

As tensões de tração provenientes da aplicação da protensão na região de ancoragem também são permitidas mesmo na situação de protensão completa, pois as mesmas são inerentes ao processo de protensão.

As tensões de tração fora da direção principal da peça, provenientes do cisalhamento ou da torção, ou ainda devido à aderência entre o cabo e o concreto são permitidas. Assim sendo, todas essas tensões de tração devem ser combatidas por armaduras passivas, devidamente projetadas.

### **2.5.4 Escolha do tipo de protensão**

A escolha do tipo de protensão deve ser feita considerando-se o tipo de construção, ou seja, para qual fim esta será projetada, e a agressividade do meio ambiente.

A protensão total em estruturas como tirantes, onde deseja-se que a peça trabalhe exclusivamente a compressão, e em reservatórios de concreto protendido, onde a estanqueidade do concreto deve ser garantida, pode ser vista como uma ótima alternativa.

Na ausência de exigências de outras normas peculiares ao tipo de construção adotado, a NBR 6118 (2014) permite que o tipo de protensão a ser escolhido seja determinado apenas pela agressividade do meio ambiente, recomendando a protensão completa para meios muito agressivos, a protensão limitada para meios pouco agressivos e a protensão parcial para meio não agressivo. É importante lembrar que os critérios estabelecidos para cada tipo de agressividade do meio ambiente ainda são subjetivos.

Segundo Veríssimo et al. (1998), a protensão total garante a melhor proteção da armadura contra à corrosão, bem como limita as flutuações de tensões no aço a valores moderados.

No início da protensão, pensava-se que a protensão total era necessariamente a melhor escolha a ser adotada para o grau de protensão, sendo a mesma uma condição determinante para o processo de dimensionamento de estruturas de concreto protendido.

No entanto, essa premissa para o projeto de estruturas de concreto protendido não é verdadeira. A protensão total apresenta algumas limitações em relação a protensão limitada e a parcial, em algumas situações de projetos.

Primeiramente, caso a carga acidental seja alta, quando comparada ao peso próprio, o projeto da peça para garantir a protensão total pode gerar tensões de tração no bordo inicialmente comprimido (antes da aplicação da protensão) superiores à tensão de tração admissível do concreto, principalmente na fase inicial, logo após a aplicação da protensão, onde apenas o peso próprio atua na estrutura, e mesmo cargas permanentes, como paredes e pisos, ainda não estão atuando.

Além disso, para garantir a protensão total, a protensão pode gerar na fase inicial tensões de compressão no bordo inicialmente tracionado superiores à resistência à compressão do concreto, impossibilitando o dimensionamento. Outra consequência dessas elevadas tensões de compressão é o surgimento de flechas negativas, que podem aumentar ao longo do tempo.

Vale ressaltar ainda que de qualquer modo no estado limite último (ELU) surgirão tensões de tração no concreto, que formarão fissuras, e o uso da armadura passiva poderá ser indispensável para garantir a segurança da peça, visto que não necessariamente a armadura de protensão seria capaz de absorver por completo às tensões de tração existentes.

## 2.6 Perdas de protensão

A força introduzida no cabo por meio do macaco hidráulico ( $P_0$ ) varia ao longo do comprimento do cabo e do tempo, devido às perdas de protensão. Logo, é fundamental para o processo de verificação das peças de concreto protendido, que seja feita uma estimativa aceitável das perdas de protensão.

A verificação das estruturas de concreto protendido deve ser feita a priori em basicamente duas fases: na fase inicial, imediatamente após o processo de transferência da protensão, e após todas as perdas.

Essas perdas ocorrem por diferentes causas e podem ser classificadas como imediatas e progressivas.

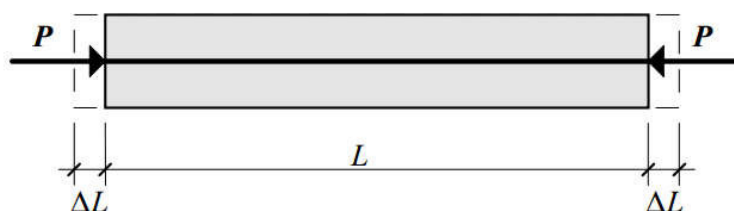
As perdas ditas imediatas são aquelas que ocorrem no ato da protensão, ou seja, durante o processo de acionamento dos macacos e liberação dos mesmos. Dessa forma, as perdas imediatas ocorrem por basicamente três motivos: encurtamento elástico do concreto, atrito entre o fio ou a cordoalha e a bainha e acomodação da ancoragem.

As perdas progressivas são aquelas que ocorrem ao longo do tempo. As perdas progressivas ocorrem devido aos seguintes fenômenos: retração do concreto, fluência do concreto e relaxação da armadura de protensão.

### 2.6.1 Perda de protensão por encurtamento elástico do concreto

A perda de protensão devido ao encurtamento elástico do concreto ocorre pelo fato de, juntamente com o concreto, o cabo encurtar durante a aplicação da protensão, causando desse modo um alívio de tensão no cabo, como ilustra a figura abaixo:

Figura 13- Peça de concreto após a aplicação de uma protensão centrada



Veríssimo et al. (1998)

Na pré-tração, os cabos são protendidos na pista de protensão, ficando presos à placa de ancoragem. Após a protensão e ancoragem dos cabos, o concreto fresco é despejado na forma. Espera-se então que o concreto adquirira resistência suficiente para que os cabos sejam liberados e a força de protensão seja assim transmitida a peça pela aderência entre a armadura de protensão e o concreto.

Quando os cabos são liberados, o cabo tende a retornar a sua configuração inicial ( $\varepsilon_p = 0$ ). No entanto a peça de concreto, por meio da aderência, impede parcialmente que o cabo retorne a essa configuração. Ou seja, o cabo é tracionado pelo concreto e o concreto é comprimido pelo cabo. Assim, devido à aderência entre o concreto e o cabo, pode-se dizer que a variação de deformação no cabo é igual a deformação do concreto:

$$\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_c \quad (1)$$

Considerando que os dois materiais apresentam comportamento linear elástico, tem-se:

$$\sigma_c = \frac{\Delta\sigma_p}{\alpha_p} \quad (2)$$

Onde  $\alpha_p$  é a relação entre o módulo de elasticidade do aço de protensão e o do concreto ( $E_p/E_c$ ).

Como a força de protensão final ( $P$ ) será equilibrada pela seção de concreto, tem-se:

$$\sigma_c = \frac{P}{A_c} = \frac{P_0 - \Delta P}{A_c} \quad (3)$$

$$\sigma_c A_c = P_0 - \Delta\sigma_p \cdot A_p \quad (4)$$

Onde  $A_c$  é a área bruta da seção de concreto.

Utilizando a Equação (2), pode-se substituir o valor da tensão no concreto ( $\sigma_c$ ) na Equação (4).

$$\Delta\sigma_p = \frac{\alpha_p P_0}{A_c + \alpha_p A_p} = \frac{\alpha_p P_0}{A_{sh}} \quad (5)$$

Onde  $A_{sh}$  é a área da seção de concreto homogeneizada.

Na pós-tração, como a medida que a força de protensão é aplicada a peça de concreto encurta, pode-se dizer que ao final da aplicação da protensão ( $P_0$ ) de um cabo, não há perda de protensão por encurtamento elástico do concreto, pois a peça de concreto já encurtou.

No entanto, caso exista mais de um cabo a ser protendido, e essa protensão seja feita em um cabo de cada vez, como comumente é feita, o encurtamento da peça devido a

protensão de um cabo, causa perda de protensão nos cabos que já foram devidamente protendidos e ancorados.

Assim, uma expressão é proposta na NBR 6118 (2014) para o cálculo da perda de protensão média por cabo:

$$\Delta\sigma_p = \alpha_p \cdot \left(\frac{n-1}{2n}\right) \cdot (\sigma_{cp} + \sigma_{cg}). \quad (6)$$

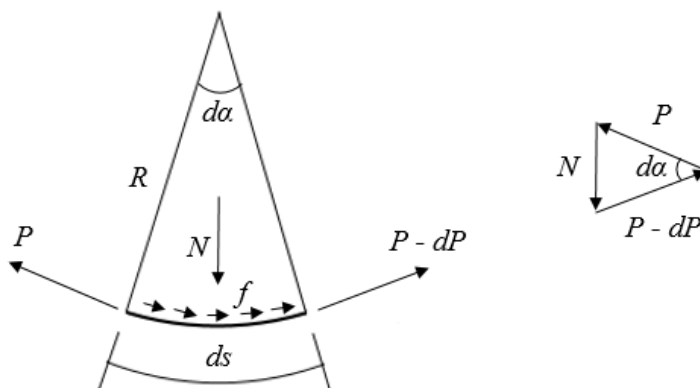
Onde  $n$  é o número de cabos,  $\Delta\sigma_p$  é a variação média da tensão no cabo,  $\sigma_{cp}$  é a tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devido à protensão simultânea dos  $n$  cabos e  $\sigma_{cg}$  é a tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devido à carga permanente mobilizada pela protensão ou simultaneamente aplicada com a protensão.

### 2.6.2 Perda de protensão por atrito

Ao serem alongados, os fios ou as cordoalhas curvos exercem uma pressão radial sobre a bainha, surgindo assim atrito entre o fio ou a cordoalha e a bainha, fazendo com que a força de protensão varie do seu ponto de aplicação até seu ponto de ancoragem, ou mesmo até outro ponto de aplicação de protensão, caso a protensão seja aplicada em ambos os extremos do cabo.

As perdas por atrito podem se tornar significativas em estruturas de grande comprimento, já que, como será mostrado a seguir, a perda de protensão por atrito varia com o comprimento. A Figura 14 ilustra as forças que atuam em um elemento infinitesimal de cabo, de onde pode ser feita a dedução da perda de protensão em um cabo curvo.

Figura 14 - Esquema de forças de atrito sob cabo curvo infinitesimal



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1991)

A perda por atrito em um elemento infinitesimal de cabo ( $dP$ ) é igual ao atrito gerado entre o cabo e a bainha:

$$dP = -\mu \cdot N \quad (7)$$

Onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre o fio ou a cordoalha e a bainha e  $N$  é a resultante da força normal devido a pressão entre o fio ou a cordoalha e a bainha.

Do triângulo de forças mostrado na Figura 14, tem-se que a resultante da força normal ( $N$ ) pode ser dada por:

$$N = P \cdot d\alpha \quad (8)$$

Substituindo a Equação (8) na Equação (7):

$$dP = -\mu \cdot P \cdot d\alpha \quad (9)$$

Considerando um trecho de cabo curvo, pode-se calcular a força final de protensão ( $P$ ), através a integração da perda de atrito dada na Equação (9):

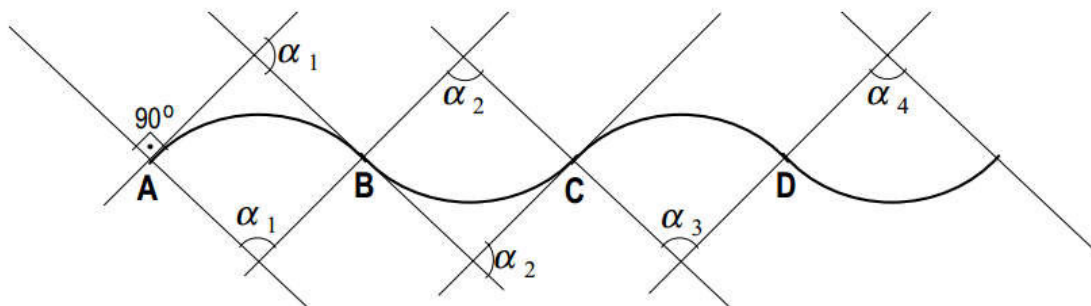
$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_0^\alpha -\mu \cdot d\alpha \quad (10)$$

$$P = P_0 \cdot e^{-\mu\alpha} \quad (11)$$

Onde  $P_0$  é a força inicial de protensão (em  $\alpha = 0$ ) e  $\alpha$  é o ângulo entre o ponto inicial e final do cabo curvo.

Considerando-se que um cabo seja composto por vários trechos curvos, como mostra a Figura 15, pode-se calcular a força final de protensão somando-se a perda de cada trecho de cabo curvo.

Figura 15 - Cabo composto por vários trechos curvos



Fonte: Veríssimo et al. (1998)

Assim, utilizando a Equação (11) para cada trecho de cabo, tem-se:

$$P_B = P_A \cdot e^{-\mu\alpha_1} \quad (12)$$

$$P_C = P_B \cdot e^{-\mu\alpha_2} = P_A \cdot e^{-\mu\alpha_1} \cdot e^{-\mu\alpha_2} \quad (13)$$

$$P_D = P_C \cdot e^{-\mu\alpha_3} = P_A \cdot e^{-\mu\alpha_1} \cdot e^{-\mu\alpha_2} \cdot e^{-\mu\alpha_3} \quad (14)$$

Logo, a força final de protensão ( $P$ ) em um cabo composto por vários trechos curvos pode ser dada pela seguinte expressão geral:

$$P = P_0 \cdot e^{-\mu \sum \alpha} \quad (15)$$

Além da curvatura devido ao próprio traçado do cabo, existem variações angulares não intencionais que são geradas devido às imperfeições na execução do traçado do cabo, causadas pelas deformações residuais no cabo e empuxo do concreto, aliado à pequena rigidez à flexão do cabo. Essas variações angulares são inevitáveis, ocorrendo mesmo em cabos teoricamente retos e podem ser chamadas de ondulações parasitas.

Sendo assim, além da perda de protensão devido ao traçado originalmente projetado para o cabo, ocorrerão perdas devido a essas ondulações parasitas, que podem ser chamadas de perdas parasitas.

Essa perda pode ser calculada a partir da Equação (15), definindo-se um coeficiente de variação angular por metro ( $B$ ):

$$P = P_0 \cdot e^{-\mu \sum \beta \cdot L} \quad (16)$$

Onde  $L$  é a distância entre o ponto inicial e o ponto final, onde deseja-se calcular a força de protensão.

Somando-se as duas parcelas da perda de protensão por atrito, tem-se:

$$P = P_0 \cdot e^{-\mu \sum \alpha + \beta \cdot L} \quad (17)$$

Logo, a variação da força de protensão devido à perda por atrito pode ser dada por:



$$\Delta P = P_0 - P = P_0 - P_0 \cdot e^{-\mu \sum \alpha + \beta \cdot L} \quad (18)$$

$$\Delta P = P_0 \left( 1 - e^{-\mu \sum \alpha + \beta \cdot L} \right) \quad (19)$$

A NBR 6118 (2014) recomenda a seguinte expressão para o cálculo da perda de protensão por atrito:

$$\Delta P(x) = P_0 \left( 1 - e^{-\left( \sum \mu \alpha + k \cdot x \right)} \right) \quad (20)$$

Onde  $\Delta P(x)$  é a perda de protensão no cabo na seção da abscissa  $x$ ,  $P_0$  é a força máxima aplicada à armadura pelo equipamento de tração,  $\sum \alpha$  é a soma dos ângulos de desvios previstos, no trecho compreendido entre às abscissas 0 e  $x$ ,  $\mu$  é o coeficiente de atrito aparente entre cabo e bainha e  $k$  é o coeficiente de perda por metro provocada por curvaturas não-intencionais, que na falta de dados experimentais pode ser adotado igual a  $0.01\mu$ .

Comparando as Equações (20) e (19), nota-se que o coeficiente  $k$  é igual ao coeficiente de variação angular por metro ( $B$ ) vezes o coeficiente de atrito ( $\mu$ ).

A NBR 6118 (2014) recomenda ainda valores de coeficiente de atrito para cada tipo de cabo, conforme mostra a Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 - Coeficiente de atrito para cada tipo de cabo, conforme NBR 6118 (2014)

<b>Tipo de fio e bainha</b>	<b><math>\mu</math></b>
Cabo e concreto (sem bainha)	0.50
Barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica	0.30
Fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica	0.20
Fios lisos ou cordoalha e bainha metálica lubrificada	0.10

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (2014)

O ACI 343R (1988) recomenda os seguintes valores para o coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e o coeficiente de perda por metro ( $k$ ), como mostra a Tabela 2:

Tabela 2 - Coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e coeficiente de perda parasita ( $k$ ), segundo ACI 343R (1988)

	<b>Tipo de cabo</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>k</math></b>
Aderente	Fio em bainha metálica flexível	0.15-0.25	0.0033- 0.0049
	Cordoalha de sete fios em bainha metálica flexível	0.15-0.25	0.0016- 0.0066

	Barra de alta resistência em bainha metálica flexível	0.08-0.30	0.0003-0.0020
	Cordoalha de sete fios em bainha metálica rígida	0.15-0.25	0.00066
Não-aderente	Fio e cordoalha de sete fios engraxada	0.05-0.15	0.0010-0.0066
	Fio e cordoalha de sete fios (mastic-coated)	0.05-0.15	0.0033-0.0066

Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1991)

### 2.6.3 Perda de protensão por acomodação da ancoragem

Durante o processo de ancoragem dos cabos, os mesmos deslizam no sentido contrário ao da aplicação da protensão, diminuindo o seu alongamento, e conseqüentemente gerando perda de protensão. Devido ao atrito entre o cabo e a bainha, surgem forças de atrito no sentido do deslizamento do cabo até um certo ponto distante da ancoragem ativa, onde a partir de então a perda de protensão por acomodação da ancoragem torna-se nula.

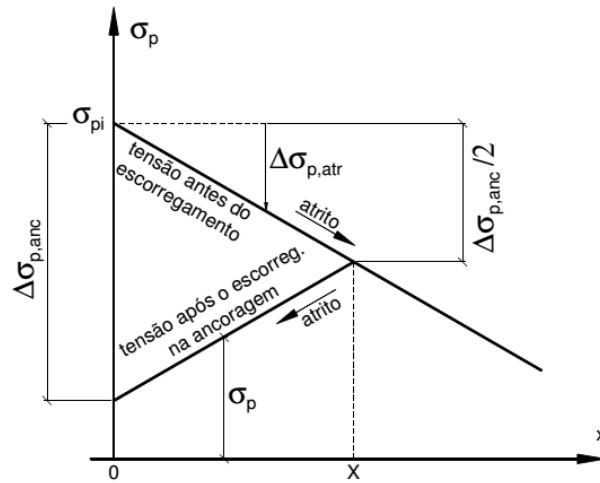
Sendo assim, essa perda de protensão decresce com o aumento da distância da ancoragem ativa e pode ser desprezível na verificação da seção mais solicitada à flexão. No caso de peças curtas e em estruturas com protensão não aderente, que tem um coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha ( $\mu$ ) pequeno, essas perdas podem se propagar a uma distância teoricamente maior que a peça em si, ou seja, todas as seções da peça sofrerem perda por acomodação da ancoragem.

Nos dispositivos de ancoragem por meio de cunhas, essas perdas de protensão são mais significativas, visto que a cunha penetra na ancoragem.

A penetração por acomodação ( $\delta$ ) deve ser medida por meio de ensaios realizados pelos fabricantes para os valores de protensão máximos de cada dispositivo de ancoragem.

A Figura 16 ilustra a variação da tensão na armadura de protensão ao longo do comprimento devido às perdas de protensão por atrito e por acomodação da ancoragem.

Figura 16 – Variação da tensão na armadura após perdas de protensão por atrito e acomodação da ancoragem



Fonte: Bastos (2015)

O traçado da variação da tensão na armadura após a perda por acomodação da ancoragem pode ser feito a partir da estimativa da área compreendida entre a tensão antes do escorregamento e depois do escorregamento, visto que o alongamento total é dado pela seguinte expressão:

$$\delta = \int_0^x \Delta \varepsilon_{p,anc} dx = \int_0^x \frac{\Delta \sigma_{p,anc}}{E_p} dx = \frac{A_{\Delta \sigma}}{E_p} \quad (21)$$

Onde  $A_{\Delta \sigma}$  é área compreendida entre as curvas da tensão no cabo antes e após o escorregamento, representada na Figura 16 pela área do triângulo.

Logo:

$$A_{\Delta \sigma} = \delta \cdot E_p \quad (22)$$

Para o caso da perda de protensão por atrito ser constante (aproximação razoável para perda de protensão por atrito em um trecho curvo) até o ponto onde a perda por acomodação não se propaga mais, como é o caso mostrado na Figura 16, tem-se que a variação da tensão no ponto de ancoragem devido à perda por acomodação ( $\Delta \sigma_{p,anc}$ ) é dada por:

$$\Delta \sigma_{p,anc} = \frac{p \cdot 2 \cdot x}{A_p} \quad (23)$$

Onde  $p$  é o coeficiente de perda de protensão por metro devido ao atrito e  $x$  é a distância do ponto de ancoragem até o ponto onde a perda por acomodação passa a ser nula.

Nesse caso, pode-se ainda igualar a expressão da área entre as curvas de tensão ( $A_{\Delta \sigma}$ ) dada na (22) com a expressão da área do triângulo. Logo:

$$A_{\Delta\sigma} = \delta \cdot E_p = \frac{\Delta\sigma_{p,anc} \cdot x}{2} \quad (24)$$

Substituindo o termo da variação da tensão no ponto de ancoragem devido à perda por acomodação ( $\Delta\sigma_{p,anc}$ ) pela expressão dada na Equação (23), tem-se a expressão para o cálculo da distância  $x$ :

$$\delta \cdot E_p = \frac{p \cdot 2x}{A_p} \cdot \frac{x}{2} \quad (25)$$

$$x = \sqrt{\frac{\delta \cdot E_p \cdot A_p}{p}} \quad (26)$$

Com o valor de  $x$ , é possível traçar o gráfico da perda de protensão por acomodação.

#### 2.6.4 Perda de protensão por retração do concreto

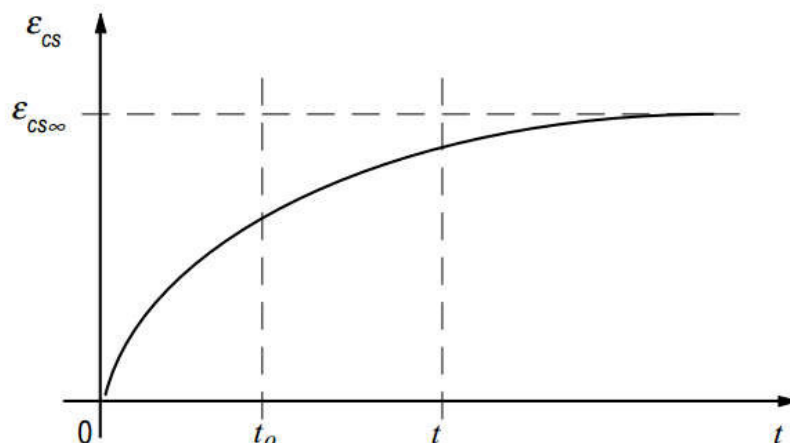
A retração do concreto é o fenômeno da diminuição do volume do concreto ao longo do tempo, devido à perda de água e a alteração química da mistura. A intensidade dessa diminuição de volume, depende primordialmente do tempo, da umidade do ar, da composição ou traço do concreto, do tempo de cura e da forma da peça.

A umidade que a peça se encontra influencia diretamente na retração do concreto, pois caso o concreto fosse mantido envolvido por água, ou mesmo se a umidade relativa do ar permanecesse 100%, o fenômeno da retração do concreto não aconteceria.

Desse modo, semelhante ao efeito do encurtamento elástico do concreto, a retração diminuirá o comprimento da peça de concreto, e conseqüentemente diminuirá o alongamento do aço, causando assim perda de protensão.

A Figura 17 ilustra o fenômeno da retração ao longo do tempo  $t$ , sendo  $t_0$  o tempo entre a cura do concreto e a aplicação da protensão na peça. Com isso, é possível perceber que, quanto maior esse tempo entre a cura e a aplicação da protensão, menor será a perda de protensão devido à retração do concreto, visto maior parte da retração do concreto aconteceria antes da aplicação da protensão.

Figura 17 - Encurtamento do concreto ao longo do tempo, devido à retração



Fonte: Veríssimo (1998)

A perda de protensão por retração do concreto ( $\Delta\sigma_{ps}$ ) pode ser dada pela seguinte relação:

$$\Delta\sigma_{ps} = \varepsilon_{cs}(t, t_0) \cdot E_p \quad (27)$$

Onde  $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$  é a deformação no concreto devido à retração, entre o tempo final  $t$  e  $t_0$ , sendo  $t_0$  o momento onde ocorre a aplicação de protensão.

A NBR 6118 (2014) recomenda que o cálculo da retração do concreto entre os instantes  $t_0$  e  $t$  seja feito pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (28)$$

Onde  $\varepsilon_{cs\infty}$  é a retração final do concreto ( $= \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{cs}$ ) e  $\beta_s$  é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente,  $t$  é a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias e  $t_0$  é a idade fictícia do concreto no instante em que a retração do concreto começa a ser considerada, em dias.

O coeficiente  $\varepsilon_{1s}$  depende da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto e é dado pela seguinte expressão, para o caso particular de consistência correspondente a abatimentos entre 5 e 9 cm e umidade menor que 90%:

$$\varepsilon_{1s} = 10^{-4} \left( -8,09 - \frac{U}{15} + \frac{U^2}{2284} + \frac{U^3}{133765} - \frac{U^4}{7608750} \right) \quad (29)$$

Onde  $U$  é a umidade relativa do ambiente, em porcentagem.

Para o caso de abatimentos menores que 5 cm, utiliza-se a mesma expressão diminuindo o valor calculado em 25% e para abatimentos maiores que 9 cm, o valor calculado é majorado em 25%. Para umidades superiores a 90%, adota-se  $\varepsilon_{1s} = 1,0$ .

O coeficiente  $\varepsilon_{2s}$  depende da espessura fictícia da peça e é dado pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20,8 + 3h_{fic}} \quad (30)$$

Onde  $h_{fic}$  é a espessura fictícia da peça, em centímetros, definida pela seguinte expressão:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad (31)$$

Onde  $A_c$  é a área da seção transversal da peça,  $u_{ar}$  é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar e  $\gamma$  é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente ( $U$ ), sendo dado pela seguinte expressão, para  $U \leq 90\%$ :

$$\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1U) \quad (32)$$

Para  $U = 100\%$ , a norma recomenda adotar  $\gamma = 30$ .

O coeficiente  $\beta_s$  relativo à retração é dado por:

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad (33)$$

Onde  $t$  é a idade fictícia, em dias ( $t \geq 3$ )

$$A = 40$$

$$B = 116 h^3 - 282 h^2 + 220 h - 4,8$$

$$C = 2,5 h^3 - 8,8 h + 40,7$$

$$D = -75 h^3 + 585 h^2 + 496 h - 6,8$$

$$E = -169 h^4 + 88 h^3 + 584 h^2 - 39 h + 0,8$$

Sendo  $h$  a espessura fictícia da peça, em metros, para  $0,05 \text{ m} \leq h \leq 1,6 \text{ m}$ , e caso o valor esteja fora desse intervalo, adotar o valor extremo correspondente.

A idade fictícia ( $t$ ) a ser considerada para o cálculo do coeficiente  $\beta_s$ , quando existe cura térmica e o endurecimento se faz à temperatura ambiente de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , é dada pela seguinte relação:

$$t = \alpha \cdot t_{ef} \quad (34)$$

Para os demais casos:

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \cdot \Delta t_{ef,i} \quad (35)$$

Onde  $\alpha$  é o coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento,  $T_i$  é a temperatura média diária do ambiente em °C e  $\Delta t_{ef,i}$  é o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente,  $T_i$ , pode ser admitida constante.

Na falta de dados experimentais para o cálculo do coeficiente  $\alpha$ , a NBR 6118 (2014) apresenta uma tabela para os valores de velocidade de endurecimento do cimento para alguns tipos usuais de cimento.

Tabela 3 - Coeficiente  $\alpha$  de acordo com o tipo de cimento

Cimento	$\alpha$	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento AF 25 e 32, POZ 25 e 32, MRS, ARS	1	1
De endurecimento normal (cimento Portland comum) CP 25, 32 e 40	2	
De endurecimento rápido ARI	3	

Fonte: NBR 6118 (2014)

AF – Alto forno

ARI – alta resistência inicial

ARS – alta resistência a sulfatos

CP – cimento Portland

MRS – moderada resistência a sulfatos

POZ - pozolânico

### 2.6.5 Perda de protensão por fluência do concreto

A deformação do concreto em um determinado instante  $t$  não depende apenas da tensão aplicada no concreto naquele instante, mas também do histórico de tensões aplicado no concreto até aquele instante. O fenômeno da fluência é que define esse comportamento e é conhecido pelo aumento de deformação em um determinado material ao longo do tempo, quando esse é submetido a uma tensão constante.

Desse modo, assim como a retração do concreto, a fluência causará perda de protensão ao longo do tempo. É interessante notar que a medida que o concreto encurta

devido a retração e a fluência do concreto, as forças de protensão diminuem, o que faz com que a tensão no concreto diminua, e conseqüentemente o efeito da fluência também diminua.

Segundo a NBR 6118 (2014), a deformação por fluência do concreto é composta por uma parcela dita rápida e outra lenta, sendo que a fluência rápida ocorre nas primeiras 24 horas após a aplicação da carga e é irreversível e a fluência lenta ocorre após esse período, sendo esta composta por uma parcela irreversível e outra reversível.

Assim, a deformação por fluência no concreto ( $\varepsilon_{cc}$ ) é dada pela soma das seguintes parcelas de deformação:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd} \quad (36)$$

Onde  $\varepsilon_{cca}$  é a deformação por fluência rápida,  $\varepsilon_{ccf}$  é a deformação por fluência lenta irreversível e  $\varepsilon_{ccd}$  é a deformação por fluência lenta reversível.

A deformação total ( $\varepsilon_{c,total}$ ) é dada pela soma da parcela imediata e devido à fluência:

$$\varepsilon_{c,total} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c(1 + \phi) \quad (37)$$

Onde  $\phi$  é o coeficiente de fluência.

O coeficiente de fluência pode ser dividido nos mesmo termos correspondentes às parcelas da Equação (36):

$$\phi = \phi_a + \phi_f + \phi_d \quad (38)$$

Onde  $\phi_a$  é o coeficiente de fluência rápida,  $\phi_f$  é o coeficiente de fluência lenta irreversível e  $\phi_d$  é o coeficiente de fluência lenta reversível.

Para concreto classe C20 a C45, o coeficiente de fluência rápida ( $\phi_a$ ) é determinado pela seguinte expressão:

$$\phi_a = 0,8 \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (39)$$

Para concreto classe C50 a C90, o coeficiente de fluência rápida ( $\phi_a$ ) é dado por:

$$\phi_a = 1,4 \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (40)$$

Onde  $f_c(t_0) / f_c(t_\infty)$  é a função de crescimento da resistência do concreto com a idade, definida pela expressão abaixo:

$$\frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (41)$$

Onde  $t$  é a idade efetiva do concreto em dias,  $s = 0,38$  para concreto de cimento CPIII e IV,  $s = 0,25$  para CP I e II,  $s = 0,20$  para CPV-ARI.



O coeficiente de fluência lenta irreversível ( $\phi_f$ ) é dado por:

$$\phi_f = \phi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad (42)$$

Onde  $\phi_{f\infty}$  é o valor final do coeficiente de fluência lenta irreversível ( $=\phi_{1c} \cdot \phi_{2c}$  para C20 a C45 e  $= 0,45 \cdot \phi_{1c} \cdot \phi_{2c}$  para C50 a C90) e  $\beta_f$  é o coeficiente relativo à fluência lenta irreversível, função da idade do concreto.

O coeficiente  $\phi_{1c}$  depende da umidade relativa do ambiente ( $U$ ) e da consistência do concreto.

Para o caso de abatimento entre 5 e 9 cm, e umidade do ambiente menor que 90 % o coeficiente  $\phi_{1c}$  pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\phi_{1c} = 4,45 - 0,035U \quad (43)$$

Para o caso de abatimentos menores que 5 cm, utiliza-se a mesma expressão diminuindo o valor calculado em 25% e para abatimentos maiores que 9 cm, o valor calculado é majorado em 25 %. Para umidades superiores a 90%, adota-se  $\varepsilon_{1cs} = 0,8$ .

O coeficiente  $\beta_f$  é definido pela seguinte equação:

$$\beta_f = \frac{t^2 + A \cdot t + B}{t^2 + C \cdot t + D} \quad (44)$$

Onde  $t$  é a idade fictícia, em dias ( $t \geq 3$ )

$$A = 42 h^3 - 350 h^2 + 588 h + 113$$

$$B = 768 h^3 - 3060 h^2 + 3234 h - 23$$

$$C = -200 h^3 + 13 h^2 + 1090 h + 183$$

$$D = 7579 h^3 - 31916 h^2 + 35343 h + 1931$$

O coeficiente  $\phi_{2c}$  depende da espessura fictícia da peça e pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\phi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (45)$$

Onde  $h_{fic}$  é a espessura fictícia da peça, em centímetros.

Por fim, o coeficiente de fluência lenta reversível ( $\phi_d$ ) é dado por:

$$\phi_d = \phi_{d\infty} \cdot \beta_d \quad (46)$$

Onde  $\phi_{d\infty}$  é o valor final do coeficiente de fluência lenta reversível ( $= 0,4$ ) e  $\beta_d$  é o coeficiente relativo à fluência lenta reversível, em função do tempo decorrido após o carregamento, e pode ser calculado por:

$$\beta_d = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (47)$$

Onde  $t$  e  $t_0$  é o tempo fictício decorrido após o carregamento.

### 2.6.6 Perda de protensão por relaxação da armadura de protensão

O fenômeno da relaxação do aço é dado pela perda de tensão no aço sob deformação constante ao longo do tempo. A relaxação pode então ser entendida como um fenômeno análogo ao da fluência do concreto. A perda de tensão por relaxação do aço é maior a medida que a tensão inicial aumenta.

A NBR 7484 (2008) prescreve um método de ensaio de relaxação isotérmica de fios, aços e cordoalhas para fins de emprego como armadura de protensão. Nesse método, a deformação e a temperatura são mantidas constantes.

A intensidade da relaxação do aço é definida na NBR 6118 (2014) através do coeficiente  $\psi(t, t_0)$  definido por:

$$\psi(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)}{\sigma_{pi}} \quad (48)$$

Onde  $\Delta\sigma_{pr}$  é a perda de tensão na armadura de protensão por relaxação pura (com comprimento constante) desde o instante  $t_0$  do estiramento da armadura até o instante  $t$  considerado e  $\sigma_{pi}$  é a tensão na armadura de protensão no instante do seu estiramento  $t_0$ .

A NBR 6118 (2014) apresenta valores médios para o coeficiente  $\psi$ , para  $t$  igual a 1000 h, aferidos sob temperatura constante de 20°C, para aços de protensão submetidos a três valores básicos de tensão inicial ( $\sigma_{pi}$ ): 60%, 70% e 80% da resistência característica ( $f_{ptk}$ ), conforme mostra a Tabela 4.

Tabela 4 - Valores médios de  $\psi_{1000}$ , segundo NBR 6118 (2014)

Tensão inicial ( $\sigma_{pi}$ )	Cordoalhas		Fios		Barras
	Relaxação normal	Relaxação baixa	Relaxação normal	Relaxação baixa	
0.5 $f_{ptk}$	0	0	0	0	0
0.6 $f_{ptk}$	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
0.7 $f_{ptk}$	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
0.8 $f_{ptk}$	12	3,5	8,5	3,0	7,0

Fonte: NBR 6118 (2014)

Para o caso de tensões iniciais diferentes dos valores básicos de tensão mostrados na Tabela 4, a norma propõe que seja feita uma interpolação linear quando os valores de tensão inicial ( $\sigma_{pi}$ ) estiverem entre 0.5  $f_{ptk}$  e 0.8  $f_{ptk}$ .

Para valores de tensão inicial ( $\sigma_{pi}$ ) inferiores ou igual a  $0.5 f_{ptk}$  permite-se que a perda por relaxação do aço seja desprezada.

Vasconcelos (1980) propõe que seja feita uma aproximação dos valores de  $\psi(t, t_0)$  por meio de uma parábola que passa pelos três pontos de valores de tensão inicial básicos dados na Tabela 4, dada pela seguinte expressão:

$$\psi(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)}{\sigma_{pi}} \quad (49)$$

A norma ainda propõe o cálculo do coeficiente  $\psi(t, t_0)$ , para um tempo  $t$  qualquer, a partir do valor de  $\psi_{1000}$ , por meio da seguinte expressão:

$$\psi_{1000} = a \left( \frac{\sigma_{pi}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left( \frac{\sigma_{pi}}{f_{ptk}} \right) + c \quad (50)$$

Onde:

$$a = 50 \psi_{60} - 100 \psi_{70} + 50 \psi_{80},$$

$$b = -75 \psi_{60} - 140 \psi_{70} - 65 \psi_{80} \text{ e}$$

$$c = 28 \psi_{60} - 48 \psi_{70} + 21 \psi_{80}.$$

Logo, conhecido o valor de  $\psi_{1000}$ , os valores correspondentes a tempos diferentes de 1000 h, sempre a 20 °C, podem ser encontrados pela seguinte expressão recomendada pela NBR 6118 (2014):

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{41,67} \right)^{0,15} \quad (51)$$

### 2.6.7 Cálculo aproximado das perdas progressivas segundo NBR 6118 (2014)

Com esse procedimento, é possível estimar a perda de tensão na armadura de protensão devido ao fenômeno da relaxação do aço, sob temperatura constante igual a 20 °C e deformação constante, dados o tipo de aço empregado, a tensão inicial na armadura de protensão ( $\sigma_{pi}$ ) e o tempo  $t$ .

No entanto, as condições que norteiam o ensaio de relaxação prescrito na NBR 7182 (2008) e que são premissas para o cálculo dos valores de relaxação básicos ( $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$ ) não são verificados nas estruturas usuais de concreto protendido, visto que nem a temperatura, nem a deformação na armadura de protensão irão permanecer constantes durante o tempo  $t$ .

De maneira mais considerável, a variação da deformação na armadura ativa diminuirá a intensidade do efeito da relaxação do aço, visto que ao longo do tempo a peça de concreto sofrerá encurtamento devido aos efeitos de retração e fluência do concreto, diminuindo a deformação na armadura de protensão ao longo do tempo.

A NBR 6118 (2014) recomenda dois procedimentos para o cálculo da perda progressiva de maneira aproximada, levando em consideração a perda por retração e fluência do concreto e por relaxação do aço, e a interação entre esses três fenômenos. Para os dois procedimentos a aderência entre a armadura e o concreto é considerada e a peça está no estágio I.

No primeiro procedimento considera-se que a concretagem e a protensão da peça sejam executadas em fases suficientemente próximas, a fim de desprezar os efeitos de uma sobre a outra e que os cabos estejam suficientemente próximos um do outro para que os mesmos possam ser representados por um cabo resultante com área da seção transversal igual a soma das áreas de todos os cabos.

A expressão então recomendada pela NBR 6118 (2014) para o cálculo das perdas progressivas de tensão ( $\Delta\sigma_p$ ):

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0) \cdot E_p - \alpha_p \cdot \sigma_{c,pog} \cdot \phi(t, t_0) + \sigma_{p0} \cdot \chi(t, t_0)}{\zeta_p + \alpha_p \cdot \eta \cdot \rho} \quad (52)$$

Onde  $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$  retração no instante  $t$ , descontada a retração no instante  $t_0$ ,  $\alpha_p$  é a relação entre o módulo de elasticidade do concreto e o módulo de elasticidade secante do concreto aos 28 dias ( $= E_p/E_{ci28}$ ),  $\sigma_{c,pog}$  é a tensão no concreto devido à protensão e a carga permanente (considera-se negativa se houver compressão),  $\phi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência do concreto no instante  $t$  para protensão e carga permanente aplicadas no instante  $t_0$ ,  $\chi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência do aço ( $= -\ln [1 - \psi(t, t_0)]$ ),  $\zeta_p = 1 + \chi(t, t_0)$ ,  $\eta = 1 + e_p^2(A_c/I_c)$  e  $\rho$  é a taxa de armadura de protensão ( $= A_p/A_c$ ).

No segundo procedimento recomendado pela norma, além das duas condições impostas no primeiro procedimento, faz-se necessário a imposição de um limite superior para a retração do concreto dado por:

$$\varepsilon_{cso} \geq -2 \cdot 10^{-5} \phi(\infty, t_0) \quad (53)$$

As perdas progressivas podem então ser calculadas pelas seguintes expressões, desde que os valores calculados não sejam superiores aos das perdas progressivas calculadas e somadas individualmente. Assim, para os aços de relaxação baixa, tem-se:

$$\frac{\Delta\sigma_{p,c+s+r}}{\sigma_{p0}} = 0,181 + \frac{\alpha_p}{47000} \phi(\infty, t_0)^{1,57} (3 - \sigma_{c,p0g}) \quad (54)$$

E para os aços de relaxação alta, tem-se:

$$\frac{\Delta\sigma_{p,c+s+r}}{\sigma_{p0}} = 0,074 + \frac{\alpha_p}{1870} \phi(\infty, t_0)^{1,07} (3 - \sigma_{c,p0g}) \quad (55)$$

Onde  $\Delta\sigma_{p,c+s+r}$  é a perda de tensão no aço de protensão, no tempo  $t = \infty$ , decorrente da fluência e retração do concreto e da relaxação do aço

### **3 FORMULAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos mais utilizados na área de análise estrutural, devido a sua capacidade de analisar diferentes tipos de estruturas, com geometrias, carregamentos, condições de contorno e materiais diferentes.

O modelo baseado em deslocamentos do MEF foi o modelo utilizado neste trabalho, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), já que este princípio pode ser empregado em situações onde o campo de energia não é conservativo, que é o caso da solução da análise não linear física.

A formulação desenvolvida para análise das vigas de concreto protendido não aderente emprega dois tipos de elementos. O primeiro elemento é o de pórtico plano, que é utilizado para representar a estrutura de concreto e a armadura passiva. O segundo elemento é o de treliça, que é utilizado para representar o cabo de protensão não aderente.

Os materiais são considerados elásticos não lineares, e sua representação é feita por leis constitutivas uniaxiais.

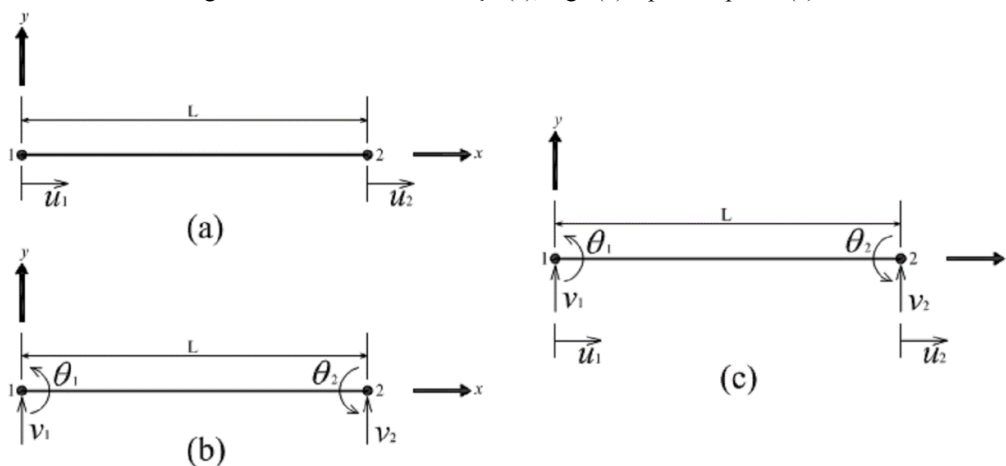
#### **3.1 Formulação do elemento finito do concreto e da armadura passiva**

Na formulação do elemento finito que representará a estrutura de concreto e a armadura passiva, foi utilizada a teoria de vigas de Euler-Navier-Bernoulli, ou Teoria Clássica de Vigas (TCV) para barras submetidas à flexão, acrescida da consideração dos efeitos axiais devidos aos esforços normais à seção transversal.

Desse modo, foi desenvolvido um elemento finito de pórtico plano, que permite representar o comportamento da estrutura de concreto armado sob o efeito da protensão, tendo em vista o esforço de compressão gerado pela mesma.

Considerando que o elemento utilizado neste trabalho é o de pórtico plano, os graus de liberdade do elemento são referentes às parcelas de membrana e de flexão, ou seja, o elemento de pórtico plano é a combinação de um elemento de treliça, que contempla os graus de liberdade relacionados à parcela de membrana, e de um elemento de viga, que contempla os graus de liberdade relacionados à parcela de flexão como mostra a Figura 18.

Figura 18- Elementos de treliça (a), viga (b) e pórtico plano (c).



Fonte: Nogueira (2013)

Para formular o elemento finito, primeiramente devem ser consideradas as hipóteses simplificadoras da TCV:

- a) Pequenos deslocamentos em relação à seção transversal.
- b) As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga quando esta se deforma.
- c) A deformação causada por cisalhamento é desprezada.

As duas últimas hipóteses ('b' e 'c') são semelhantes no sentido de causa e efeito, pois, caso as seções transversais permanecerem planas e normais ao eixo após a deformação, a deformação de cisalhamento será necessariamente igual a zero, e vice-versa.

Como o comprimento da viga é bem superior às demais dimensões, pode-se considerar que as tensões perpendiculares ao eixo da viga ( $\sigma_y$ ) são desprezíveis, já que apresentam valores bem inferiores aos das tensões na seção transversal da viga, devida à flexão. Acrescida a essa consideração, considera-se que o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) é nulo, fazendo com que as deformações perpendiculares ao eixo da viga ( $\epsilon_y$ ) sejam nulas.

Pode-se escrever matematicamente essa formulação como:

$$\sigma_y = 0, \nu = 0 \rightarrow \epsilon_y = 0 \quad (56)$$

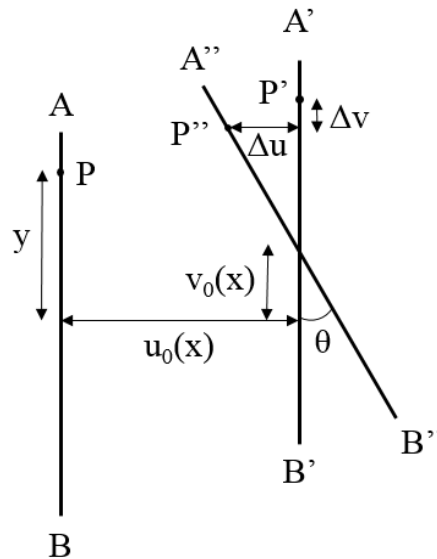
Escrevendo a deformação transversal ( $\epsilon_y$ ) pela derivada do deslocamento transversal ( $v$ ) em relação ao eixo  $y$ , tem-se:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (57)$$

Como a derivada do deslocamento transversal em relação ao eixo  $y$  é zero, pode-se concluir que o deslocamento transversal não varia em  $y$ , mas somente em  $x$ .

A Figura 19 mostra a seção do elemento antes da deformação (A-B), depois da translação (A'-B') e da rotação (A''-B''). Como foi visto não existe deformação transversal ( $\epsilon_y$ ), ou seja, o comprimento do elemento não varia. Um ponto P qualquer é mostrado nos três estágios.

Figura 19 - Seção do elemento antes e depois da translação e da rotação



Fonte: Adaptado de Sousa Jr. (2014)

Assim, pode-se escrever o campo de deslocamentos como:

$$u(x) = u_0(x) - \Delta u \quad (58)$$

$$v(x) = v_0(x) - \Delta v \quad (59)$$

Utilizando as relações trigonométricas, pode-se calcular  $\Delta u$  e  $\Delta v$ :

$$\Delta u = y \cdot \text{sen}\theta \quad (60)$$

$$\Delta v = y \cdot (1 - \text{cos}\theta) \quad (61)$$

Logo, o campo de deslocamentos pode ser escrito como:

$$u(x) = u_0(x) - y \cdot \text{sen}\theta \quad (62)$$

$$v(x) = v_0(x) - y \cdot (1 - \text{cos}\theta) \quad (63)$$

Como as rotações são pequenas,  $\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$  e  $\text{cos}\theta \approx 1$ . Logo:

$$u(x) = u_0(x) - y \cdot \tan\theta \quad (64)$$

$$v(x) = v_0(x) \quad (65)$$



Da hipótese de que as seções planas, após a deformação permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga, nota-se que:

$$\tan\theta = \frac{dv}{dx} \quad (66)$$

Finalmente, o campo de deslocamento é escrito como:

$$u(x, y) = u_0(x) - y \cdot \frac{dv}{dx} \quad (67)$$

$$v(x) = v_0(x) \quad (68)$$

Assim, sendo o elemento finito Lagrangiano Total, a deformação de Green-Lagrange é utilizada:

$$\varepsilon_G = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (69)$$

Desprezando-se o termo quadrático da derivada do deslocamento horizontal ( $u$ ) em relação a  $x$ , tem-se a seguinte expressão para a deformação longitudinal:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (70)$$

Substituindo os deslocamentos das Equações (67) e (68) na Equação (70):

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - y \cdot \frac{d^2v_0}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2 \quad (71)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - y \cdot \kappa \quad (72)$$

Onde  $\varepsilon_0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2$  é a deformação de membrana e  $\kappa = \frac{d^2v}{dx^2}$  é a curvatura.

Assim, pode-se chamar de vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), o vetor constituído pela deformação de membrana ( $\varepsilon_0$ ) e pela curvatura ( $\kappa$ ):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (73)$$

O vetor de deformações generalizadas pode ainda ser decomposto em duas parcelas: linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ) e não linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ ):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Na análise, considera-se o equilíbrio das tensões em cada seção da barra para obtenção dos esforços internos. Para o caso dos pórticos planos, os esforços de interesse são o

momento fletor ( $M$ ) e o esforço normal ( $N$ ), visto que o efeito do cisalhamento é desprezado pela TCV.

Assim, a integral na área das tensões normais à seção transversal resulta no esforço normal ( $N$ ):

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA \quad (75)$$

E a integral na área dos momentos fletores em torno do eixo  $z$  gerados pelas tensões normais à seção transversal resulta no esforço de flexão ( $M$ ):

$$M = \int_A (-y \cdot \sigma_x) \cdot dA \quad (76)$$

A força normal ( $N$ ) e o momento fletor ( $M$ ) definem o vetor de tensões generalizadas ( $\sigma$ ):

$$\sigma = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (77)$$

Como foi dito, a obtenção das equações de equilíbrio é realizada pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Segundo o PTV, o trabalho realizado pelas forças internas devido a um deslocamento virtual arbitrário, imaginário e possível é o mesmo trabalho realizado pelas forças externas. Então:

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad (78)$$

Onde:  $\delta U$  é o trabalho virtual interno e  $\delta W_{ext}$  é o trabalho virtual externo

Para um corpo qualquer, o trabalho virtual interno é dado pela seguinte expressão genérica:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (79)$$

Como a única tensão e deformação correspondente atuante no elemento de pórtico plano baseado na TCV são ao longo do eixo  $x$ , pode-se escrever o trabalho virtual interno como sendo:

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV \quad (80)$$

Da Equação (72), a deformação virtual ( $\delta \varepsilon_x$ ) pode ser escrita como:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_0 - y \cdot \delta \kappa \quad (81)$$

Utilizando a Equação (81) para reescrever a Equação (80), tem-se:

$$\delta U = \int_V (\delta \varepsilon_0 - y \delta \kappa) \sigma_x dV = \int_V \delta \varepsilon_0^T \sigma_x dV + \int_V -y \delta \kappa^T \sigma_x dV \quad (82)$$

A Equação (82) ainda pode ser escrita de forma diferente ao decompor a integral do volume como uma integral ao longo do comprimento  $x$  e sobre a área  $A$ . Sendo assim, como a deformação de membrana ( $\delta\varepsilon_0$ ) e a curvatura ( $\delta\kappa$ ) não variam na área  $A$ , podem ser retiradas da integral na área.

$$\delta U = \int_L \delta\varepsilon_0^T \int_A \sigma_x dA dx + \int_L \delta\kappa^T \int_A -y \cdot \sigma_x dA dx \quad (83)$$

Substituindo os termos da integral na área pelos esforços internos das Equações (75) e (76):

$$\delta U = \int_L \delta\varepsilon_0 N dx + \int_L \delta\kappa M dx \quad (84)$$

Substituindo o vetor de tensões generalizadas ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e o vetor de deformações virtuais generalizadas ( $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ) na Equação (84), tem-se a expressão do trabalho virtual interno de forma compacta.

$$\delta U = \int_L \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (85)$$

O trabalho virtual externo ( $\delta W_{\text{ext}}$ ) é dado pela soma do trabalho realizado pelas forças de campo (vetor  $\mathbf{b}$ ), de superfície (vetor  $\mathbf{q}$ ) e pelas forças aplicadas diretamente sobre os nós do elemento (vetor  $\mathbf{P}$ ).

O trabalho virtual externo ( $\delta W_{\text{ext}}$ ) pode então ser expresso matematicamente pela seguinte expressão:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}) dS + \delta\mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \quad (86)$$

Onde  $\mathbf{u}$  representa o vetor de deslocamento no interior do elemento e  $\mathbf{u}_e$  representa o vetor de deslocamentos nodais.

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos, devem-se definir os polinômios de interpolação para os deslocamentos no interior do elemento, em função da coordenada do ponto e dos deslocamentos nodais. Esses deslocamentos no interior do elemento são necessários para o cálculo do trabalho virtual interno.

Segundo Cook et al (2002), para a convergência do MEF, faz-se necessário que os polinômios de interpolação tenham continuidade  $C^{m-1}$ , onde  $m$  é a maior ordem da derivada na integral do trabalho virtual interno.

Para isso, os deslocamentos relativos à parcela de membrana ( $u$ ) serão interpolados com uma função linear, pois nota-se na primeira integral da Equação (83) que a deformação de membrana ( $\delta\varepsilon_0$ ) apresenta dois termos, sendo ambos com derivadas de primeira ordem, como mostra as Equação (74).

Sendo assim, os deslocamentos axiais ( $u$ ) serão interpolados com uma função linear, sendo necessários apenas dois graus de liberdade para compor o polinômio de interpolação:

$$u(x) = L_1(x) \cdot u_1 + L_2(x) \cdot u_2 \quad (87)$$

Onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos nodais axiais e  $L_1$  e  $L_2$  são polinômios lineares definidos no intervalo de 0 a  $L$ :

$$L_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (88)$$

$$L_2 = \frac{x}{L} \quad (89)$$

Já a segunda parte da integral da equação da energia interna, que é a parte da energia referente à flexão, tem-se o termo da curvatura ( $\delta\kappa^T$ ). A Equação (74) mostra que a curvatura ( $\kappa$ ) é dada pela segunda derivada dos deslocamentos transversais ( $v$ ) em relação ao eixo  $x$ , ou seja, os deslocamentos transversais no interior do elemento serão dados por um polinômio de interpolação de continuidade, no mínimo,  $C^1$ . Isso quer dizer que tanto a função de interpolação quanto a derivada de primeira ordem da função devem ser contínuas.

Sendo assim, os deslocamentos verticais ( $v$ ) serão interpolados através do polinômio de Hermite:

$$v = H_1 \cdot v_1 + H_2 \cdot \theta_1 + H_3 \cdot v_2 + H_4 \cdot \theta_2 \quad (90)$$

Onde:  $v_1$  e  $v_2$  são os deslocamentos verticais nodais,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais e  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  e  $H_4$  são os polinômios de Hermite.

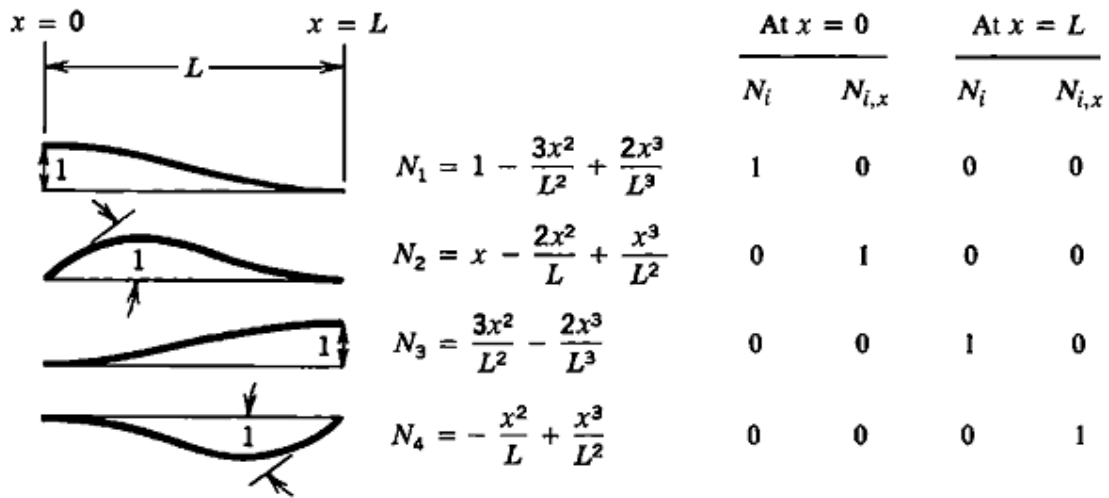
$$H_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (91)$$

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (92)$$

$$H_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (93)$$

$$H_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (94)$$

Figura 20 - Representação dos polinômios de Hermite



Fonte: Cook et al (2002)

Logo, o deslocamento longitudinal ( $u$ ) e o transversal ( $v$ ) podem ser escritos em função dos polinômios de interpolação na forma matricial:

$$u = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow u = \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{u}_e \quad (95)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow v = \mathbf{N}_b \cdot \mathbf{u}_e \quad (96)$$

Onde  $\mathbf{N}_0$  é a matriz das funções que transformam os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no deslocamento axial no interior do elemento ( $u$ ) e  $\mathbf{N}_b$  é a matriz das funções que transformam os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no deslocamento transversal no interior do elemento ( $v$ ).

Listando os deslocamentos longitudinais e transversais conjuntamente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_e \quad (97)$$

Onde  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções que transformam os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) nos deslocamentos no interior do elemento ( $\mathbf{u}$ ).

Assim, a partir do campo de deslocamentos relativos à parcela de membrana ( $u$ ) e à parcela de flexão ( $v$ ), pode-se obter os dois termos do vetor de deformações generalizadas linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ), derivando-se em relação a  $x$ , conforme as expressões dos termos da deformação de membrana linear ( $\varepsilon_{0L}$ ) e curvatura ( $\kappa$ ) dadas pela Equação (74).

$$\varepsilon_{0L} = \frac{du_0}{dx} = \begin{bmatrix} L_{1,x} & 0 & 0 & L_{2,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \varepsilon_{0L} = \mathbf{B}_{0L} \cdot \mathbf{u}_e \quad (98)$$

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} = \begin{bmatrix} 0 & H_{1,xx} & H_{2,xx} & 0 & H_{3,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \kappa = \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{u}_e \quad (99)$$

Onde  $\mathbf{B}_{0L}$  é a parcela de membrana da matriz deformação-deslocamento linear e  $\mathbf{B}_b$  é a parcela de flexão da matriz deformação-deslocamento.

Listando os termos da deformação de membrana linear e a curvatura conjuntamente, tem-se o vetor de deformações linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{0L} \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,x} & 0 & 0 & L_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,xx} & H_{2,xx} & 0 & H_{3,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{u}_e \quad (100)$$

Onde  $\mathbf{B}_L$  é a matriz deformação-deslocamento linear, que transforma os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ).

A parcela não linear do vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ ) também pode ser desenvolvida derivando-se os deslocamentos verticais ( $v$ ), conforme:

$$\frac{dv}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & H_{1,x} & H_{2,x} & 0 & H_{3,x} & H_{4,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{u}_e \quad (101)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}(1,1) = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_e \quad (102)$$

Logo, a parcela não linear do vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ ) fica sendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_e \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \cdot \mathbf{u}_e \quad (103)$$

Onde  $\mathbf{B}_{NL}$  é a matriz deformação-deslocamento não linear, que transforma os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas não linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ ). Esta matriz depende dos deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ )

Sendo assim, o vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) fica sendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \left( \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \right) \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_e \quad (104)$$

Onde  $\mathbf{B}$  é matriz deformação-deslocamento, que transforma os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ).

Por fim, para calcular o vetor de deformações generalizadas virtual ( $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ) basta fazer a diferenciação da Equação (104):

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \cdot \delta\mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \cdot \delta\mathbf{u}_e \quad (105)$$

Onde  $\bar{\mathbf{B}}$  é a matriz deformação-deslocamento virtual, que transforma os deslocamentos nodais virtuais ( $\delta\mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas virtual ( $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ).

No entanto, como os polinômios de interpolação dos deslocamentos transversais são do terceiro grau (polinômios de Hermite) e os polinômios de interpolação dos deslocamentos axiais são do primeiro grau, tem-se que a deformação axial ou deformação de membrana ( $\varepsilon_0$ ) é representada por um polinômio do quarto grau, tendo termos constantes

referentes ao deslocamento axial e termos constantes, do segundo e do quarto grau referente à parcela do deslocamento vertical.

Esse desbalanceamento torna a representação cinemática do elemento inconsistente, como mostram Crisfield (1991) e Reddy (2004), podendo gerar problemas de travamento (locking).

Uma solução para eliminar esse desbalanceamento, que foi adotada nesse trabalho, é considerar a parcela não linear da deformação de membrana igual a deformação média. Logo, a matriz deformação-deslocamento não linear ( $\mathbf{B}_{NL}$ ) passa a ser dada pela da seguinte expressão:

$$\mathbf{B}_{NL}^* = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{B}_{NL} dx \quad (106)$$

Fazendo o cálculo da integral, tem-se:

$$\mathbf{B}_{NL}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$\text{Onde: } \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L^2} & \frac{1}{10L} & 0 & -\frac{6}{5L^2} & \frac{1}{10L} \\ 0 & \frac{1}{10L} & \frac{2}{15} & 0 & -\frac{1}{10L} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L^2} & -\frac{1}{10L} & 0 & \frac{6}{5L^2} & -\frac{1}{10L} \\ 0 & \frac{1}{10L} & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10L} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Substituindo o vetor de deformações generalizadas virtual ( $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ) da Equação (105) na expressão do trabalho virtual interno da Equação (85), tem-se:

$$\delta U = \int_L \delta \mathbf{u}_e^T \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx = \delta \mathbf{u}_e^T \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \quad (108)$$

$$\mathbf{g}_e = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx \quad (109)$$

Onde  $\mathbf{g}_e$  é o vetor de forças internas do elemento.

Substituindo agora os deslocamentos no interior do elemento, pela matriz  $\mathbf{N}$  multiplicada pelos deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) na expressão do trabalho virtual externo, tem-se:



$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \quad (110)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \quad (111)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{u}_e^T \left( \int_V (\mathbf{N}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\mathbf{N}^T \mathbf{q}) dS + \mathbf{P} \right) \quad (112)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{f}_b + \mathbf{f}_q + \mathbf{P}) \quad (113)$$

Onde  $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_q + \mathbf{P}$  representa o vetor de forças externas equivalentes nodais.

A matriz de rigidez tangente do elemento ( $\mathbf{K}_t$ ) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} \quad (114)$$

Substituindo a expressão do vetor de forças internas ( $\mathbf{g}_e$ ) da Equação (109), na expressão da matriz de rigidez tangente do elemento ( $\mathbf{K}_t$ ), da Equação (114), tem-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_e} \left( \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx \right) \quad (115)$$

$$\mathbf{K}_t = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot dx + \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot dx = \mathbf{K}_{\text{Et}} + \mathbf{K}_{\text{Gt}} \quad (116)$$

Onde  $\mathbf{K}_{\text{Et}}$  é a matriz de rigidez elástica e  $\mathbf{K}_{\text{Gt}}$  é a matriz de rigidez geométrica.

$$\mathbf{K}_{\text{Et}} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot dx = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot dx = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dx \quad (117)$$

$$\mathbf{K}_{\text{Gt}} = \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot dx = \int_L \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_L^T}{\partial \mathbf{u}_e} + \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\text{NL}}^{*T}}{\partial \mathbf{u}_e} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot dx = \int_L \mathbf{N} \mathbf{H}_0 dx \quad (118)$$

Onde  $\mathbf{C}_t$  é a matriz constitutiva tangente e  $\mathbf{N}$  é o esforço normal

Diferenciando-se o vetor de tensões generalizadas ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) em relação ao vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), a matriz constitutiva tangente pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \quad (119)$$

Os termos da matriz constitutiva tangente são obtidos realizando as derivações indicadas:

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_0} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_0} dA \quad (120)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \kappa} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \kappa} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \kappa} dA \quad (121)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_0} dA = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_0} dA \quad (122)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \kappa} = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \kappa} dA = \int_A -y \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \kappa} dA \quad (123)$$

Como a relação entre a tensão e a deformação é não linear tem-se:

$$E_t = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \quad (124)$$

Onde  $E_t$  é o módulo de elasticidade tangente e depende da deformação do ponto e do material. Assim, podem-se reescrever os termos da matriz constitutiva tangente, de forma compacta como:

$$EA = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} = \int_A E_t dA \quad (125)$$

$$ES = \frac{\partial N}{\partial \kappa} = - \int_A y E_t dA \quad (126)$$

$$ES = \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} = - \int_A y E_t dA \quad (127)$$

$$EI = \frac{\partial M}{\partial \kappa} = \int_A y^2 E_t dA \quad (128)$$

O cálculo da contribuição do concreto no vetor de forças internas e na matriz constitutiva tangente é feita através das Equações (75), (76), (125), (126), (127) e (128), e o cálculo das integrais é feito pelo Método das Fatias, que será mostrado no Capítulo 4.

### 3.1.1 Contribuição da armadura passiva

A consideração do aço, neste trabalho, segue o modelo adotado por Fafitis (2001), onde cada barra é considerada um ponto discreto com sua respectiva área, coordenadas e tensão, correspondente ao centróide da armadura. Assim, esta contribuição pode ser descrita como um simples somatório:

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} \sigma_s(\varepsilon_j(y_{sj})) \quad (129)$$

$$M_s = \sum_{j=1}^{N_b} -y_{sj} A_{sj} \sigma_s(\varepsilon_j(y_{sj})) \quad (130)$$

Onde  $N_b$  é o número de barras da seção transversal,  $A_{sj}$  é a área de cada barra,  $y_{sj}$  é a ordenada de cada barra em relação ao sistema de eixos global e  $\sigma_s$  é a tensão na armadura de aço passiva.

Para evitar somar a contribuição da área de concreto que foi substituída pela contribuição da barra de aço, a força que o concreto faria é subtraída da força da barra de aço.

Assim, tem-se:

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (131)$$

$$M_s = \sum_{j=1}^{N_b} -y_{sj} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (132)$$

A contribuição para a matriz constitutiva tangente segue o mesmo princípio considerado para os esforços internos, ou seja, a contribuição do aço em cada termo se resume em substituir as integrais (125), (126), (127) e (128) por um somatório do integrando em cada barra, lembrando de retirar a contribuição do concreto, conforme as equações a seguir:

$$C_{11} = EA = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (133)$$

$$C_{12} = C_{21} = ES = \sum_{j=1}^{N_b} -y_{sj} A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (134)$$

$$C_{22} = EI = \sum_{j=1}^{N_b} y_{sj}^2 A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (135)$$

Após o cálculo das parcelas do aço e do concreto para os esforços internos e a matriz constitutiva tangente, basta somar essas parcelas para obter o resultado na seção.

Assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_s \quad (136)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{tc} + \mathbf{C}_{ts} \quad (137)$$

Onde  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$  representam os vetores das parcelas das tensões generalizadas do concreto e do aço, respectivamente, e  $C_{tc}$  e  $C_{ts}$  representam as parcelas das matrizes constitutivas tangentes do concreto e do aço, respectivamente.

### 3.2 Formulação do elemento finito do cabo de protensão não aderente

Prates Junior (1992) desenvolveu um modelo elasto-viscoplástico de elementos finitos para simular peças de concreto armado e protendido sob estado plano de tensões, para cargas de curta e longa duração. A armadura passiva e a armadura de protensão são consideradas como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto, sendo os deslocamentos ao longo da armadura referenciados aos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Assim, obtém-se uma matriz de rigidez desses elementos com as mesmas dimensões da matriz de rigidez do elemento de concreto.

Moon e Burns (1997) apresentam um modelo de elementos finitos híbrido de pórticos planos para simular o comportamento de estruturas de concreto protendido ao longo do tempo. Um método analítico é proposto para consideração do efeito da protensão não aderente, a partir da determinação das deformações na armadura ao longo do tempo.

Barbieri (2003) desenvolveu um modelo de elementos finitos híbrido de pórticos planos para simulação de estruturas de concreto protendido aderente e não aderente, onde as armaduras passivas e ativas são modeladas como lâminas incorporadas à seção. A armadura de protensão aderente é somada à rigidez da seção, e assim contribuem na matriz de rigidez do elemento. Contudo, a armadura de protensão não aderente é considerada como uma componente separada que atua sobre a estrutura e não são consideradas na matriz de rigidez.

Lou et al (2006) apresenta um modelo de elementos finitos de pórtico plano para análise de vigas de concreto com protensão externa, onde a protensão é considerada como carga equivalente externa, sendo a deformação no cabo constante ao longo do mesmo e calculada a partir dos deslocamentos calculados a cada iteração.

Zona e Dall'Astra (2008) apresenta um modelo de elementos finitos de pórtico plano para análise de vigas de concreto com protensão externa, onde a protensão é considerada como um elemento resistente, que contribui na matriz de rigidez do elemento. Esse modelo é semelhante ao apresentado nesse trabalho.

Lou et al (2013) apresenta um modelo de elementos finitos de pórtico plano semelhante ao desenvolvido por Lou et al (2006), no entanto para simulação vigas de concreto

com protensão interna não aderente, a partir da discretização do cabo em trechos retos, em cada elemento de concreto, conceito semelhante ao adotado nesse trabalho.

Em estruturas de concreto com protensão aderente, devido a injeção de nata de cimento no interior da bainha após a aplicação da protensão, a aderência entre o aço de protensão e a bainha plástica é resgatada. Como também há aderência e entre a bainha plástica e o concreto que a envolve, pode-se concluir que a compatibilidade de deformações entre o aço de protensão e o concreto que envolve a bainha naquele ponto é verificada.

Sendo assim, na protensão aderente, a deformação no aço de protensão em um determinado ponto depende apenas da deformação de membrana ( $\varepsilon_m$ ) e da curvatura ( $\kappa$ ) naquela seção e da excentricidade do cabo.

Na protensão não aderente, a compatibilidade de deformações entre o concreto e o aço de protensão no interior da bainha de plástico não é verificada, existindo apenas a compatibilidade de deslocamentos nas extremidades da viga ou em pontos intermediários de ancoragem.

Essa incompatibilidade de deformações dá-se pelo fato de o aço de protensão poder se deslocar livremente no interior da bainha plástica, devido à presença de graxa entre os dois materiais. Sendo assim, a deformação da armadura de protensão em uma determinada seção não depende apenas da deformação naquela seção, mas da deformação de membrana ( $\varepsilon_m$ ) e da curvatura ( $\kappa$ ) da estrutura de concreto como um todo.

Devido ao fato da deformação no cabo não depender somente da deformação na seção, Naaman e Alkhairi (1997) afirmam que a tensão no cabo não aderente não pode ser determinada apenas pela análise da seção, mas por meio da análise de todo elemento estrutural.

Segundo Mattock (1971), nas estruturas de concreto com protensão não aderente, a variação de deformação no aço de protensão é uniforme ao longo do comprimento, sendo esta variação de deformação igual a variação de deformação média do concreto que envolve o perfil do cabo.

Desse modo, o modelo proposto neste trabalho considera então que a tensão no cabo de protensão é constante ao longo do comprimento, ou seja, o atrito entre a bainha plástica e o aço de protensão é considerado nulo, já que entre os dois materiais existe uma graxa que reduz significativamente a perda de protensão ao longo do cabo. Sendo esse atrito considerado nulo, pode-se dizer que a deformação ao longo de todo o cabo será constante.

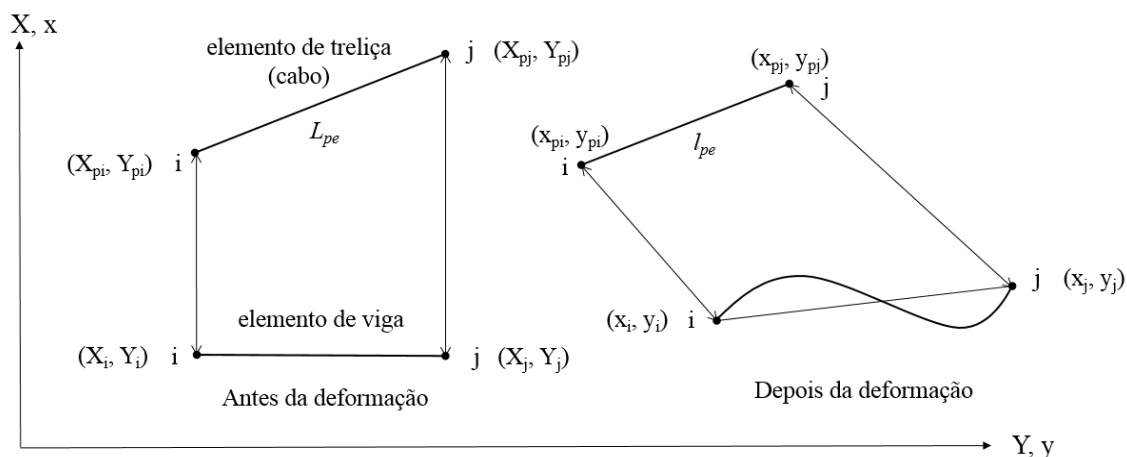
O cabo foi modelado como um elemento de treliça, sendo as coordenadas dos elementos de treliça associadas ao elemento de pórtico plano, como será mostrado na formulação.

Vale ressaltar que as coordenadas do elemento de treliça não representam coordenadas do aço de protensão, visto que este desliza em relação ao concreto, mas sim representam as coordenadas da bainha plástica, que serão utilizadas para calcular a variação do comprimento total do cabo, e assim calcular a deformação no aço de protensão, já que esta é constante.

Todavia, com a deformação do aço de protensão é possível o cálculo do trabalho virtual interno, do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente do cabo, como será mostrado na formulação a seguir.

Para simular a protensão, o cabo é dividido em trechos retos, formando os elementos de treliça (cabo). A Figura 21 mostra o elemento de viga e o elemento de cabo (treliça) antes e depois da deformação, com as coordenadas dos respectivos nós mostradas.

Figura 21 - Elemento de viga e elemento de cabo (treliça) antes e após a deformação



Fonte: Próprio autor

Apesar da Figura 21 mostrar os nós do elemento de treliça (cabo) coincidindo com os nós de um mesmo elemento de viga, a discretização dos elementos de treliça pode ser menor que a discretização dos elementos de viga, bastando apenas que os nós dos elementos de treliça estejam associados a nós de elementos de viga, que podem ser elementos diferentes.

Desse modo, essa formulação permite a análise de vigas de concreto com protensão interna e externa. Vale ressaltar que, na protensão interna, como o elemento de

treliça permanece reto após a deformação, o comprimento é calculado de maneira aproximada, tornando necessária uma discretização de 20 elementos por vão para obter resultados satisfatórios, segundo Aalami (2000).

Na formulação do elemento de treliça (cabo), o campo de deslocamentos da Teoria Clássica de Vigas (TCV), mostrado anteriormente, será utilizado. Substituindo os termos das coordenadas do elemento de treliça nas equações do campo de deslocamentos da TCV, tem-se:

$$u_p(X_p, Y_p) = u_0(X_p) - Y_p \cdot \theta(X_p) \quad (138)$$

$$v_p(X_p) = v_0(X_p) \quad (139)$$

Com os deslocamentos nodais dos elementos de treliça, é possível calcular as coordenadas finais  $(x_p, y_p)$  dos nós  $i$  e  $j$  do elemento de treliça (cabo):

$$x_{pi} = X_{pi} + u_{pi} = X_{pi} + u_i - Y_{pi} \cdot \theta_i \quad (140)$$

$$y_{pi} = Y_{pi} + v_{pi} = Y_{pi} + v_i \quad (141)$$

$$x_{pj} = X_{pj} + u_{pj} = X_{pj} + u_j - Y_{pj} \cdot \theta_j \quad (142)$$

$$y_{pj} = Y_{pj} + v_{pj} = Y_{pj} + v_j \quad (143)$$

Escrevendo os deslocamentos nodais  $(u_p, v_p)$  do elemento de treliça (cabo) matricialmente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_{pi} \\ v_{pi} \\ u_{pj} \\ v_{pj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_{pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Y_{pj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_{pe} = \mathbf{T}_{pe} \hat{\mathbf{u}}_e \quad (144)$$

Onde  $\mathbf{u}_{pe}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de treliça (cabo),  $\hat{\mathbf{u}}_e$  é o vetor de deslocamentos dos nós de viga associados aos nós do elemento de treliça (cabo) e  $\mathbf{T}_{pe}$  é a respectiva matriz de transformação.

Utilizando o PTV, pode-se escrever o trabalho virtual interno realizado pelo cabo:

$$\delta U_p = \int_V \delta \varepsilon_p \sigma_p dV = \int_{Lc} \int_{Ac} \delta \varepsilon_p \sigma_p dAdS \quad (145)$$

Como a tensão e a deformação são considerados constantes ao longo da área e do comprimento, os dois termos podem ser retirados da integral:

$$\delta U_p = \delta \varepsilon_p \sigma_p \int_{L_p} \int_{A_p} dAdS \quad (146)$$

$$\delta U_p = \delta \varepsilon_p \sigma_p A_p L_p = \delta \varepsilon_p F_p L_p \quad (147)$$

A deformação no cabo é definida pela soma da deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) e do incremento de deformação no cabo ( $\Delta \varepsilon_p$ ):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta \varepsilon_p \quad (148)$$

A deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) é a deformação que seria teoricamente encontrada no cabo após a aplicação da protensão, caso a força de protensão não fosse transmitida à peça de concreto à medida que o aço fosse alongado, situação verificada na pré-tração, mas que é utilizada como modelo para aplicação da protensão no caso de peças pós-tracionadas.

Esse modelo para aplicação de protensão, proposto por Lou et al. (2006), baseia-se no fato de que, em geral, a deformação efetiva ( $\varepsilon_{pe}$ ), que é a deformação encontrada no cabo após a aplicação da protensão e as perdas imediatas, ser conhecida. Com isso, o problema se resume a encontrar deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ), que após as perdas imediatas, resultará em uma deformação efetiva igual a fornecida no problema. Este aspecto será estudado com detalhes no Capítulo 5.

Prosseguindo na formulação do elemento finito de cabo, a deformação de engenharia (formulação corrotacional) é utilizada por conveniência, e assim pode-se calcular a variação da deformação:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{l_p - L_p}{L_p} \quad (149)$$

$$\delta \varepsilon_p = \frac{\delta l_p}{L_p} \quad (150)$$

Substituindo a variação de deformação dada pela Equação (150) na expressão do trabalho virtual interno da Equação (147), tem-se:

$$\delta U_p = \delta l_p F_p \quad (151)$$

Com as coordenadas iniciais e finais dos nós de cada elemento de treliça (cabo), é possível calcular o comprimento inicial ( $L_{pe}$ ) e final ( $l_{pe}$ ) de cada elemento de treliça (cabo):

$$L_{pe} = \sqrt{(X_{pj} - X_{pi})^2 + (Y_{pj} - Y_{pi})^2} \quad (152)$$

$$l_{pe} = \sqrt{(x_{pj} - x_{pi})^2 + (y_{pj} - y_{pi})^2} \quad (153)$$



Fazendo o somatório dos comprimentos dos elementos de treliça (cabo), tem-se o comprimento total do cabo:

$$L_p = \sum_{e=1}^{nep} L_{pe} \quad (154)$$

$$l_p = \sum_{e=1}^{nep} l_{pe} \quad (155)$$

Onde  $nep$  é o número de elementos de treliça (cabo)

Assim, para calcular a variação do comprimento final do cabo ( $\delta l_p$ ), basta calcular o somatório das variações dos comprimentos finais dos elementos de cabo:

$$\delta l_p = \sum_{e=1}^{nep} \delta l_{pe} \quad (156)$$

A variação do comprimento final de cada elemento de cabo é mostrada a seguir:

$$l_{pe}^2 = (x_{pj} - x_{pi})^2 + (y_{pj} - y_{pi})^2 \quad (157)$$

$$2l_{pe} \delta l_{pe} = 2(x_{pj} - x_{pi})(\delta x_{pj} - \delta x_{pi}) + 2(y_{pj} - y_{pi})(\delta y_{pj} - \delta y_{pi}) \quad (158)$$

$$\delta l_{pe} = \frac{(x_{pj} - x_{pi})}{l_{pe}} (\delta x_{pj} - \delta x_{pi}) + \frac{(y_{pj} - y_{pi})}{l_{pe}} (\delta y_{pj} - \delta y_{pi}) \quad (159)$$

$$\delta l_{pe} = \cos \beta (\delta x_{pj} - \delta x_{pi}) + \sin \beta (\delta y_{pj} - \delta y_{pi}) \quad (160)$$

Onde  $\beta$  é a ângulo final do elemento de cabo.

Através das Equações (140), (141), (142) e (143) pode-se notar que as coordenadas finais dos nós do elemento de cabo variam em função dos deslocamentos dos mesmos. Logo:

$$\delta l_{pe} = \cos \beta (\delta u_{pj} - \delta u_{pi}) + \sin \beta (\delta v_{pj} - \delta v_{pi}) \quad (161)$$

Por fim, a Equação (161) pode ser escrita matricialmente:

$$\delta l_{pe} = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{pi} \\ \delta v_{pi} \\ \delta u_{pj} \\ \delta v_{pj} \end{bmatrix} \Rightarrow \delta l_{pe} = \mathbf{r}_e^t \delta \mathbf{u}_{pe} \quad (162)$$

Onde  $\delta \mathbf{u}_{pe}$  é a variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo (treliça).

Como a formulação do elemento de treliça (cabo) deve estar em função dos graus de liberdade da malha de elemento de viga, a Equação (144) é utilizada para substituir o termo da variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo (treliça), e assim ter uma expressão da variação do comprimento de cabo em função dos deslocamentos nodais dos elementos de viga:

$$\delta l_{pe} = \mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \delta \hat{\mathbf{u}}_e \quad (163)$$

Substituindo a Equação (163) na Equação (156), tem-se a expressão para variação do comprimento final do cabo como sendo:

$$\delta l_p = \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \delta \hat{\mathbf{u}}_e \quad (164)$$

Por fim, substituindo a Equação (164) na expressão do trabalho virtual interno, dado na Equação (151), tem-se:

$$\delta U_p = \sum_{e=1}^{nep} (\mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \delta \hat{\mathbf{u}}_e)^t F_p = \sum_{e=1}^{nep} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^t \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e F_p \quad (165)$$

$$\delta U_p = \sum_{e=1}^{nep} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^t \mathbf{g}_{pe} \Rightarrow \mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e F_p \quad (166)$$

Onde  $\mathbf{g}_{pe}$  é o vetor de forças internas do elemento de cabo (treliça).

Substituindo os termos da expressão do vetor de forças internas do elemento de cabo, pode-se ter uma interpretação física do modelo. Assim:

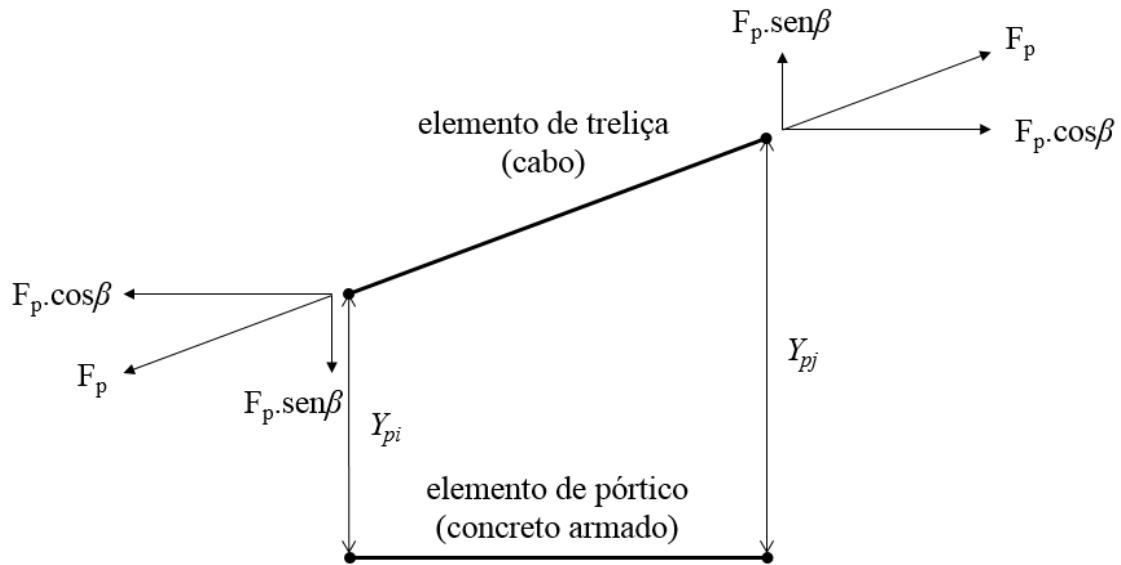
$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e F_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Y_{pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Y_{pj} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \end{bmatrix} F_p = \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta \cdot Y_{pi} \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \\ -\cos\beta \cdot Y_{pj} \end{bmatrix} F_p \quad (167)$$

Nota-se a partir do desenvolvimento mostrado na Equação (168) que o vetor de forças internas do elemento de cabo é dado pelas componentes das forças no cabo, transferidas para os nós do elemento de pórtico plano, aplicando-se um momento equivalente. A Figura 22 ilustra a interpretação física do vetor de forças internas do elemento de cabo.

A metodologia apresentada é semelhante a ideia de força equivalente de protensão, no entanto, nesse modelo a força é atualizada a cada iteração com o incremento de deslocamentos na viga e a matriz de rigidez do elemento é considerada, o que torna a formulação consistente.

Vale ressaltar que, apesar das forças serem atualizadas a partir dos deslocamentos em cada passo, a excentricidade da parcela do momento equivalente é constante, o que é coerente com a teoria de rotações moderadas.

Figura 22 - Interpretação física do vetor de forças internas do elemento de cabo



Fonte: Próprio autor

Para realizar o cálculo do vetor de forças internas global, uma matriz de incidência pode ser montada para cada elemento de cabo. A matriz de incidência ( $\mathbf{L}_e$ ) a ser montada relaciona o vetor de deslocamentos nodais do elemento de viga associados aos nós do elemento de cabo ( $\hat{\mathbf{u}}_e$ ) com o vetor de deslocamentos nodais global ( $\mathbf{u}$ ). Logo, tem-se:

$$\hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{u} \quad (168)$$

Fazendo a variação dos termos da Equação (168), tem-se:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{L}_e \delta \mathbf{u} \quad (169)$$

Substituindo o termo da variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de viga associados aos nós do elemento de cabo ( $\hat{\mathbf{u}}_e$ ) na expressão do trabalho virtual interno, da Equação (166):

$$\delta U_p = \sum_{e=1}^{nep} \delta \hat{\mathbf{u}}_e^t \mathbf{g}_{pe} = \sum_{e=1}^{nep} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{L}_e^t \mathbf{g}_{pe} = \delta \mathbf{u}^t \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \mathbf{g}_{pe} \quad (170)$$

$$\delta U_p = \delta \mathbf{u}^t \mathbf{g}_p \Rightarrow \mathbf{g}_p = \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \mathbf{g}_{pe} \quad (171)$$

Onde  $\mathbf{g}_p$  é o vetor de forças internas global do cabo.

Agora, para calcular a matriz de rigidez global do cabo ( $\mathbf{K}_p$ ), basta derivar o vetor de forças internas global do cabo ( $\mathbf{g}_p$ ) em função do vetor de deslocamentos nodais global ( $\mathbf{u}$ ):

$$\mathbf{K}_p = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} \quad (172)$$

Logo, a matriz de rigidez do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{pe}$ ) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} \quad (173)$$

Substituindo o valor do vetor de forças internas do elemento de cabo ( $\mathbf{g}_{pe}$ ) dado na Equação (166) na expressão da matriz de rigidez do elemento de cabo, tem-se:

$$\mathbf{K}_{pe} = \frac{\partial (\mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e F_p)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}_{pe}^t \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_{Epe} + \mathbf{K}_{Gpe} \quad (174)$$

$$\mathbf{K}_{Epe} = \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \quad (175)$$

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \mathbf{T}_{pe}^t \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p \quad (176)$$

Onde  $\mathbf{K}_{Epe}$  é a matriz de rigidez elástica do elemento de cabo e  $\mathbf{K}_{Gpe}$  é a matriz de rigidez geométrica do elemento de cabo.

Primeiramente, será mostrada a dedução da matriz de rigidez elástica do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{Epe}$ ), a partir da Equação (175).

Utilizando a regra da cadeia, pode-se reescrever a derivada da força de protensão no cabo ( $F_p$ ) em função do vetor de deslocamentos global ( $\mathbf{u}$ ) como sendo:

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial F_p}{\partial l_p} \frac{\partial l_p}{\partial \mathbf{u}} \quad (177)$$

Desenvolvendo o primeiro termo da Equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.**), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p}{\partial l_p} &= \frac{\partial (\sigma_p A_p)}{\partial l_p} \\ \frac{\partial F_p}{\partial l_p} &= A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial l_p} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial l_p} \\ \frac{\partial F_p}{\partial l_p} &= A_p E_{pt} \frac{1}{L_p} \end{aligned} \quad (178)$$

Desenvolvendo o segundo termo da Equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.**), tem-se:

$$\frac{\partial l_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{nep} \frac{\partial l_{pe}}{\partial \mathbf{u}} \quad (179)$$

$$\frac{\partial l_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{nep} \frac{\partial l_{pe}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{nep} \frac{\partial l_{pe}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_e}{\partial \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial l_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e \quad (180)$$

Logo, a matriz de rigidez elástica do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{Epe}$ ) é dada por:

$$\mathbf{K}_{Epe} = \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \frac{1}{L_p} \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e \quad (181)$$

Agora, será mostrada a dedução da expressão da matriz de rigidez geométrica do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{Gpe}$ ), a partir da Equação (176).

Utilizando a regra da cadeia, pode-se reescrever a derivada do vetor  $\mathbf{r}_e$  em função do vetor de deslocamentos global ( $\mathbf{u}$ ) como sendo:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} \mathbf{L}_e \quad (182)$$

O primeiro termo da expressão pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} = \mathbf{z} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \mathbf{T}_{pe} \Rightarrow \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \text{sen} \beta \\ -\text{cos} \beta \\ -\text{sen} \beta \\ \text{cos} \beta \end{bmatrix} \quad (183)$$

Para calcular a derivada do ângulo  $\beta$  em função do vetor de deslocamentos nodais do elemento de treliça ( $\mathbf{u}_{pe}$ ) faz-se uso do seguinte artifício matemático: deriva-se o seno do ângulo  $\beta$  em relação ao vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo:

$$\frac{\partial \text{sen} \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} = \text{cos} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e}$$

$$\frac{\partial \text{sen} \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} = \frac{\partial \left( \frac{y_{pj} - y_{pi}}{l_{pe}} \right)}{\partial \mathbf{u}_{pe}} = \frac{1}{l_{pe}} \left( \frac{\partial y_{pj}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} - \frac{\partial y_{pi}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \right) - \frac{1}{l_{pe}} \left( \frac{y_{pj} - y_{pi}}{l_{pe}} \right) \frac{\partial l_{pe}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} = \text{cos} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e}$$

$$\text{cos} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} = \frac{1}{l_{pe}} \left( \frac{\partial v_{pj}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} - \frac{\partial v_{pi}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} - \text{sen} \beta \mathbf{r}_e^t \right) = \frac{1}{l_{pe}} \left( \frac{\partial (v_{pj} - v_{pi})}{\partial \mathbf{u}_{pe}} - \text{sen} \beta \mathbf{r}_e^t \right)$$

$$\text{cos} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \hat{\mathbf{u}}_e} = \frac{1}{l_{pe}} \left( \frac{\partial ([0 \ -1 \ 0 \ 1] \mathbf{u}_{pe})}{\partial \mathbf{u}_{pe}} + \text{sen} \beta [\text{cos} \beta \ \text{sen} \beta \ -\text{cos} \beta \ -\text{sen} \beta] \right)$$

$$\begin{aligned}\cos\beta \frac{\partial\beta}{\partial\hat{\mathbf{u}}_e} &= \frac{1}{l_{pe}} \left( [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] + [cs \quad s^2 \quad -cs \quad -s^2] \right) = \frac{1}{l_{pe}} \left( [cs \quad s^2 - 1 \quad -cs \quad -s^2 + 1] \right) \\ \cos\beta \frac{\partial\beta}{\partial\hat{\mathbf{u}}_e} &= \frac{1}{l_{pe}} \left( [cs \quad c^2 \quad -cs \quad c^2] \right) \\ \frac{\partial\beta}{\partial\hat{\mathbf{u}}_e} &= \frac{1}{l_{pe}} \left( [s \quad c \quad -s \quad c] \right) = \frac{1}{l_{pe}} \mathbf{z}^t\end{aligned}\quad (184)$$

Logo, a matriz de rigidez geométrica do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{Gpe}$ ) pode ser reescrita:

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{z} \frac{F_p}{l_{pe}} \mathbf{z}^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e \quad (185)$$

Por fim, a matriz de rigidez global do cabo pode ser escrita como sendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_p &= \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \left( \mathbf{K}_{Epe} + \mathbf{K}_{Gpe} \right) \\ \mathbf{K}_p &= \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \left( \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e A_p E_{pt} \frac{1}{L_p} \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e + \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{z} \frac{F_p}{l_{pe}} \mathbf{z}^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e \right) \\ \mathbf{K}_p &= \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{r}_e \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \frac{1}{L_p} \sum_{i=1}^{nep} \mathbf{r}_e^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e + \sum_{e=1}^{nep} \mathbf{L}_e^t \mathbf{T}_{pe}^t \mathbf{z} \frac{F_p}{l_{pe}} \mathbf{z}^t \mathbf{T}_{pe} \mathbf{L}_e\end{aligned}\quad (186)$$

A matriz de rigidez elástica do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{Epe}$ ), dada pelo primeiro termo da Equação (186), é uma matriz simétrica, no entanto é acoplada, ou seja, cada grau de liberdade influi na rigidez de todos os termos. Já a matriz de rigidez geométrica do elemento de cabo ( $\mathbf{K}_{Gpe}$ ) é também simétrica, mas não é acoplada.

## 4 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

O cálculo da matriz de rigidez tangente ( $\mathbf{K}_t$ ) e do vetor de forças internas ( $\mathbf{g}_e$ ) do elemento de viga envolve cálculo de integrais ao longo do eixo longitudinal do elemento, como mostra as Equações (109), (117) e (118), e ao longo da área da seção transversal, como é o caso do cálculo vetor de tensões generalizadas ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e da matriz constitutiva tangente ( $\mathbf{C}_t$ ).

Nesse trabalho, as integrações ao longo do eixo longitudinal do elemento são feitas através dos métodos das quadraturas de Gauss ou Lobatto.

Segundo Papanikolaou (2012) alguns métodos de integração na seção transversal impõem restrição à geometria da seção e a relação tensão-deformação, geralmente utilizando as leis constitutivas especificadas pelos códigos normativos ou funções polinomiais parciais. É o que ocorre com os métodos analíticos, que, em contrapartida, produzem resultados exatos e rápidos. Este, portanto, é um método altamente eficiente e preciso, mas é de baixa generalidade.

Para seções simples como a retangular, as integrais podem ser obtidas analiticamente, como realizado por Melo (2000). Para o cálculo da parcela de contribuição do concreto, é necessário dividir a seção transversal em sub-regiões cujas coordenadas limites dependem das deformações que definem os trechos da curva tensão-deformação.

Parente et al (2014) apresenta uma metodologia que realiza o cálculo da matriz de rigidez tangente ( $\mathbf{K}_t$ ) e do vetor de forças internas ( $\mathbf{g}_e$ ) através de uma subdivisão automática da seção transversal em faixas de altura variável cujos limites são definidos de acordo com os limites de descontinuidade das curvas tensão-deformação do modelo constitutivo adotado e as deformações presentes na seção. Desse modo, como as curvas tensão-deformação são continuamente diferenciáveis. Sendo assim, os esforços internos e os termos da matriz constitutiva tangente podem ser integrados com precisão em cada faixa, resultando em um algoritmo de elevada precisão e baixo custo.

Nesse trabalho, em cada ponto de integração de Gauss ou Lobatto, são feitas as integrações ao longo da seção transversal pelo Método das Fatias convencional, um método numérico que apresenta generalidade, simplicidade e relativa eficiência.

Essa estratégia de integração longitudinal por meio das quadraturas seguida de integração transversal nos pontos das quadraturas uma boa precisão numérica e um custo computacional médio, como está mostrado no trabalho de Bratina e Planinc (2004).

#### 4.1 Métodos de integração ao longo do eixo longitudinal

A integração ao longo do eixo longitudinal foi feita utilizando o método numérico das quadraturas. No método de integração por meio das quadraturas, a função a ser integrada é considerada contínua, no intervalo de integração  $[-1, 1]$ .

Logo, sendo  $g(x)$  uma função contínua no intervalo de integração  $[-1, 1]$ , a integral pode então ser calculada pela soma de valores da função  $g(t)$  em pontos específicos  $(x_i)$ , multiplicada por respectivos pesos  $(w_i)$ , como mostra a expressão abaixo:

$$\int_{-1}^1 g(t)dx \cong w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + \dots + w_n \cdot f(x_n) \quad (187)$$

Como o método das quadraturas exige que o intervalo de integração seja  $[-1, 1]$ , o intervalo de integração  $[a, b]$  de uma função  $f(x)$  deve ser parametrizado da variável  $x$  para variável  $t$ , onde  $t$  varia no intervalo  $[-1, 1]$ . Sendo assim, se a função  $f(x)$  é contínua no intervalo de integração  $[a, b]$ , a integração na forma parametrizada segue a seguinte formulação:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 g(t)Jdt \quad (188)$$

Onde  $J$  é o jacobiano da transformação.

Para obtenção do jacobiano de integração basta realizar a transformação das variáveis, a partir da parametrização onde:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2} \\ dx &= \frac{b-a}{2} dt \\ J &= \frac{b-a}{2} \end{aligned} \quad (189)$$

Logo, a expressão para o cálculo da integral pelo método das quadraturas de Gauss de uma função contínua  $f(x)$ , definida em um intervalo  $[a, b]$  é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 g(t)Jdt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i g(t_i) \quad (190)$$

Onde  $n$  é o número de pontos da quadratura,  $i$  é o número do ponto de quadratura,  $t_i$  é a coordenada do ponto de quadratura  $i$  e  $w_i$  é o peso associado ao ponto da quadratura  $i$ .

Vale ressaltar que apesar das quadraturas serem desenvolvidas para o cálculo exato de integrais de funções polinomiais, como será mostrado a seguir, sua aplicação em



funções que não sejam polinomiais, ou mesmo não sejam contínuas, apresenta resultados satisfatórios com o aumento do número de pontos de integração.

#### 4.1.1 Integração de Gauss

Na integração pela quadratura de Gauss, os pontos  $x_i$  e os seus respectivos pesos  $w_i$  são calculados para que a integração seja exata para uma função polinomial de grau  $2n - 1$ , onde  $n$  é o número de pontos de Gauss. Além disso, a quadratura de Gauss não inclui os pontos limites do intervalo, mas apenas pontos interiores, que são dispostos simetricamente, sendo pontos simétricos com mesmo valor do peso  $w_i$ .

A Tabela 5 mostra a relação das coordenadas ( $t_i$ ) e dos respectivos pesos associados ( $w_i$ ) das quadraturas de Gauss, com até cinco pontos de integração.

Tabela 5 - Pesos e coordenadas das quadraturas de Gauss

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
1	1	0	2
2	1	$1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	1
3	1	$\sqrt{3/5}$	5/9
	2	0	8/9
	3	$-\sqrt{3/5}$	5/9
4	1	$\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18 - \sqrt{30})}{36}$
	2	$\sqrt{\frac{(3-2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18 + \sqrt{30})}{36}$
	3	$-\sqrt{\frac{(3-2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18 + \sqrt{30})}{36}$
	4	$-\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18 - \sqrt{30})}{36}$

1	$\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{107}}$	$\frac{(322 - 13\sqrt{70})}{900}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{107}}$	$\frac{(322 + 13\sqrt{70})}{900}$
5	3	0
		$\frac{128}{225}$
4	$-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{107}}$	$\frac{(322 + 13\sqrt{70})}{900}$
5	$-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{107}}$	$\frac{(322 - 13\sqrt{70})}{900}$

Fonte: Azevedo (2003)

#### 4.1.2 Integração de Lobatto

No método de integração através das quadraturas de Lobatto, os pontos extremos do intervalo são sempre considerados para a integração numérica e os pontos internos simétricos e os seus respectivos pesos  $w_i$ . As quadraturas de Lobatto são calculados para que a integração seja exata para uma função polinomial de grau  $2n-3$ , onde  $n$  é o número de pontos.

Apesar das quadraturas de Lobatto exigirem mais pontos de integração para integrar funções polinomiais do mesmo grau, quando comparadas com as quadraturas de Gauss, eles apresentam uma vantagem do ponto de vista da aplicação de elementos finitos para modelagem de estruturas.

Como os pontos extremos na integração longitudinal representam os nós dos elementos, a quadratura de Lobatto é capaz de captar melhor a plastificação dos materiais nos pontos de apoio da estrutura, onde as tensões tendem a ser elevadas. Na utilização das quadraturas, esse problema pode ser contornado através do refino da malha nos pontos próximos aos apoios, ou pontos onde a plastificação possivelmente venha a ser iniciada.

Tabela 6 - Pesos das quadraturas de Lobatto

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
3	1	-1	1/3

	2	0	$\frac{4}{3}$
	3	1	$\frac{1}{3}$
	1	1	$\frac{1}{3}$
4	2	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{6}$
	3	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{6}$
	4	-1	$\frac{1}{3}$
	1	1	$\frac{1}{10}$
	2	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{49}{90}$
5	3	0	$\frac{32}{45}$
	4	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{49}{90}$
	5	-1	$\frac{1}{10}$

Fonte: Wikipedia (Gaussian ..., 2012)

## 4.2 Integração na seção transversal

O Método das Fatias é o método adotado para o cálculo das integrais definidas na área da seção transversal, que devem ser calculadas em cada ponto de integração longitudinal, definido pelos pontos das quadraturas de Gauss ou de Lobatto.

No método das fatias, a seção transversal é dividida em  $n$  fatias horizontais de mesma altura ( $\Delta y$ ) e em cada uma dessas fatias toma-se a deformação e conseqüentemente, a tensão constantes e iguais aos valores correspondentes ao ponto no centro da fatia.

A expressão para o cálculo da altura da fatia ( $\Delta y$ ) e a ordenada do centro da fatia ( $y_i$ ) podem ser calculadas:

$$\Delta y = \frac{h}{n} \quad (191)$$

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y \quad (192)$$

Onde  $h$  é a altura da seção transversal e  $n$  é o número de fatias

Com isso, as equações dos esforços internos e os termos da matriz constitutiva tangente podem ser calculados através de um somatório, como mostram as equações abaixo:

$$N = \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i \Delta y \quad (193)$$

$$M = - \sum_{i=1}^n \sigma_i b_i y_i \Delta y \quad (194)$$

$$EA = \sum_{i=1}^n E_i A_i \quad (195)$$

$$ES = - \sum_{i=1}^n E_i A_i y_i \quad (196)$$

$$EI = \sum_{i=1}^n E_i (I_i + A_i y_i^2) \quad (197)$$

Onde  $\sigma_i$  é a tensão no centro da fatia  $i$ ,  $b_i$  é a largura da fatia  $i$ ,  $\Delta y$  é a altura da fatia,  $y_i$  é altura do centro da fatia  $i$ ,  $E_i$  é o módulo de elasticidade no centro da fatia  $i$ ,  $A_i$  é a área da fatia  $i$ , e  $I_i$  é a inércia da fatia  $i$ .

O método das fatias é um método simples, mas que apresenta uma convergência que depende de onde as fatias são divididas, pois o valor no centro da fatia pode não ser representativo para toda a área da fatia, principalmente se o ponto estiver próximo a uma descontinuidade da função tensão-deformação do material naquela seção.

## 5 MÉTODO DE TRAÇADO DO CAMINHO DE EQUILÍBRIO

Segundo o Princípio dos Trabalhos Virtuais, no equilíbrio, o trabalho realizado pelas forças internas devido a um deslocamento arbitrário pequeno, imaginário e possível é o mesmo trabalho realizado pelas forças externas:

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad (198)$$

Substituindo as parcelas do trabalho virtual interno ( $\delta U$ ) do elemento de concreto e do elemento de cabo, mostrados respectivamente nas Equações (108) e (171) e a expressão do trabalho virtual externo da Equação (113), na Equação (198) tem-se as equações de equilíbrio na forma matricial:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (199)$$

Onde  $\mathbf{g}$  é a soma dos vetores de forças internas global referentes aos elementos de viga e de cabo e  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas global.

Desse modo, a solução das equações de equilíbrio deve ser realizada através de um processo iterativo, visto que a relação entre o vetor de forças internas ( $\mathbf{g}$ ) e os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ) é não linear.

Para o cálculo do equilíbrio, define-se o vetor resíduo ( $\mathbf{r}$ ), como sendo a diferença entre o vetor de forças internas e o vetor de forças externas, que equivale ao desequilíbrio nodal:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (200)$$

Onde  $\mathbf{q}$  é o vetor de cargas externas de referência e  $\lambda$  é o fator de carga que multiplica este vetor, considerado também como variável ao longo do equilíbrio.

Sendo assim, no equilíbrio, o vetor resíduo deve ser igual a zero. Expandindo a função do resíduo, dada na Equação (200), em uma série de Taylor e tomando somente a parte linear e igualando a zero, tem-se:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0 \quad (201)$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} - \mathbf{q} \delta \lambda = 0 \quad (202)$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} - \mathbf{q} \delta \lambda = 0 \quad (203)$$

Onde  $\mathbf{K}_t$  é a matriz de rigidez tangente.

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \quad (204)$$

Em uma estrutura com  $n$  graus de liberdade, existem inicialmente  $n$  incógnitas, que são os deslocamentos de cada grau de liberdade, e o equilíbrio é representado por um sistema com  $n$  equações para um valor de fator de carga conhecido.

Contudo, para encontrar o caminho de equilíbrio da estrutura, existem  $n + 1$  incógnitas, visto que além dos deslocamentos em cada grau de liberdade, deve-se encontrar o fator de carga correspondente aquela configuração de equilíbrio. Isso possibilita ultrapassar pontos limites da trajetória de equilíbrio.

Desse modo, mais uma equação é necessária para determinar o caminho de equilíbrio da estrutura. Vários métodos são propostos nesse contexto.

Neste modelo, serão utilizados dois métodos para encontrar a raiz da função resíduo, ou seja, o vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ), que representa a configuração de equilíbrio da estrutura, bem como o fator de carga correspondente.

Para a determinação do equilíbrio da estrutura, devido a aplicação apenas da protensão, sem aplicação de carga externa, o Método de Controle de Carga é adotado, visto que o fator de carga ( $\lambda$ ) é fixo e igual a zero.

Após a aplicação da protensão, a carga externa é então aplicada, e o Método do Controle de Deslocamentos é adotado.

Como o processo de solução do equilíbrio é numérico, define-se uma tolerância para convergência. O valor do resíduo deve ainda ser normalizado. Nesse modelo, o resíduo é dividido pelo módulo do vetor de forças externas global ( $\mathbf{f}$ ), a fim de se evitar problemas numéricos de convergência do processo.

## 5.1 Controle de carga (aplicação da protensão)

No Método do Controle de Carga, a equação acrescida ao sistema de  $n$  equações para encontrar o caminho de equilíbrio da estrutura, é o valor do fator de carga ( $\lambda$ ), no caso, igual a zero.

Em geral, se esse método for adotado para encontrar todo o caminho de equilíbrio da estrutura, impõe-se incrementos de carga, que podem ser constantes ou não, em cada passo.

Assim, como o valor do fator de carga é constante em todas as iterações de cada passo, tem-se:

$$\delta\lambda = 0 \tag{205}$$

Substituindo a termo da Equação (205) na Equação (203):

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} = 0 \quad (206)$$

Logo, a equação para encontrar a variação dos deslocamentos ( $\delta \mathbf{u}$ ) em cada iteração é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}_i \quad (207)$$

Com isso, calculam-se os deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ) no final de cada iteração, até que o resíduo se torne suficientemente pequeno:

$$\mathbf{u}_{s+1} = \mathbf{u}_s + \delta \mathbf{u} \quad (208)$$

Onde  $\mathbf{u}_{s+1}$  é o vetor de deslocamentos no passo  $s + 1$

A perda de protensão devido ao encurtamento do concreto no processo numérico descrito é diferente da verificada na prática, que foi descrita no Capítulo 2. No caso do processo numérico, a aplicação da protensão não é feita de modo gradual como se verifica na prática, onde só há perda de protensão no caso da protensão de dois ou mais cabos de protensão na mesma peça. No processo numérico, mesmo para um cabo de protensão, há perda de protensão, visto que a protensão é aplicada em um único instante.

Desse modo, como foi dito no Capítulo 3, a deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) deve ser calculada, de modo que após a aplicação da protensão, a deformação efetiva ( $\varepsilon_{pe}$ ) seja igual a dada no problema. A deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) é sempre superior à deformação efetiva ( $\varepsilon_{pe}$ ), devido à perda de protensão no cabo.

Assim, um processo iterativo simples foi desenvolvido, de modo que, após cerca de cinco iterações, obtém-se a convergência.

Nesse processo, para cada valor estimado da deformação inicial teórica, a deformação efetiva no cabo é calculada, através da solução do equilíbrio da viga através do modelo de elementos finitos, sem aplicação de carga externa, pelo Método do Controle de Carga.

Com isso, calcula-se para dois valores previamente escolhidos de deformação inicial teórica, as respectivas deformações efetivas no cabo pela solução do equilíbrio. A partir de uma interpolação linear, calcula-se a deformação inicial teórica, correspondente a deformação efetiva dada no problema. Com esta deformação inicial teórica, calcula-se a respectiva deformação efetiva pela solução do equilíbrio.

O processo é repetido, excluindo-se sempre a deformação inicial teórica que corresponde a um valor de deformação efetiva mais distante da dada no problema, e calculando-se outra a partir da interpolação linear com as duas restantes, até a convergência, dada uma certa tolerância.

## 5.2 Controle de deslocamentos (aplicação da carga externa)

No Método do Controle de Deslocamentos, proposto inicialmente por Batoz e Dhatt (1979) a equação de restrição é definida como uma função tanto do fator de carga ( $\lambda$ ), quanto dos deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ):

$$a(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (209)$$

Linearizando a equação de restrição:

$$a_{i+1} = a_i + a_{i,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + a_{i,\lambda} \delta \lambda = 0$$

$$a_{i,\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} + a_{i,\lambda} \delta \lambda = -a_i \quad (210)$$

Matricialmente, tem-se função resíduo e a equação de restrição linearizadas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_{i,\mathbf{u}}^T & a_{i,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ a_i \end{bmatrix} \quad (211)$$

A expressão do resíduo pode ser ainda manipulada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} = \mathbf{q} \delta \lambda - \mathbf{r}_i \quad (212)$$

$$\delta \mathbf{u} = \delta \lambda \delta \mathbf{u}_q - \delta \mathbf{u}_r \quad (213)$$

Onde:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{q} \quad (214)$$

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}_r = \mathbf{r} \quad (215)$$

Substituindo a Equação (203) na Equação (210), tem-se:

$$a_{i,\mathbf{u}}^T (\delta \lambda \delta \mathbf{u}_q - \delta \mathbf{u}_r) + a_{i,\lambda} \delta \lambda = -a_i \quad (216)$$

$$\delta \lambda = \frac{a_{i,\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u}_r - a_i}{a_{i,\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u}_q + a_{i,\lambda}} \quad (217)$$

O método do controle de deslocamentos consiste em a fixar determinado valor a uma das componentes do vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ), corresponde ao grau de liberdade escolhido, sendo esse deslocamento incrementado e fixado em cada passo.

Logo, em cada passo, o deslocamento controlado ( $u^j$ ) é incrementado de acordo com a seguinte expressão:

$$u_{s+1}^j = u_s^j + \Delta u_p \quad (218)$$

Onde  $u_{s+1}^j$  é o deslocamento no grau de liberdade  $j$ , no passo  $s + 1$ ,  $u_s^j$  é o deslocamento no grau de liberdade  $j$ , no passo  $s$  e  $\Delta u_p$  é o incremento de deslocamento a cada passo.



A equação de restrição pode ser escrita da seguinte forma:

$$a = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} - u_p = 0 \quad (219)$$

Onde  $\mathbf{e}_j$  é o vetor unitário cujas componentes são todas nulas, exceto a componente controle  $j$  e  $u_p$  é o valor do deslocamento controlado, fixado no início do passo.

Derivando-se a restrição em relação ao vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ) e ao fator de carga ( $\lambda$ ):

$$a_{,u} = \mathbf{e}_j \quad (220)$$

$$a_{,\lambda} = 0 \quad (221)$$

Substituindo as derivadas na Equação (217):

$$\delta\lambda = \frac{\mathbf{e}_j \delta\mathbf{u}_r - a_i}{\mathbf{e}_j \delta\mathbf{u}_q} \quad (222)$$

$$\delta\lambda = \frac{\delta u_r^j - a_i}{\delta u_q^j} \quad (223)$$

Como na primeira iteração, o resíduo é igual a zero,  $\delta u_r = 0$ . Daí:

$$\delta\lambda = \frac{-a_i}{\delta u_q^j} = \frac{u_p - u^j}{\delta u_q^j} = \frac{\Delta u_p}{\delta u_q^j} \quad (224)$$

Assim, como a equação de restrição é linear, o método de Newton-Raphson é exato e a restrição é nula nas demais iterações. Logo, o cálculo do incremento de carga nas demais iterações é feito pela seguinte expressão:

$$\delta\lambda = \frac{\delta u_r^j}{\delta u_q^j} \quad (225)$$

## 6 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

No presente modelo, a não linearidade física será considerada na integração dos esforços resistentes e no cálculo da matriz constitutiva tangente, através do uso de relações tensão-deformação uniaxiais não lineares, para os materiais concreto, aço passivo e aço de protensão. Embora os modelos constitutivos dos materiais sejam não lineares, os materiais são considerados elásticos.

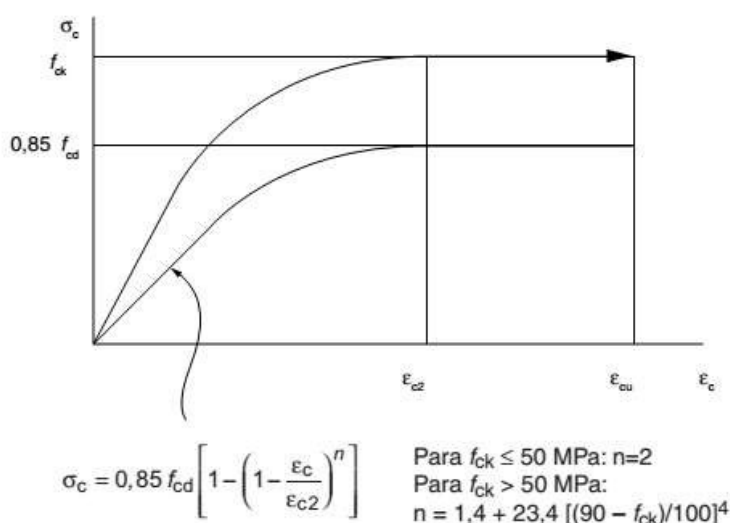
### 6.1 Concreto

Segundo Stramandinoli (2007), o concreto já apresenta microfissuras, mesmo antes de qualquer aplicação de carga, devido à retração e liberação de água, na própria cura do concreto. Essas microfissuras se propagam à medida que o carregamento é aplicado, diminuindo gradativamente a rigidez da peça, conferindo ao concreto um comportamento não linear físico mesmo para baixos níveis de tensão.

Além disso, o concreto tem baixa resistência à tração, quando comparada à resistência da armadura de aço, ou mesmo a sua resistência à compressão.

A NBR 6118 (2014) recomenda o seguinte diagrama de tensão-deformação do concreto sob compressão, como mostra a Figura 23, sendo composto por um trecho ascendente e um trecho constante.

Figura 23 - Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão, segundo NBR 6118 (2014)



Fonte: NBR 6118 (2014)

Segundo a NBR 6118 (2014), os valores a serem adotados para a deformação do concreto sob compressão no início do patamar plástico ( $\varepsilon_{c2}$ ) e a deformação do concreto sob compressão na ruptura ( $\varepsilon_{cu}$ ) são definidos de acordo com a resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ). Assim, tem-se:

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa:

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} \quad (226)$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰} \quad (227)$$

Para  $50 < f_{ck} < 90$ :

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (228)$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \cdot \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (229)$$

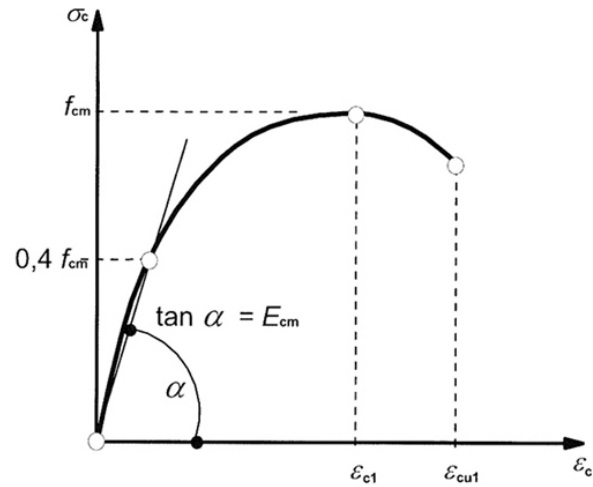
Apesar do diagrama tensão-deformação da NBR 6118:2014, do concreto sob compressão, mais conhecido como parábola-retângulo (no caso de concreto com  $f_{ck}$  menor que 50), ser bastante conhecido e utilizado em projeto, outras normas apresentam um decaimento na curva, após o concreto ter atingido sua resistência máxima, devido ao amolecimento do concreto. São as curvas como, por exemplo: do Eurocode 2:2004, do modelo de Hognestad (1951) e de Carreira e Chu (1985).

Desse modo, o Eurocode 2 (2004) recomenda a seguinte expressão para representa o comportamento físico do concreto em uma análise não linear:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ \frac{\kappa\eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2)\eta} \right] \quad (230)$$

Onde  $f_{cm}$  é a resistência média do concreto à compressão em 28 dias ( $f_{cm} = f_{ck} + 8$  em MPa),  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ , sendo  $\varepsilon_c$  a deformação do concreto e  $\varepsilon_{c1}$  a deformação de pico de tensão ( $\varepsilon_{c1} = 0,7 \cdot f_{cm}^{0,31}$ ) e  $\kappa = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\varepsilon_{c1}| / f_{cm}$ , sendo  $E_{cm} (GPa) = 22[0,1 \cdot f_{cm}]^{0,3}$ .

Figura 24 - Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial



Fonte: Eurocode 2 (2004)

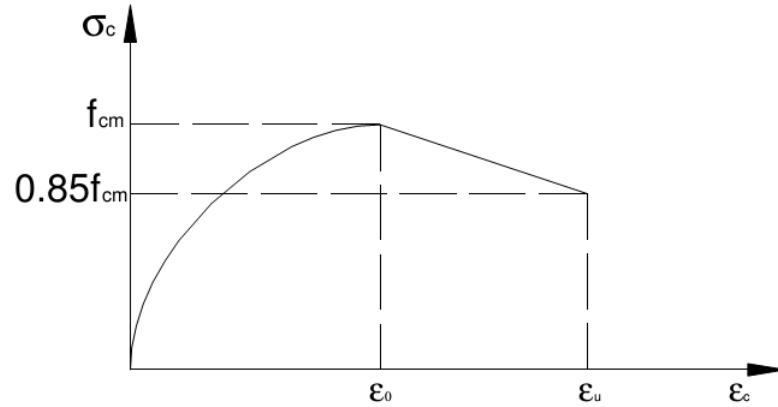
O modelo de Hognestad (1951) apresenta um diagrama de tensão-deformação para o concreto na compressão muito semelhante ao da NBR 6118:2014. O trecho ascendente da curva, que está no intervalo de 0 a  $\varepsilon_c$ , é parabólico, semelhante ao da NBR 6118:2003:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ 2 \cdot \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \rightarrow \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \quad (231)$$

Já o trecho descendente é dado também por reta, mas com inclinação negativa, como mostra a Equação (232):

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ 1 - 0,15 \cdot \left( \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \quad (232)$$

Figura 25 - Modelo constitutivo para o concreto segundo Hognestad (1951)



Fonte: Stramandinoli (2007)

Outro modelo constitutivo apresentado neste trabalho, que também é adotado por diversos autores na literatura, para análise não linear física de estruturas de concreto armado, como Shuraim (1997) e Fonseca (2006), é a lei constitutiva proposta por Carreira e Chu (1985).

Vale ressaltar e pode-se observar pela curva mostrada na Figura 26 que tanto o efeito do amolecimento do concreto na compressão é considerado, quanto o efeito do tension-stiffening.

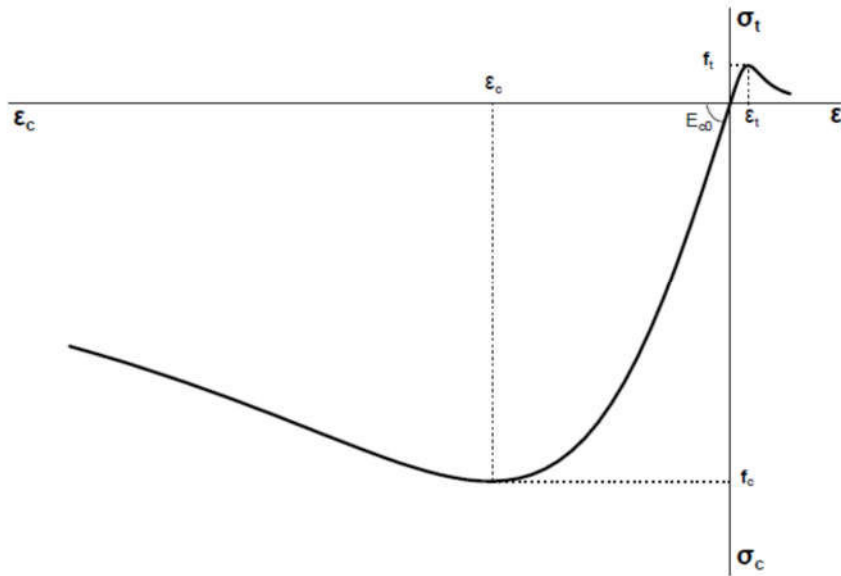
A curva proposta por eles apresenta dois trechos, um que representa o comportamento do material concreto à compressão, dada pela Equação (233) e outro trecho que representa o comportamento à tração, como mostra a Equação (234).

$$\sigma_c = f_c \left[ \frac{k_c \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)}{k_c - 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^{k_c}} \right], k_c = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_c}{\varepsilon_c E_0} \right)} \quad (233)$$

$$\sigma_t = f_t \left[ \frac{k_t \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)}{k_t - 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)^{k_t}} \right], k_t = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_t}{\varepsilon_t E_0} \right)} \quad (234)$$

Onde  $E_0$  é o módulo de elasticidade inicial do concreto,  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto,  $f_t$  é a resistência à tração,  $\varepsilon_c$  é a deformação relativa à tensão máxima de compressão e  $\varepsilon_t$  é a tensão relativa à tensão de tração máxima.

Figura 26 - Modelo constitutivo para o concreto segundo Carreira e Chu (1985)



Fonte: Fonseca (2006)

Zupan e Saje (2005) adotam um modelo constitutivo para o concreto submetido a um estado uniaxial de tensões desenvolvido por Desayi e Krishnan (1964) para o concreto submetido à compressão e Bergan e Holand (1979) para o concreto submetido à tração:

$$\sigma(\varepsilon) = 0 \rightarrow \varepsilon \leq \varepsilon_u \quad (235)$$

$$\sigma(\varepsilon) = 2f_m \cdot |\varepsilon_1| \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \varepsilon_u < \varepsilon \leq \varepsilon_r \quad (236)$$

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_m) \rightarrow \varepsilon_r < \varepsilon \leq \varepsilon_m \quad (237)$$

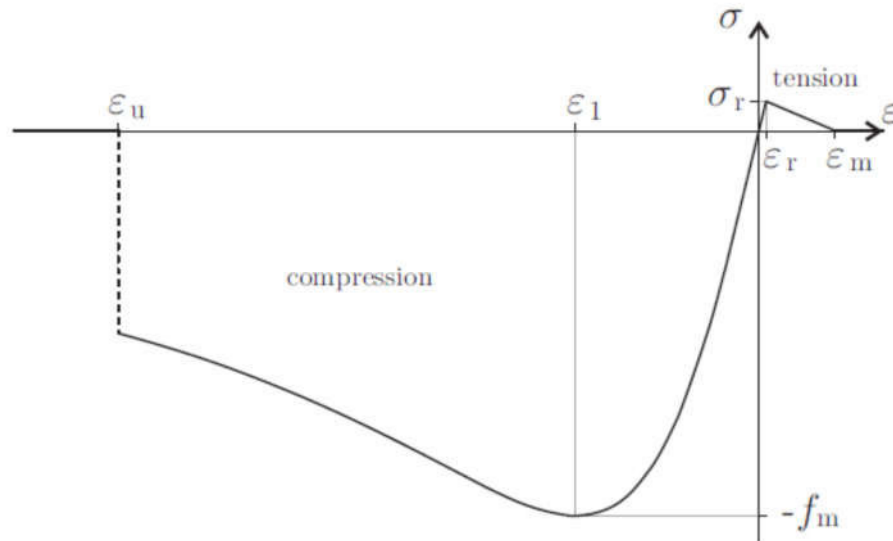
$$\sigma(\varepsilon) = 0 \rightarrow \varepsilon_m \leq \varepsilon \quad (238)$$

Sendo  $\sigma_r$  a resistência do concreto à tração:

$$\sigma_r = 2f_m \cdot |\varepsilon_1| \cdot \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} \quad (239)$$

Onde  $f_m$  é a resistência do concreto à compressão ( $f_m = |\sigma_{min}|$ ),  $\varepsilon_1$  é a deformação correspondente a  $f_m$ ,  $\varepsilon_u$  é a deformação última do concreto à compressão,  $\varepsilon_r$  é a deformação correspondente à resistência do concreto à tração e  $\varepsilon_m$  é a deformação última do concreto à tração.

Figura 27 - Modelo constitutivo do concreto adotado por Zupan e Saje (2005)



Fonte: Zupan e Saje (2005)

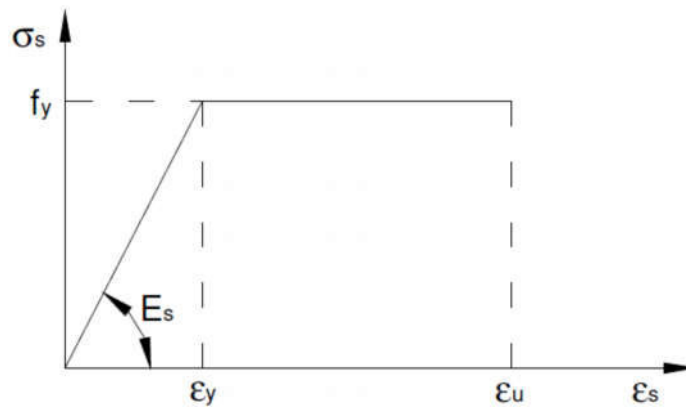
Segundo Zupan e Saje (2005), existem valores para  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_m$  testados empiricamente, que são usualmente utilizados e apresentam uma boa aproximação. Esses valores são dados por:  $\varepsilon_r = 5,5 \cdot 10^{-5}$  e  $\varepsilon_m = 7 \cdot 10^{-4}$ .

## 6.2 Aço de armadura passiva

O aço de armadura passiva possui comportamento normalmente similar na compressão e na tração e por ser um material homogêneo e isotrópico, pode ser modelado com relação tensão deformação linear, até atingir o patamar de escoamento. Após o escoamento, em geral, o material aço sofre um fenômeno chamado encruamento, onde a estrutura cristalina é modificada, dando um ganho de rigidez à peça.

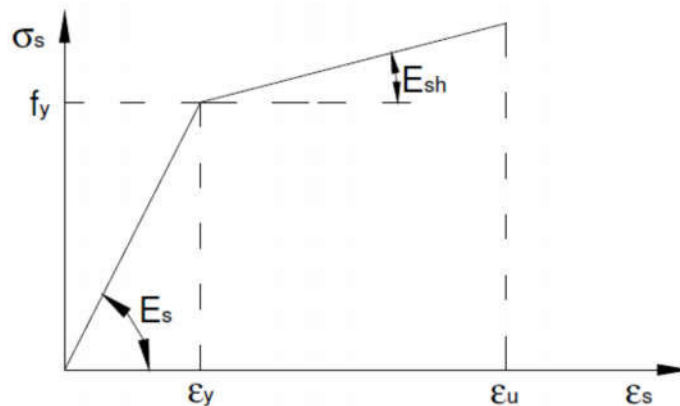
Desse modo, o material aço passivo pode ser modelado como elasto-plástico perfeito, ou elasto-plástico perfeito com endurecimento linear, ou ainda a partir de um modelo trilinear, como mostram as figuras abaixo.

Figura 28 - Modelo elasto-plástico perfeito



Fonte: Stramandinoli (2007)

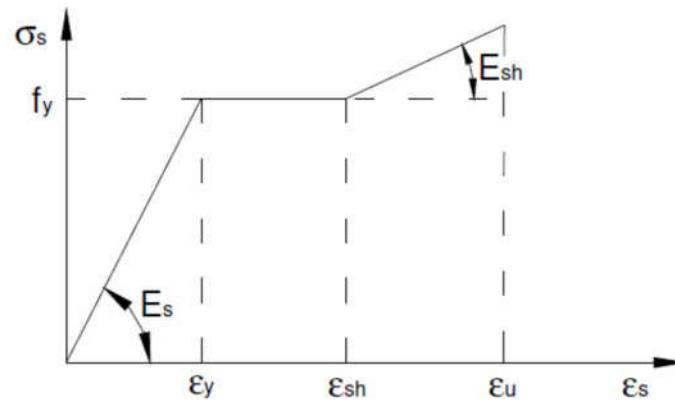
Figura 29 - Modelo elasto-plástico com endurecimento linear



Fonte: Stramandinoli (2007)



Figura 30 - Modelo trilinear



Fonte: Stramandinoli (2007)

### 6.3 Aço de protensão

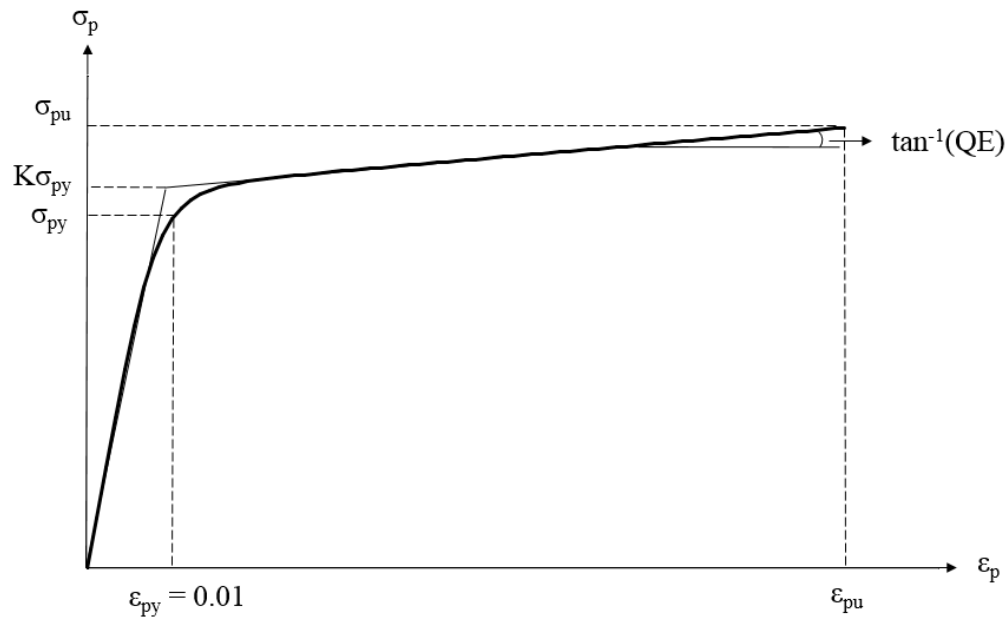
O aço de protensão é definido por um trecho inicial linear elástico, um segundo trecho na proximidade do escoamento do aço, onde o material vai perdendo gradativamente rigidez e um terceiro trecho novamente linear, onde o material apresenta uma pequena rigidez e escoam até a ruptura.

Menegotto e Pinto (1973) propuseram uma equação que representa bem esse comportamento do aço de protensão:

$$\sigma_p = \varepsilon_p E_p \left\{ Q + \frac{1-Q}{\left[ 1 + (\varepsilon_p E_p / K \sigma_{py})^R \right]^{1/R}} \right\} \leq \sigma_{pu} \quad (240)$$

onde  $\sigma_p$  é a tensão no aço de protensão,  $\varepsilon_p$  é a deformação no aço de protensão,  $E_p$  é o módulo de elasticidade inicial do aço de protensão,  $\sigma_{py}$  é a tensão de escoamento do aço de protensão, definida pela tensão corresponde à deformação de 0.01,  $\sigma_{pu}$  é a tensão última do aço de protensão e  $K$ ,  $Q$  e  $R$  são coeficientes adimensionais que podem ser encontrados, a fim de aproximar a curva a resultados experimentais.

Figura 31 - Diagrama tensão-deformação do aço de protensão, segundo Menegotto e Pinto (1973)



Fonte: Próprio autor

Utilizando uma simples relação trigonométrica, o coeficiente  $Q$  pode ser expresso por:

$$Q = \frac{\sigma_{pu} - K\sigma_{py}}{\epsilon_{pu} - K\sigma_{py}} \quad (241)$$

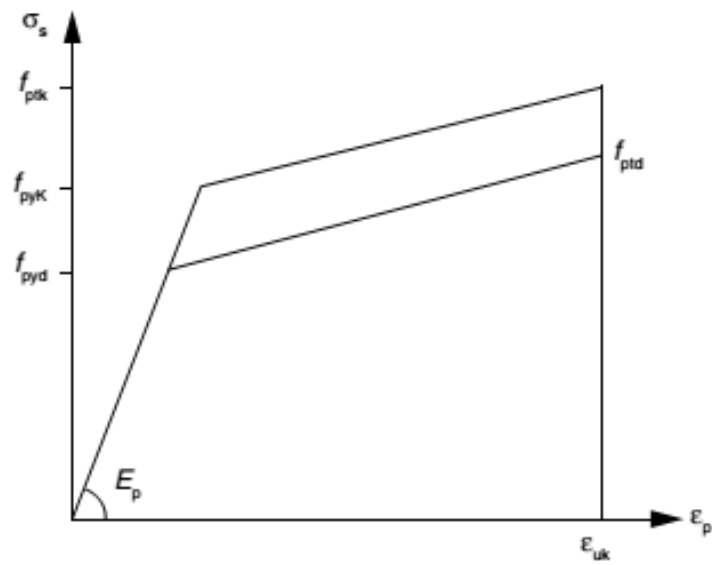
O coeficiente  $R$  pode ser determinado a partir de um processo iterativo, utilizando a Equação (240), com a condição de que a tensão no aço de protensão ( $\sigma_p$ ) deve ser igual à tensão de escoamento ( $\sigma_{py}$ ) para deformação de 0,01, ou seja:

$$\sigma_p(\epsilon_p = 0,01) = \sigma_{py} \quad (242)$$

O coeficiente  $K$  pode ser determinado caso se tenha uma curva experimental do aço de protensão, a fim de aproximar a curva experimental a curva teórica. Segundo Mattock (1979), para cordoalhas de sete fios, adotando valor de  $K = 1.04$ , a expressão apresenta em geral boa concordância com resultados experimentais.

A NBR 6118 (2014) recomenda o diagrama de tensão-deformação do aço de protensão, sendo composto por dois trechos lineares, como mostra a Figura 32. O diagrama bi linear proposto pela norma é simplificado, visto que o mesmo não representa a principal característica que o diferencia do aço de armadura passiva, que é o fato de não possuir patamar de escoamento definido.

Figura 32 - Diagrama tensão-deformado recomendado pela NBR 6118 (2014)



Fonte: NBR 6118 (2014)

## 7 EXEMPLOS

Neste capítulo, resultados de ensaios experimentais disponíveis na literatura de vigas de concreto com protensão não aderente são comparados com os resultados numéricos obtidos através do modelo de elementos finitos apresentado, a fim de validar a formulação proposta.

### 7.1 Viga de concreto armado Burns e Siess (1962)

O primeiro exemplo é a viga bi apoiada de concreto armado, fletida em três pontos, J4 ensaiada por Burns e Siess (1962). Esse exemplo foi escolhido a fim de verificar a formulação do elemento finito de pórtico plano, que representa a estrutura de concreto, com as armaduras passivas.

A viga possui um vão de 3.66 m, com uma carga concentrada aplicada no centro do vão. A seção da viga é retangular, com 20.3 cm de largura e 50.8 cm de altura, tendo uma área de aço de armadura positiva igual a 10.22 cm<sup>2</sup>. A distância da face inferior da viga à armadura longitudinal positiva é igual a 5.08 cm.

A viga ensaia por Burns e Siess (1962) foi modelada através de uma malha de 10 elementos de pórtico plano. Na integração longitudinal, foi utilizada a quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. Na integração transversal, a seção transversal foi discretizada com 50 fatias.

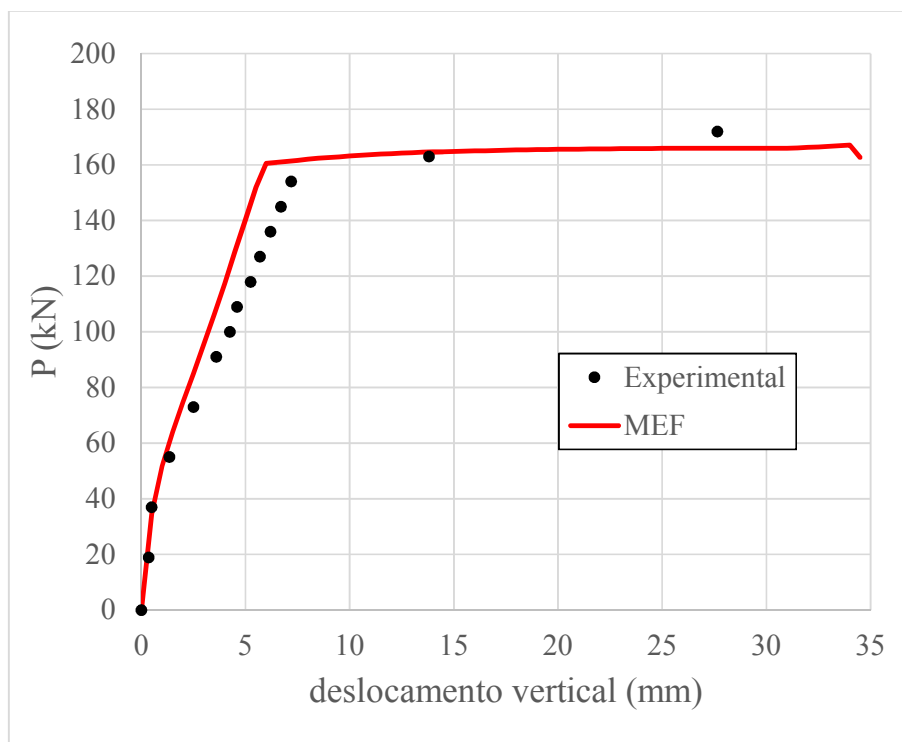
Na análise não linear, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de 0.5 mm para o deslocamento vertical no centro da viga, com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-5}$ .

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o proposto por Zupan e Saje (2005). Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios próprios feitos por Burns (1962). Os valores dos parâmetros do concreto disponíveis pelo autor foram:  $f_{cm} = 33.24$  Mpa,  $f_{ct} = 2.39$  MPa. A deformação de pico do concreto ( $\epsilon_{c1}$ ) foi estimada, segundo Eurocode 2:2004, sendo igual a 2.074‰. A deformação última à compressão, a deformação de pico à tração e a deformação última à tração do concreto foram adotados sendo, respectivamente:  $\epsilon_{cu} = 3.5$  ‰,  $\epsilon_r = 5,5 \cdot 10^{-5}$  e  $\epsilon_m = 7 \cdot 10^{-4}$ .

Para o material aço foi adotado o modelo trilinear com endurecimento, baseado nos valores fornecidos por Burns e Siess (1962) com uma deformação de escoamento ( $\epsilon_y$ ) de 1.52% e uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 309.57 MPa, com o módulo de elasticidade

longitudinal de 203.66 GPa, uma deformação de endurecimento ( $\epsilon_{sh}$ ) igual a 18.6%, uma deformação última de 150% e com uma tensão última de 489.53 MPa.

Figura 33 - Curva de equilíbrio da viga de Burns (1962)



Fonte: Próprio autor

Analisando o resultado obtido da análise do modelo e comparando-se com o resultado obtido experimentalmente, nota-se que o modelo representou de maneira satisfatória todo o caminho de equilíbrio da estrutura, com uma pequena diferença entre as curvas entre 60 e 160 kN.

Essa diferença entre as curvas pode ser justificada pelo fato da teoria de Euler-Bernoulli desprezar o efeito do cortante e a viga desse exemplo ser curta e o carregamento aplicado gerar esforço cortante em todo a peça.

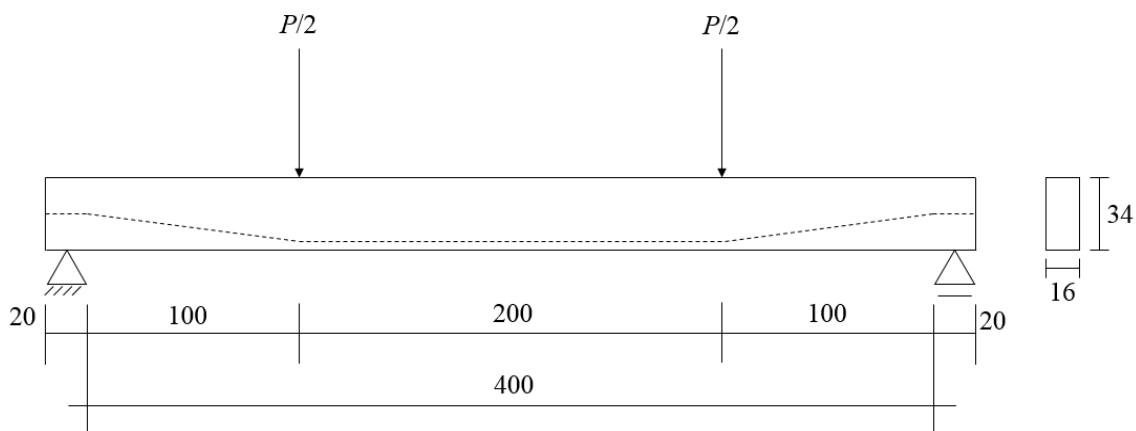
O pico de carga do modelo (= 167.1 kN) foi um pouco inferior ao do ensaio (172 kN) e o deslocamento máximo do modelo (34 mm) foi superior ao verificado em laboratório (28 mm).

## 7.2 Viga com protensão interna de Hussien et al (2012)

O segundo exemplo é de uma viga com protensão interna não aderente ensaiada por Hussien et al. (2012). A viga B7, que é uma viga bi apoiada fletida em quatro pontos, foi modelada, a fim de comparação com os resultados experimentais encontrados pelos autores.

A seção da viga é retangular, com 16 cm de largura e 34 cm de altura. A armadura positiva e negativa tem a mesma área, sendo igual a 1.57 cm<sup>2</sup>. A distância da face da viga ao centro da armadura passiva é igual a 4.0 cm e ao centro da armadura ativa é igual a 4.3 cm. A armadura ativa tem área de 0.99 cm<sup>2</sup>. O traçado do cabo de protensão é semelhante ao diagrama de momentos devido à carga externa, tendo uma excentricidade no trecho reto de 12.7 cm. A tensão efetiva no cabo ( $\sigma_{pe}$ ) após a aplicação da protensão e perdas é dada igual a 1000 MPa.

Figura 34 - Detalhe do carregamento e do perfil do cabo da viga B7 de Hussien et al (2012). (unidades em cm)



Fonte: Próprio autor

A viga foi modelada utilizando-se 12 elementos de viga e 12 elementos de cabo, tendo os mesmos nós correspondentes. Na integração longitudinal, foi utilizada a quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. Na integração transversal, a seção transversal foi discretizada com 50 fatias.

Na análise não linear, adotou-se o método do controle de deslocamentos, com um incremento de 1 mm no deslocamento vertical do nó central por passo, com tolerância para convergência do equilíbrio de  $1 \times 10^{-5}$ .

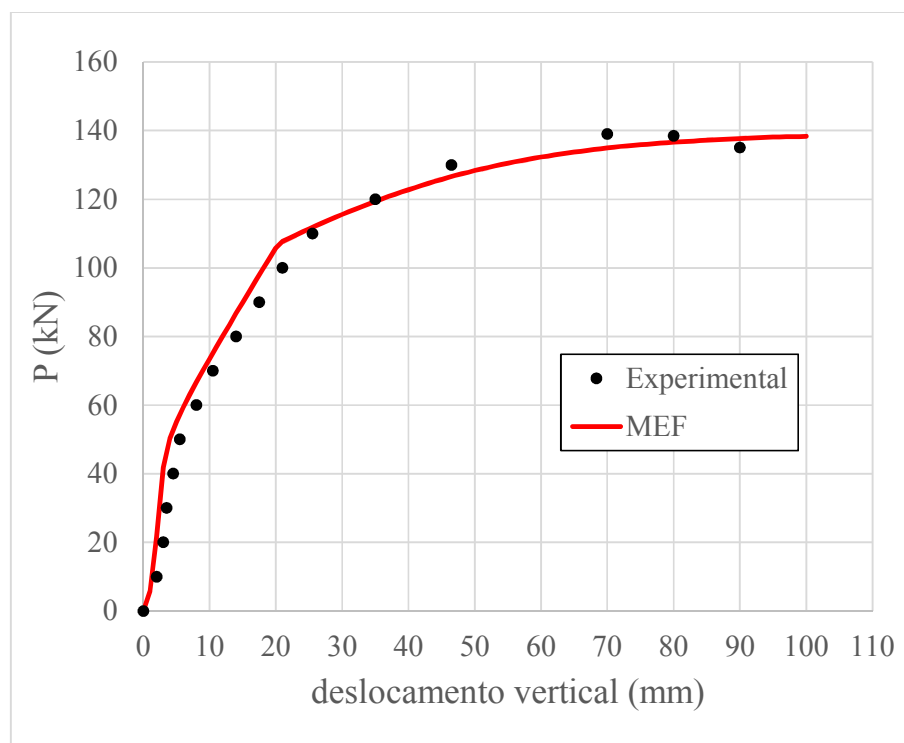
O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o proposto por Zupan e Saje (2005). Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Tao e Du (1985), sendo o único parâmetro mensurado a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ),

igual a 43 MPa. A deformação de pico do concreto ( $\epsilon_{cl}$ ) foi estimada, segundo Eurocode 2 (2004), sendo igual a 2.246‰. A deformação última à compressão, a deformação de pico à tração e a deformação última à tração do concreto foram adotados sendo, respectivamente:  $\epsilon_{cu} = 3.1 \text{ ‰}$ ,  $\epsilon_r = 1,0 \cdot 10^{-5}$   $\epsilon_m = 4 \cdot 10^{-4}$ .

Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico perfeito, com endurecimento linear, com uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 470 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 210 GPa, módulo de elasticidade de endurecimento ( $E_{sh}$ ) de 1.2 GPa e deformação última de 12%, sendo os dois últimos parâmetros adotados.

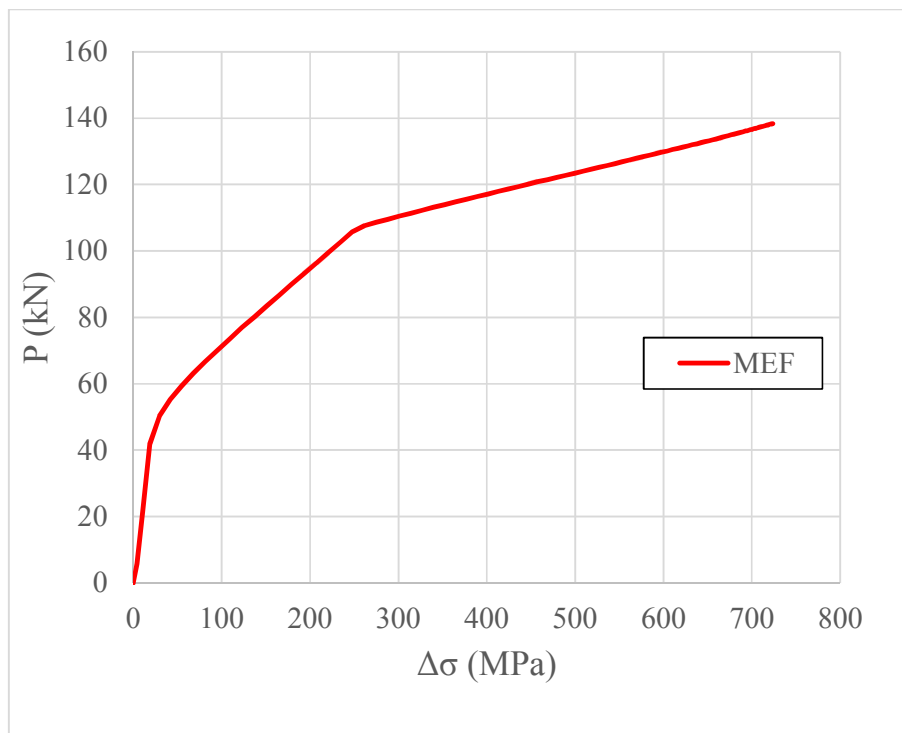
O aço de protensão desse exemplo apresenta tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 1674 MPa, tensão última ( $f_u$ ) igual a 1860 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 195 GPa, deformação última de 6% e coeficiente  $K = 1.04$ , sendo os últimos três valores adotados.

Figura 35 - Curva de equilíbrio da viga B7 ensaiada por Hussien et al. (2012)



Fonte: Próprio autor

Figura 36 - Incremento de tensão no cabo da viga B7 de Hussien et al (2012)



Fonte: Próprio autor

Os resultados apresentados pelo modelo em comparação com os apresentados por Hussien et al. (2012) foram muito bons. O modelo apresentou um comportamento ligeiramente mais rígido que o observado em laboratório e o pico de carga do modelo (138.4 kN) foi similar ao observado no experimento (=138.5 kN), embora o modelo tenha apresentado um comportamento mais dúctil, com um deslocamento máximo igual a 100mm, superior ao do ensaio, que foi igual a 90 mm.

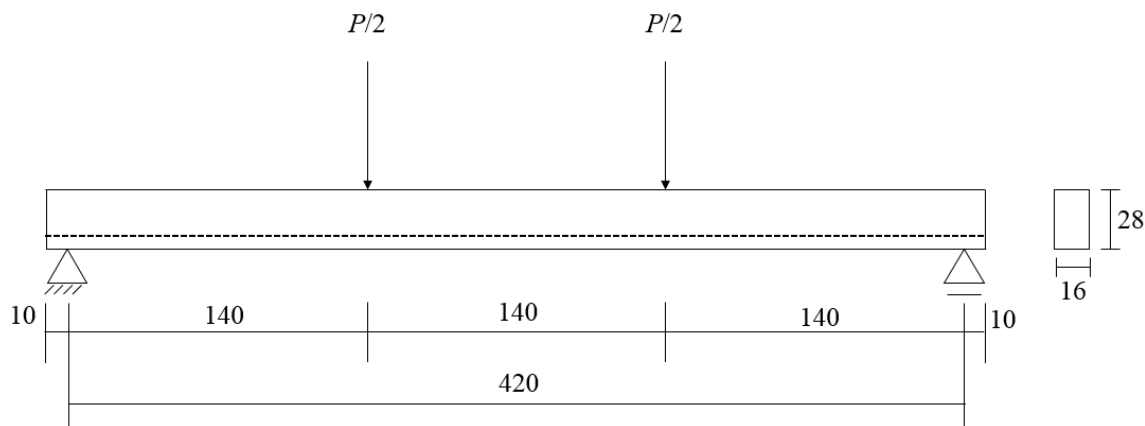
### 7.3 Vigas com protensão interna de Tao e Du (1985)

Tao e Du (1985) apresentam resultados experimentais de ensaios de protótipos de vigas de concreto com protensão interna não aderente. Todas as vigas ensaiadas são bi apoiadas, com 4,20 metros de vão e fletidas em quatro pontos. As vigas modeladas nesse artigo foram as nove vigas do Grupo A.

As seções das vigas são todas retangulares, com 16 cm de largura e 28 cm de altura. A altura útil da armadura passiva positiva ( $d_s$ ) é igual a 25.0 cm. O traçado do cabo de protensão é reto e a altura útil da armadura de protensão ( $d_p$ ) é igual a 22.0 cm. Não há armadura negativa.



Figura 37 - Detalhe do carregamento e do perfil do cabo das vigas do Grupo A de Tao e Du (1985) (unidades em cm)



A viga foi modelada utilizando-se 12 elementos de viga e 12 elementos de cabo, tendo os mesmos nós correspondentes. Na análise não linear, adotou-se o método do controle de deslocamentos, com um incremento de 1 mm no deslocamento vertical do nó central por passo, com tolerância para convergência do equilíbrio de  $1 \times 10^{-5}$ . Na integração longitudinal, foi utilizada a quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. Na integração transversal, a seção transversal foi discretizada com 50 fatias.

Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Tao e Du (1985), sendo o único parâmetro mensurado a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), cujos valores estão mostrados na Tabela 7. Os demais parâmetros do concreto necessários para representação do modelo constitutivo foram estimados, segundo o Eurocode 2 (2004).

Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico, com endurecimento linear, com uma tensão de escoamento ( $f_y$ ), dados por Tao e Du, conforme mostra a Tabela 7. Já o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade de endurecimento ( $E_{sh}$ ) e a deformação última foram adotados iguais a 210 GPa, 1.2 GPa e 12%, respectivamente.

O aço de protensão foi modelado conforme a equação proposta por Menegotto e Pinto (1973), sendo os parâmetros tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 1465 MPa, tensão de última ( $f_u$ ) igual a 1790 MPa e módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa, dados apresentados por Tao e Du (1985). Já a deformação última do aço de protensão ( $\epsilon_{pu}$ ) e o coeficiente  $K$  foram adotados iguais a 6% e a 1.04, respectivamente.

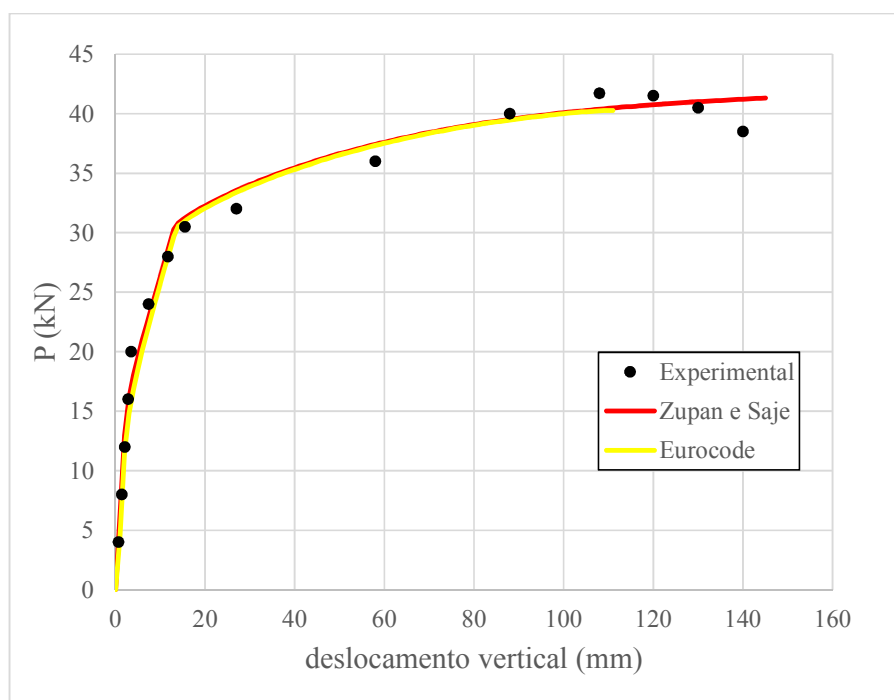
Os demais parâmetros dos ensaios estão mostrados também na Tabela 7.

Tabela 7 - Parâmetros mensurados das vigas de Tao e Du (1985)

Viga	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_p$ (cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{pe}$ (MPa)
A1	30.6	267	1.57	0.588	960
A2	30.6	430	1.57	0.98	904
A3	30.6	430	2.36	1.568	820
A4	30.6	430	1.57	0.588	869
A5	30.6	400	3.08	0.784	810
A6	30.6	400	4.62	1.568	854
A7	30.6	400	3.08	0.392	885
A8	33.1	400	4.62	0.588	894
A9	33.1	395	8.04	1.568	920

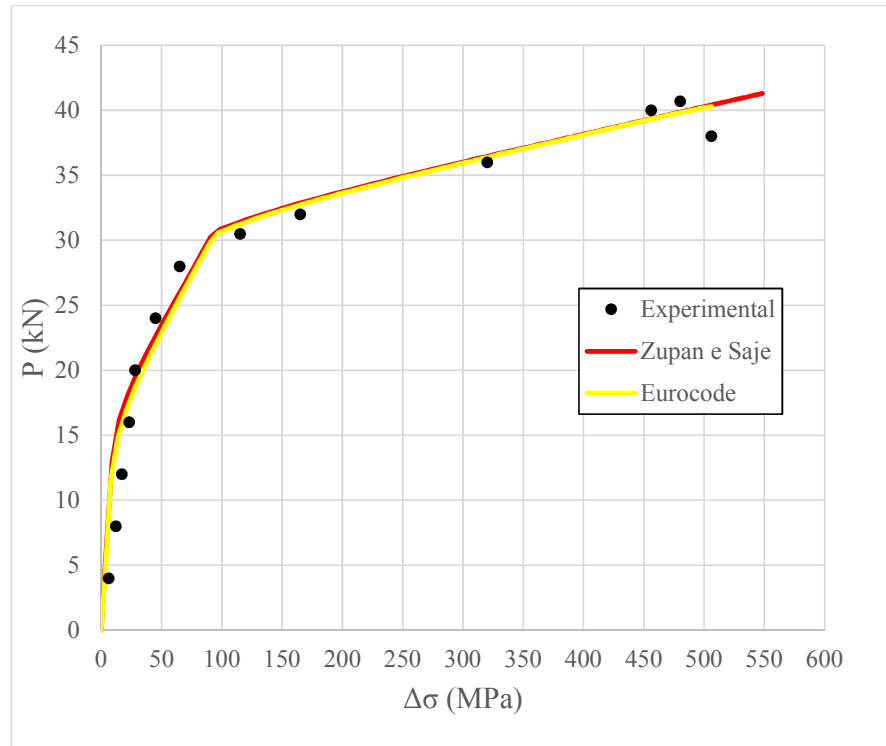
Fonte: Adaptado de Tao e Du (1985)

Figura 38 - Curva de equilíbrio da viga A1 de Tao e Du (1985)



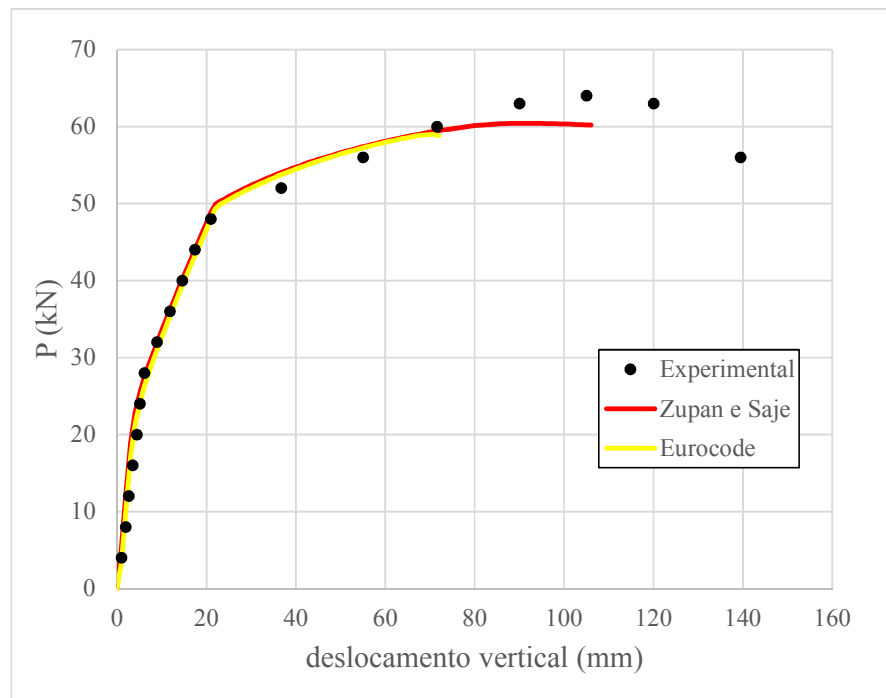
Fonte: Próprio autor

Figura 39 - Incremento de tensão no cabo da viga A1 de Tao e Du (1985)



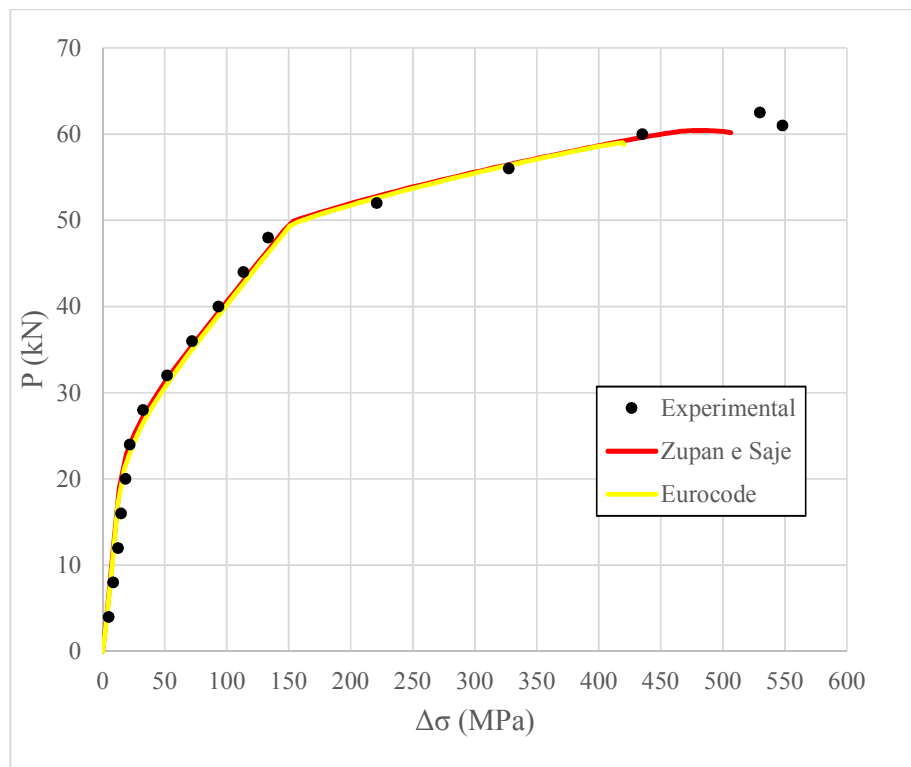
Fonte: Próprio autor

Figura 40 - Curva de equilíbrio da viga A2 de Tao e Du (1985)



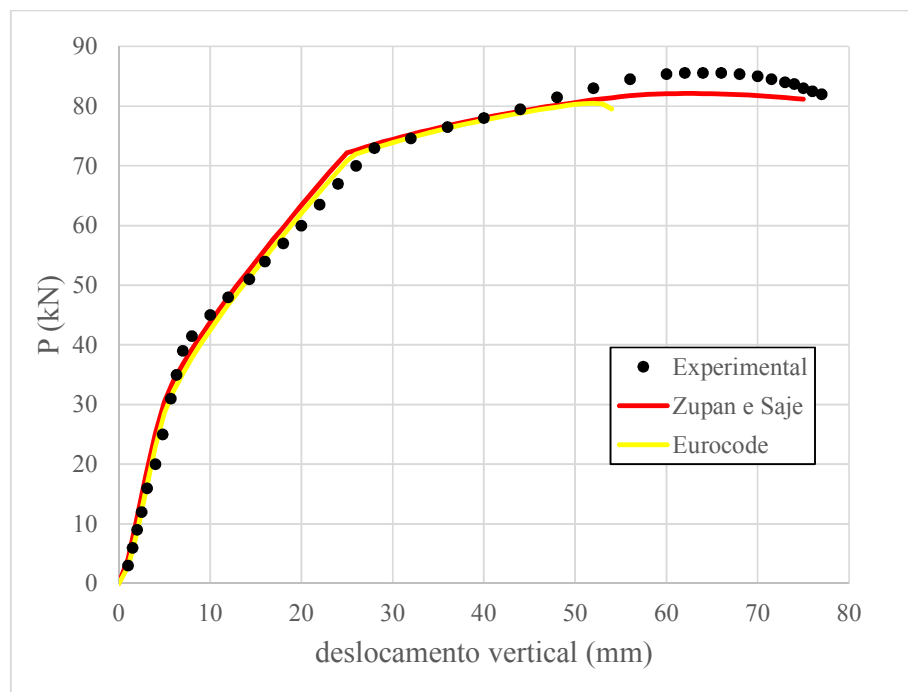
Fonte: Próprio autor

Figura 41 – Incremento de tensão no cabo da viga A2 de Tao e Du (1985)



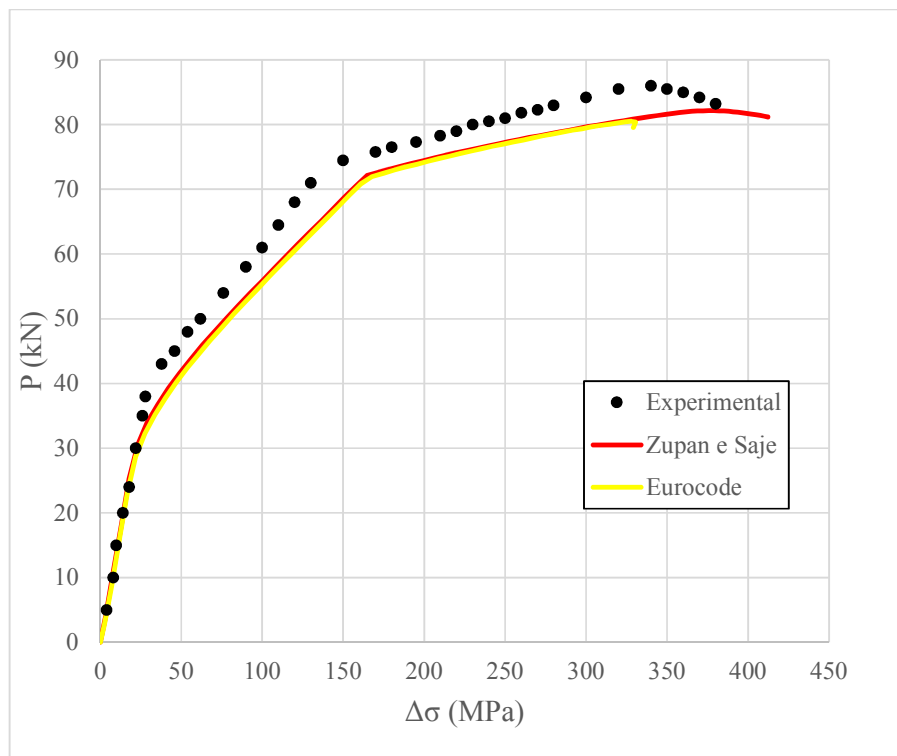
Fonte: Próprio autor

Figura 42 - Curva de equilíbrio da viga A3 de Tao e Du (1985)



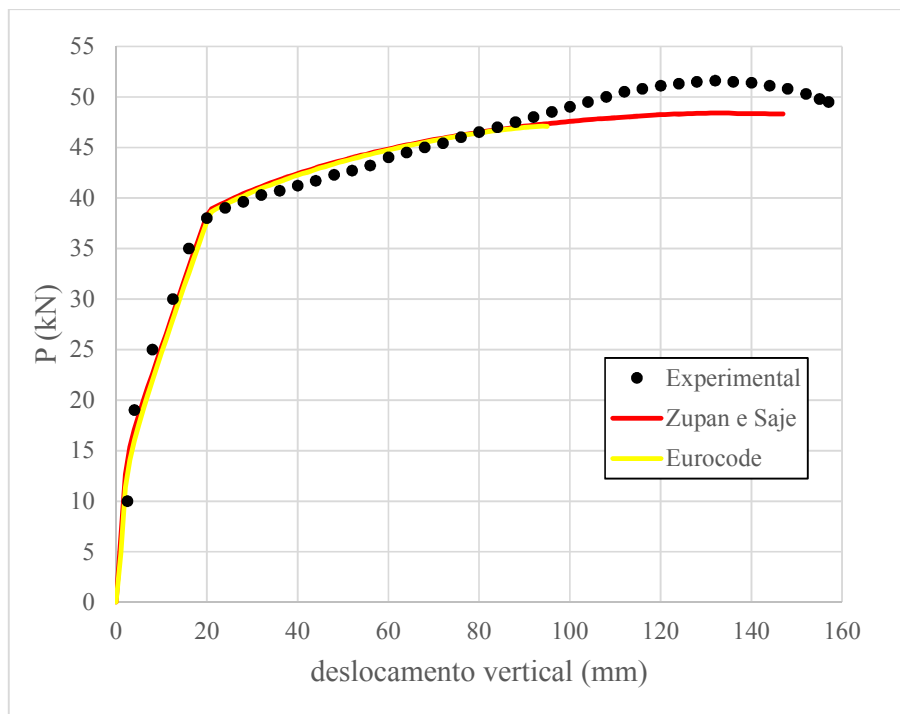
Fonte: Próprio autor

Figura 43 - Incremento de tensão no cabo da viga A3 de Tao e Du (1985)



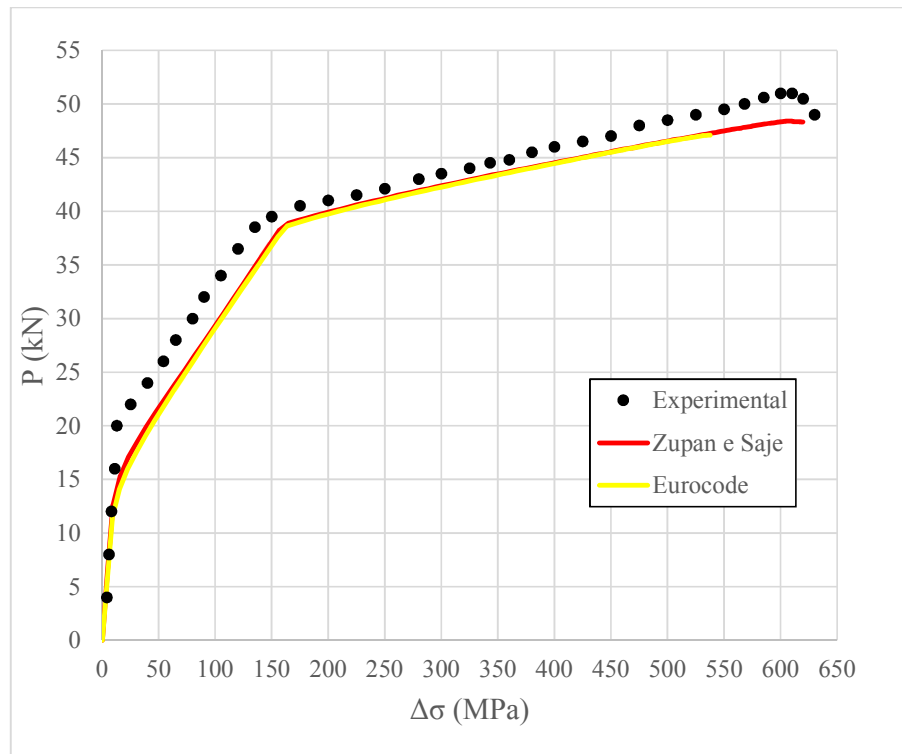
Fonte: Próprio autor

Figura 44 - Curva de equilíbrio da viga A4 de Tao e Du (1985)



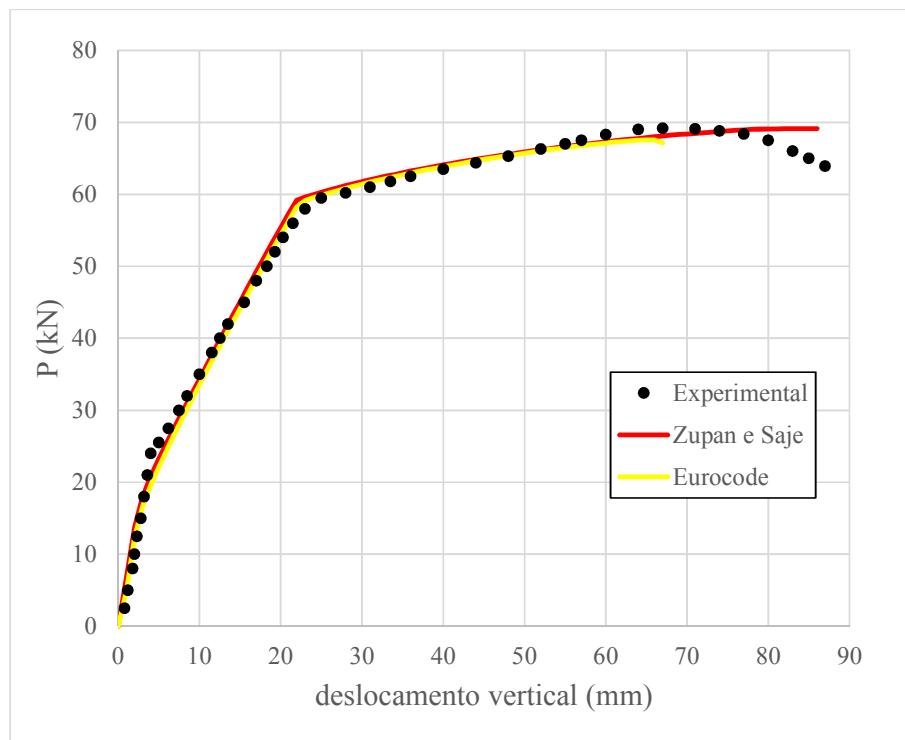
Fonte: Próprio autor

Figura 45 - Incremento de tensão no cabo da viga A4 de Tao e Du (1985)



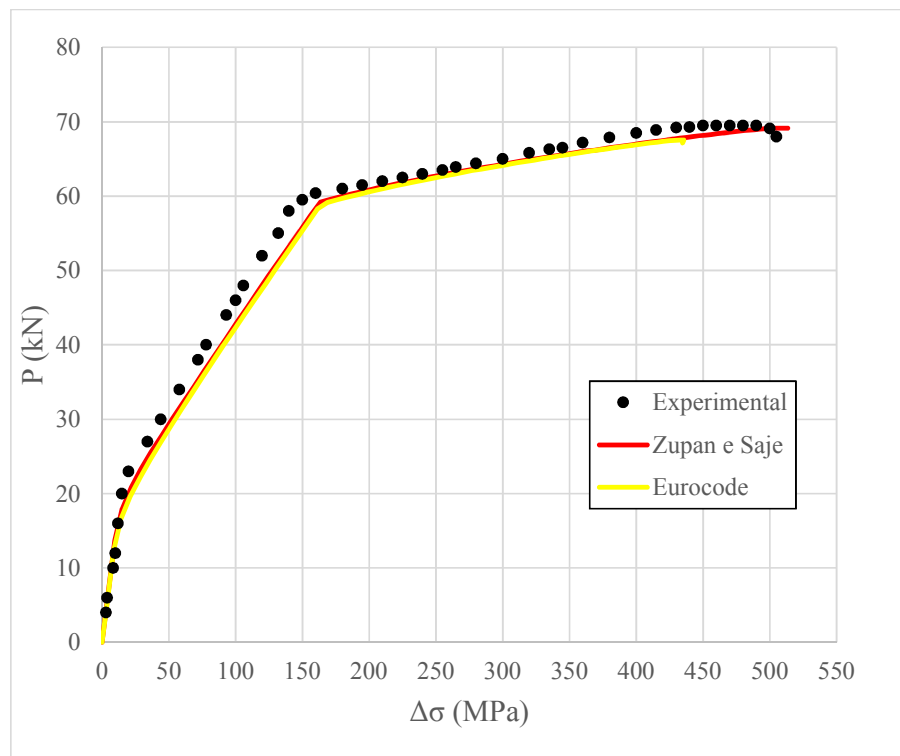
Fonte: Próprio autor

Figura 46 - Curva de equilíbrio da viga A5 de Tao e Du (1985)



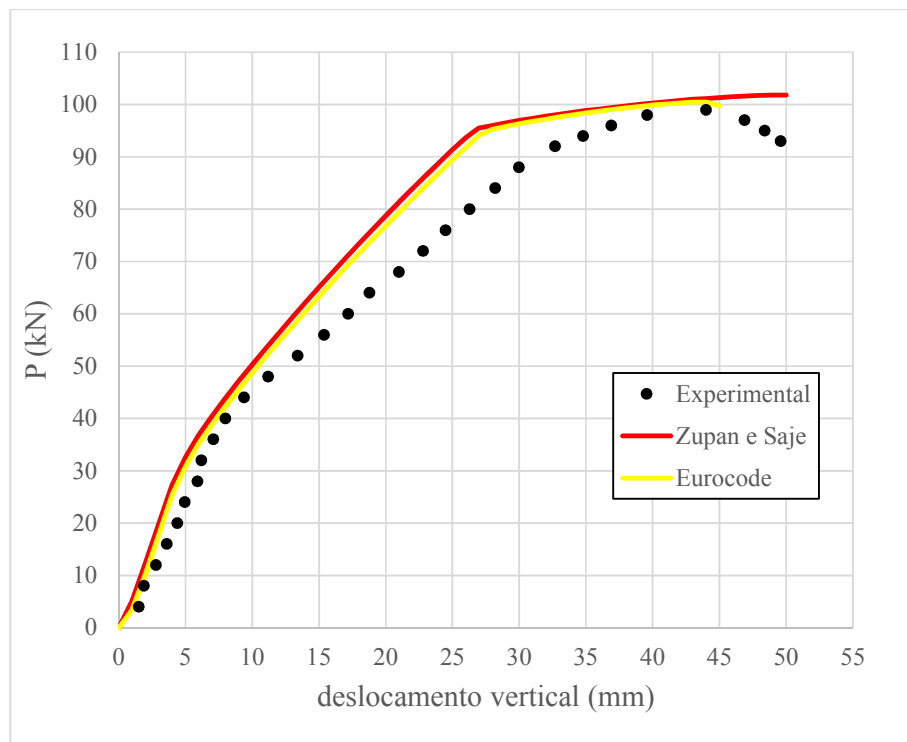
Fonte: Próprio autor

Figura 47 - Incremento de tensão no cabo da viga A5 de Tao e Du (1985)



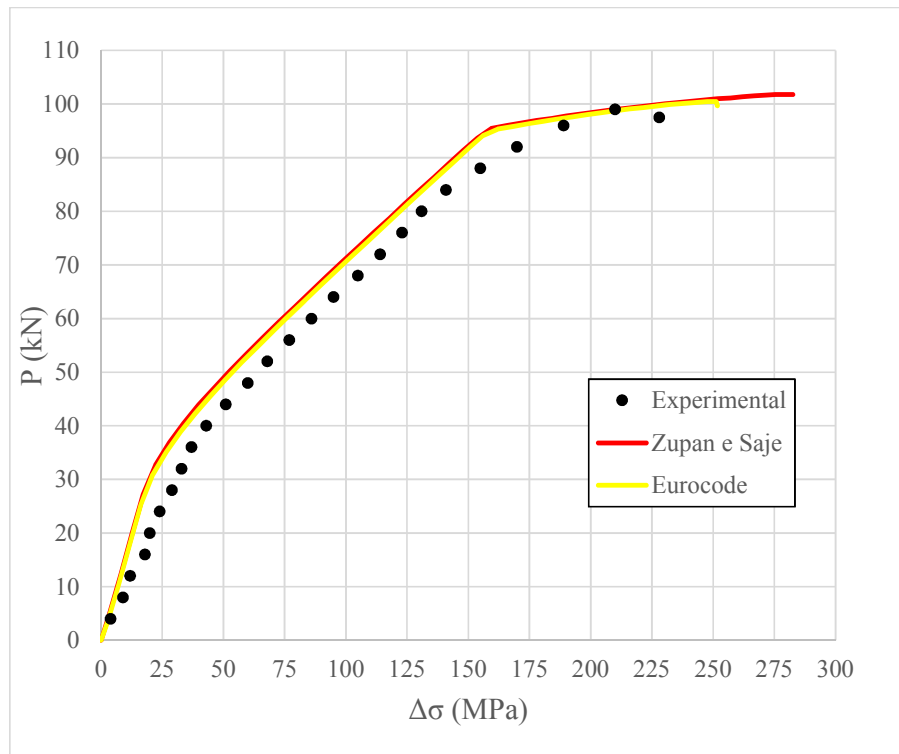
Fonte: Próprio autor

Figura 48 - Curva de equilíbrio da viga A6 de Tao e Du (1985)



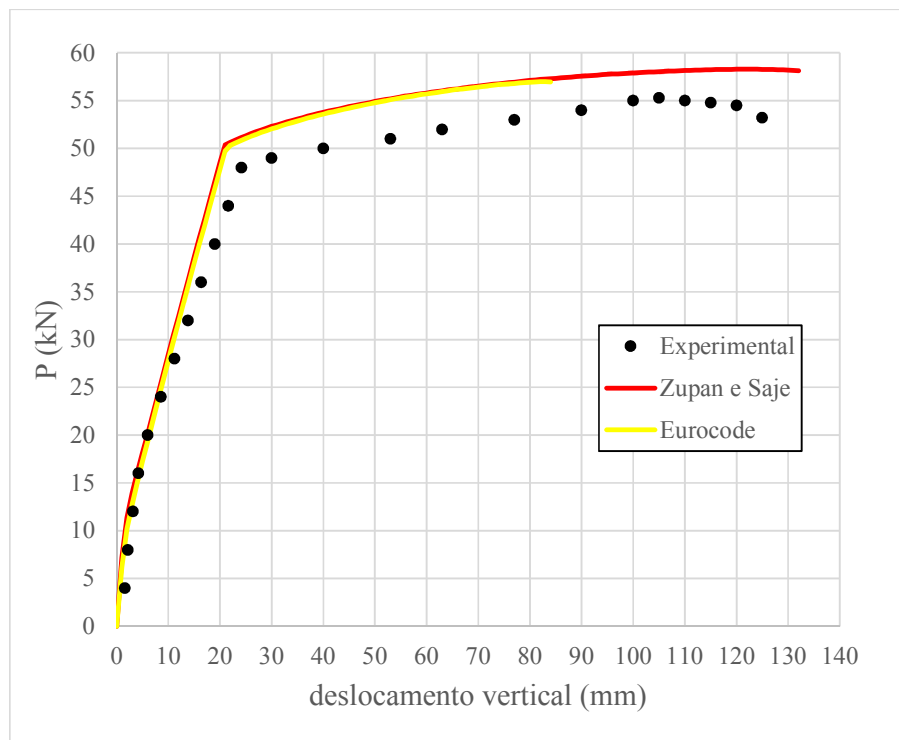
Fonte: Próprio autor

Figura 49 - Incremento de tensão no cabo da viga A6 de Tao e Du (1985)



Fonte: Próprio autor

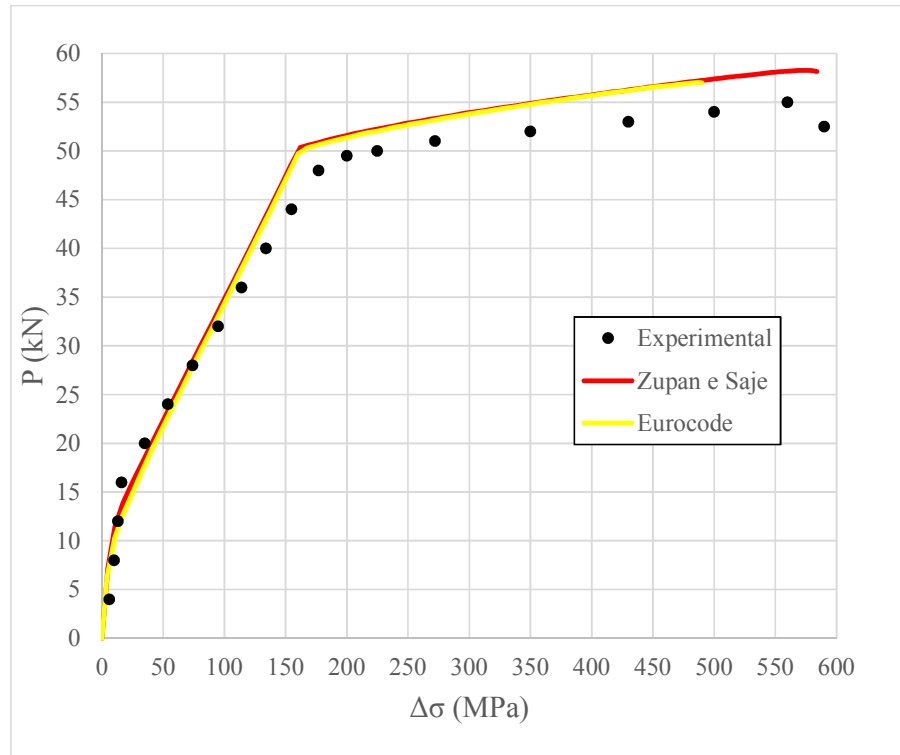
Figura 50 - Curva de equilíbrio da viga A7 de Tao e Du (1985)



Fonte: Próprio autor

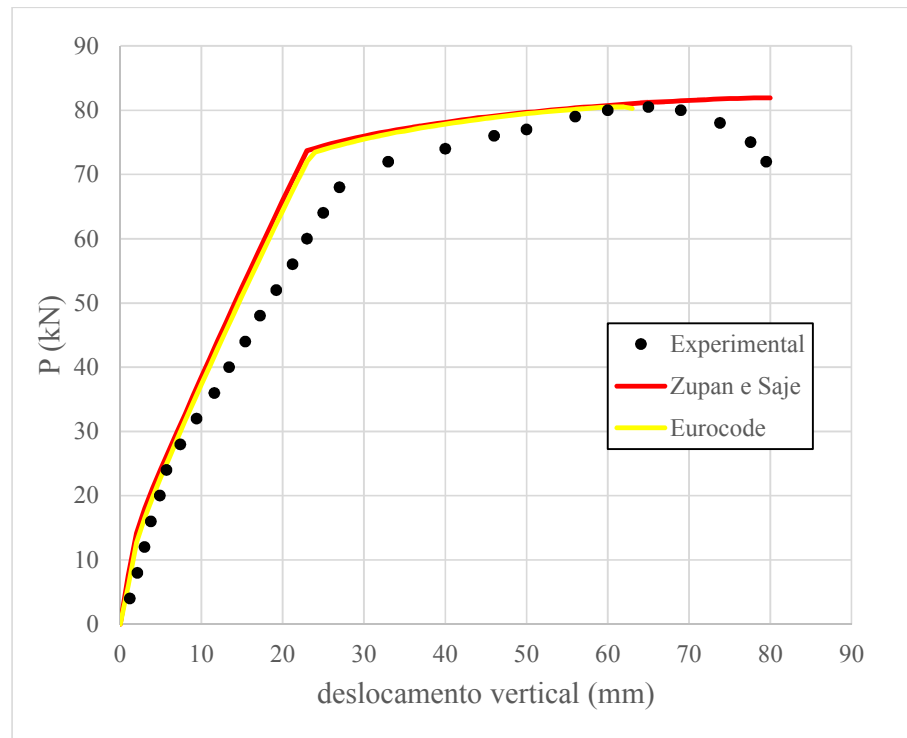


Figura 51 - Incremento de tensão no cabo da viga A7 de Tao e Du (1985)



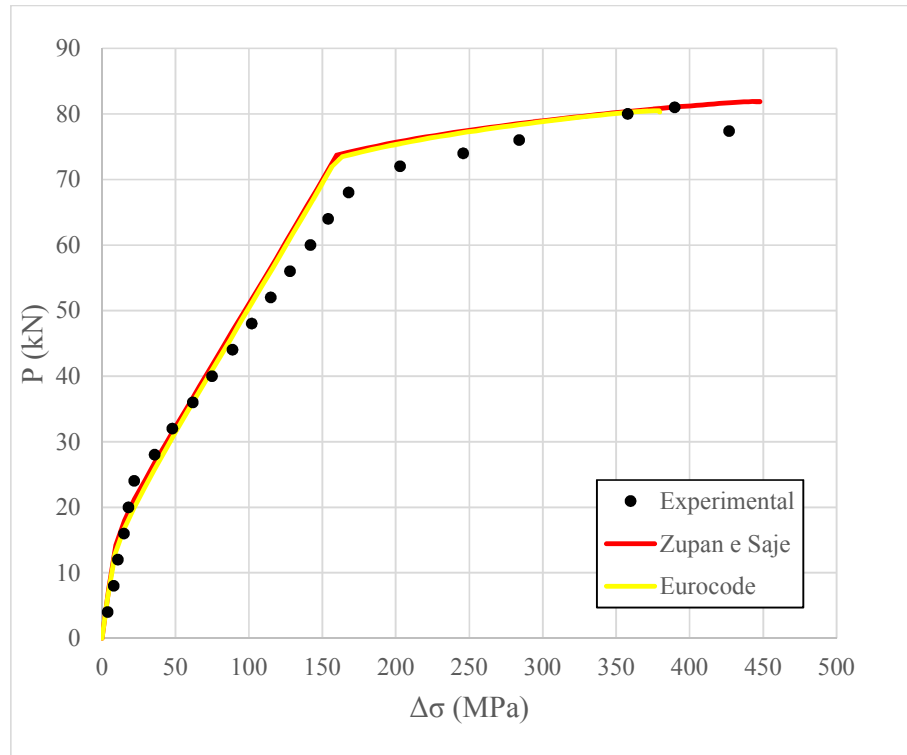
Fonte: Próprio autor

Figura 52 - Curva de equilíbrio da viga A8 de Tao e Du (1985)



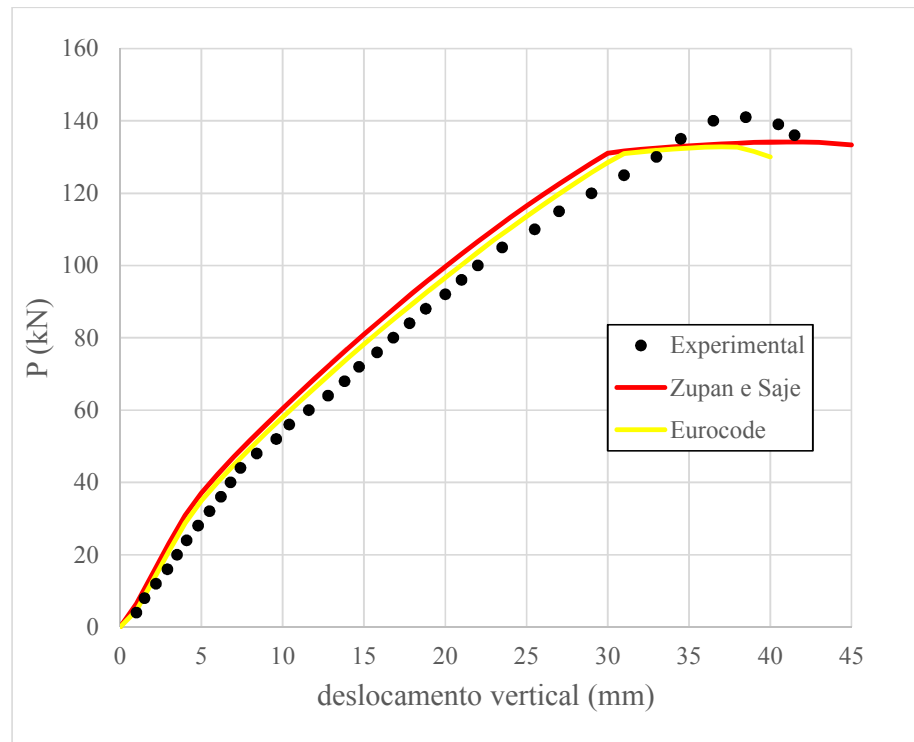
Fonte: Próprio autor

Figura 53 - Incremento de tensão no cabo da viga A8 de Tao e Du (1985)



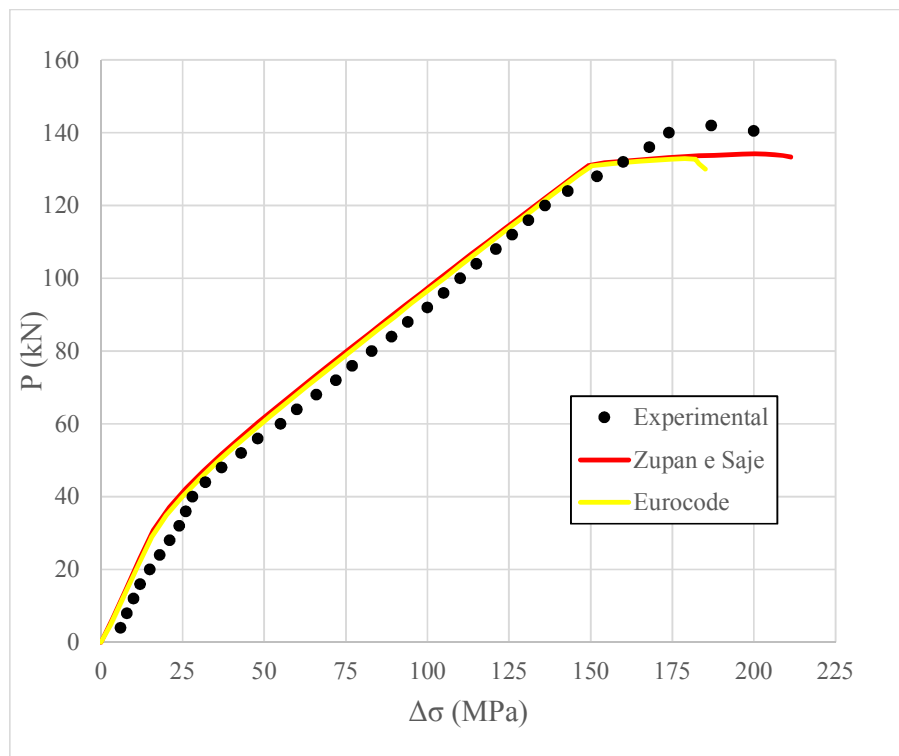
Fonte: Próprio autor

Figura 54 - Curva de equilíbrio da viga A9 de Tao e Du (1985)



Fonte: Próprio autor

Figura 55 - Incremento de tensão no cabo da viga A9 de Tao e Du (1985)



Fonte: Próprio autor

Os resultados apresentados pelo modelo quando comparados com os observados em laboratório das nove vigas do grupo A de Tao e Du (1985) foram em geral satisfatórios.

Os resultados numéricos obtidos a partir do modelo constitutivo de Zupan e Saje (2006) foram mais dúcteis que os obtidos através do modelo constitutivo do Eurocode 2 (2004), visto que nesta norma o limite de deformação do concreto à compressão é 3.5%, indicando que as vigas falham por esmagamento do concreto, após o escoamento do aço passivo.

#### 7.4 Viga contínua com protensão interna YLA1 de Chen (2008)

Neste exemplo, os resultados experimentais de uma viga contínua ensaiada por Chen (2008) e modelada por Lou (2013) são comparados. Os dados geométricos da viga e o carregamento são mostrados na Figura 56.

A seção da viga é retangular, com 15 cm de largura e 30 cm de altura. A disposição das armaduras positiva e negativa ao longo da viga também são mostrados na Figura 56, sendo  $A_{s1} = 4.524 \text{ cm}^2$  e  $A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = 2.262 \text{ cm}^2$ . A distância da face da viga ao

centro da armadura passiva é igual a 3.5 cm. A armadura ativa tem área de 1.4 cm<sup>2</sup>. O traçado do cabo de protensão foi aproximado, conforme mostra a Figura 56. A tensão efetiva no cabo ( $\sigma_{pe}$ ) após a aplicação da protensão e perdas é dada igual a 1083 MPa.

A viga foi modelada utilizando-se 25 elementos de viga e 25 elementos de cabo por vão, tendo os mesmos nós correspondentes. Na integração longitudinal, foi utilizada a quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. Na integração transversal, a seção transversal foi discretizada com 50 fatias.

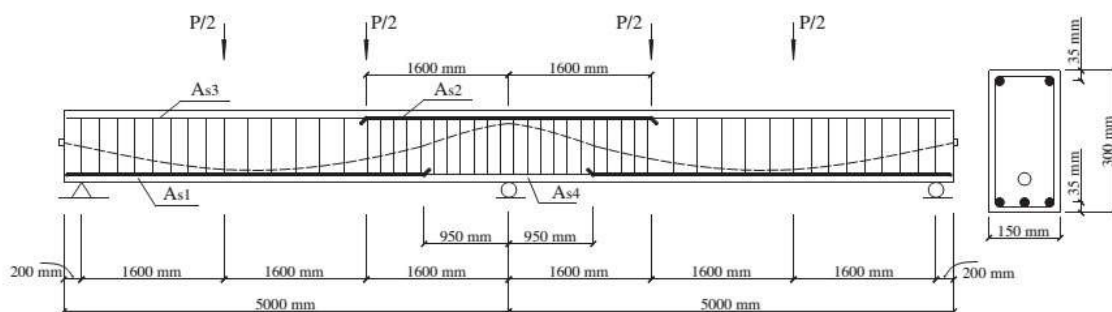
Na análise não linear, adotou-se o Método do Controle de Deslocamentos, com um incremento de 1 mm no deslocamento vertical do nó central por passo, com tolerância para convergência do equilíbrio de  $1 \times 10^{-5}$ .

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o proposto por Zupan e Saje (2005). Os dados do material concreto foram obtidos de Lou et al (2013), sendo o único parâmetro dado a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), igual a 34.9 MPa. A deformação de pico do concreto ( $\varepsilon_{cl}$ ) foi estimada, segundo Eurocode 2 (2004), sendo igual a 2.106‰. A deformação última à compressão, a deformação de pico à tração e a deformação última à tração do concreto foram adotados sendo, respectivamente:  $\varepsilon_{cu} = 6.0 \text{ ‰}$ ,  $\varepsilon_r = 1 \cdot 10^{-4}$  e  $\varepsilon_m = 1 \cdot 10^{-3}$ .

Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico perfeito, com uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 362 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa e deformação última ( $\varepsilon_u$ ) igual a 20%, sendo os dois últimos parâmetros adotados.

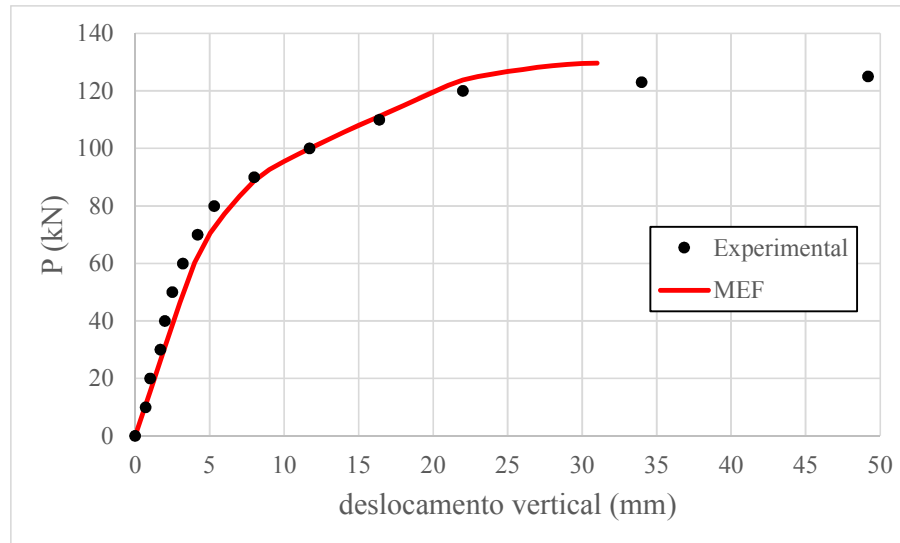
O aço de protensão desse exemplo apresenta tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 1680 MPa, tensão última ( $f_u$ ) igual a 1961 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 197 GPa, deformação última de 6% e coeficiente  $K = 1.04$ , sendo os últimos dois valores adotados.

Figura 56 - Detalhe da viga contínua ensaiada por Chen (2008)



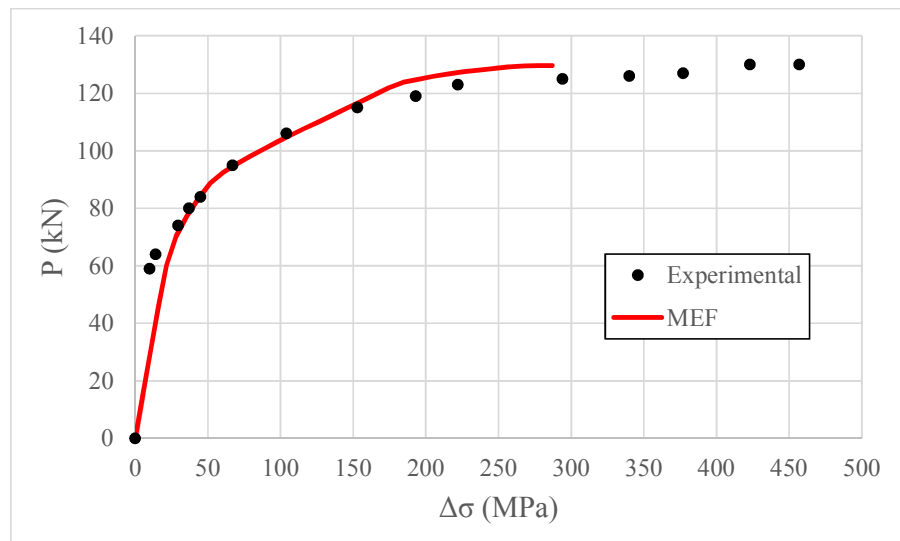
Fonte: Lou et al (2013)

Figura 57 - Curva de equilíbrio da viga YLA1 de Chen (2008)



Fonte: Próprio autor

Figura 58 - Incremento de tensão no cabo da viga YLA1 de Chen (2008)



Fonte: Próprio autor

Segundo Lou et al (2013), que analisou essa mesma viga contínua de Chen (2008), através de um modelo de elementos finitos de pórtico plano, existem quatro fases típicas ao longo do carregamento: primeira fissura no apoio central, segunda fissura no meio do vão, primeiro escoamento do aço sobre o apoio e segundo escoamento do aço no meio do vão.

O ensaio da viga contínua de Chen (2008) apresentou uma resposta mais dúctil que o modelo, embora o modelo tenha acompanhado satisfatoriamente as três primeiras fases. Pode-se prever que a convergência para além do que foi apresentado pelo presente modelo ocorreu devido a um aumento de rigidez significativa após o escoamento da armadura passiva sobre o apoio, quando o deslocamento vertical é aproximadamente igual a 22 mm e a resposta do modelo passa a ser mais rígida que o apresentado em laboratório.

### 7.5 Vigas com protensão externa de Tan e Ng (2006)

Tan e Ng (2006) apresentam resultados experimentais de ensaios de 5 protótipos de vigas de concreto com protensão externa, com um desviador no meio do vão. Todas as vigas são bi apoiadas e fletidas em quatro pontos, gerando um momento constante na região central da viga, com uma extensão de um terço do vão. As vigas modeladas nesse trabalho para comparação foram as vigas ST1, ST2, ST3, ST4 e ST5.

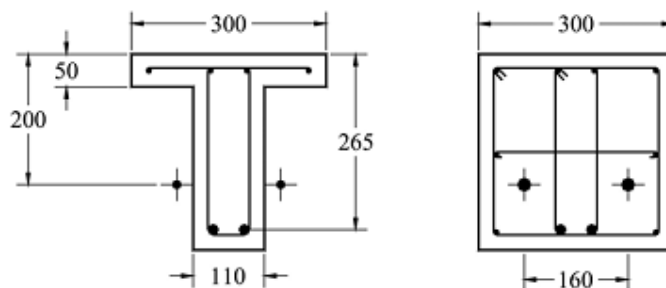
As seções transversais das vigas são todas semelhantes, sendo T ao longo do comprimento da viga, exceto na região do desviador, onde a seção é retangular, com 30 cm de largura e 30 cm de altura. A altura útil da armadura passiva positiva e negativa ( $d_s$ ) é igual a 26.5 cm. O traçado do cabo de protensão é reto e a altura útil da armadura de protensão ( $d_p$ ) é igual a 20.0 cm. A armadura passiva positiva possui uma área igual 4.02 cm<sup>2</sup>, enquanto a armadura negativa possui uma área de 2.01 cm<sup>2</sup>. A área da armadura ativa é igual 2.01 cm<sup>2</sup> em todas as vigas.

Figura 59 - Detalhe das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006) (unidade em mm)



Fonte: Tan e Ng (2006)

Figura 60 - Seções transversais das vigas ensaiadas por Tan e Ng (2006) (unidades em mm)



Fonte: Tan e Ng (2006)

A viga foi modelada utilizando-se 20 elementos de viga e 2 elementos de cabo, sendo os três nós dos elementos de cabo localizados nos dois apoios e no desviador. Na análise não linear, adotou-se o método do controle de deslocamentos, com um incremento de 1 mm no deslocamento vertical do nó central por passo, com tolerância para convergência do equilíbrio de  $1 \times 10^{-5}$ . Na integração longitudinal, foi utilizada a quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. Na integração transversal, a seção transversal foi discretizada com 50 fatias.

Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios realizados por Tan e Ng (2006), sendo o único parâmetro mensurado a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), cujos valores estão mostrados na Tabela 8. Os demais parâmetros do concreto necessários para representação do modelo constitutivo foram estimados, segundo o Eurocode 2 (2004).

Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico, com endurecimento linear. Dois tipos de aço foram empregados na seção transversal. A armadura positiva possui uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual 530 MPa e a armadura negativa 338 MPa. Já o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade de endurecimento ( $E_{sh}$ ) e a deformação última foram adotados iguais para os dois tipos de armadura, sendo 210 GPa, 1.0 GPa e 20%, respectivamente.

O aço de protensão foi modelado conforme a equação proposta por Menegotto e Pinto (1973), sendo os parâmetros tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 1650 MPa, tensão de última ( $f_u$ ) igual a 1900 MPa e módulo de elasticidade longitudinal de 193 GPa, dados apresentados por Tao e Du (1985). Já a deformação última do concreto e o coeficiente  $K$  foram adotados iguais a 6% e a 1.04, respectivamente.

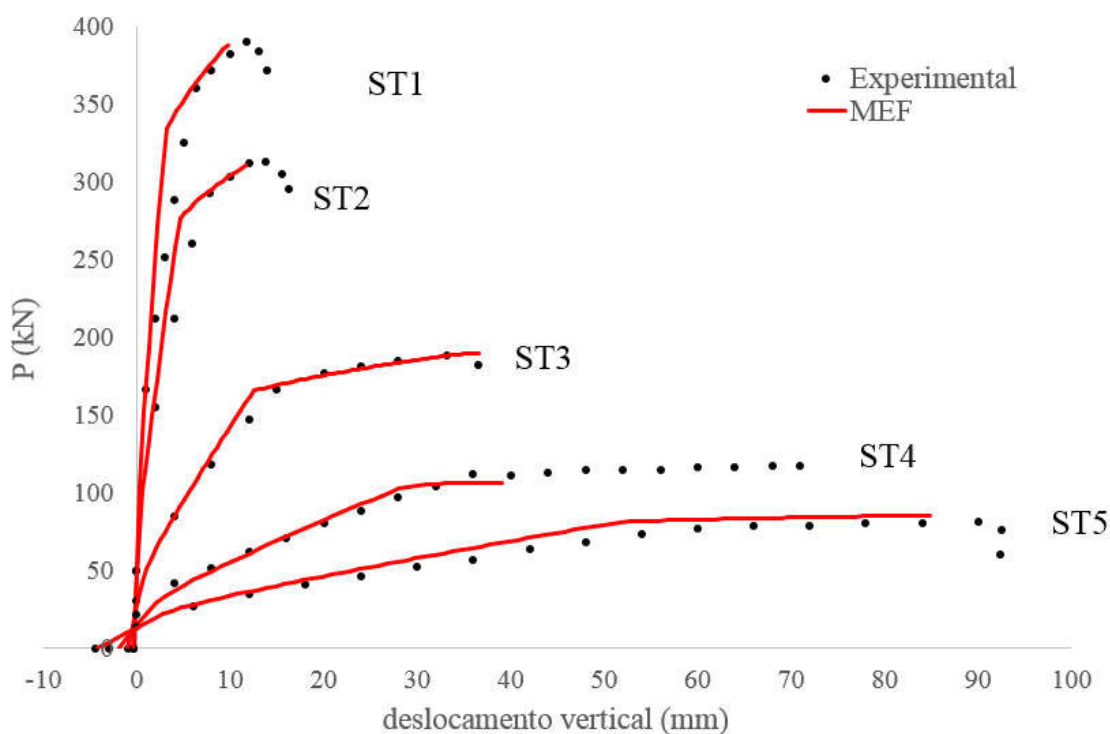
Tabela 8 - Parâmetros das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006)

Viga	$L$ (m)	$f_c$ (MPa)	$\sigma_{pe}$ (MPa)
ST1	1.5	34.5	764
ST2	1.8	29.9	771
ST3	3.0	33.2	750
ST4	4.5	28.3	757
ST5	6.0	25.1	760

Fonte: Próprio autor

Os resultados experimentais são mostrados juntamente com os resultados numéricos obtidos pelo modelo de elementos finitos, apresentando excelente concordância. Os resultados numéricos foram ligeiramente mais rígidos, até o escoamento do aço passivo e as cargas de pico foram aproximadas com precisão. Com exceção da viga ST4, o caminho de equilíbrio das vigas foram bem representados até a sua ruína.

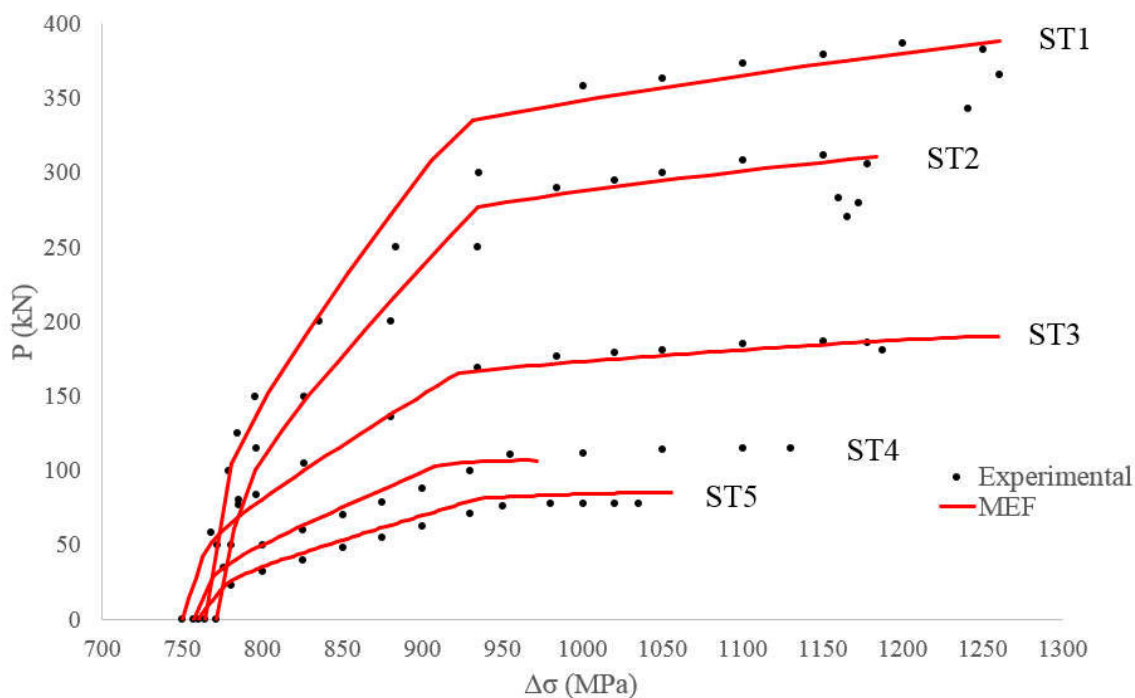
Figura 61 - Curvas de equilíbrio das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006)



Fonte: Próprio autor



Figura 62 - Incremento de tensão nos cabos das vigas ST ensaiadas por Tan e Ng (2006)



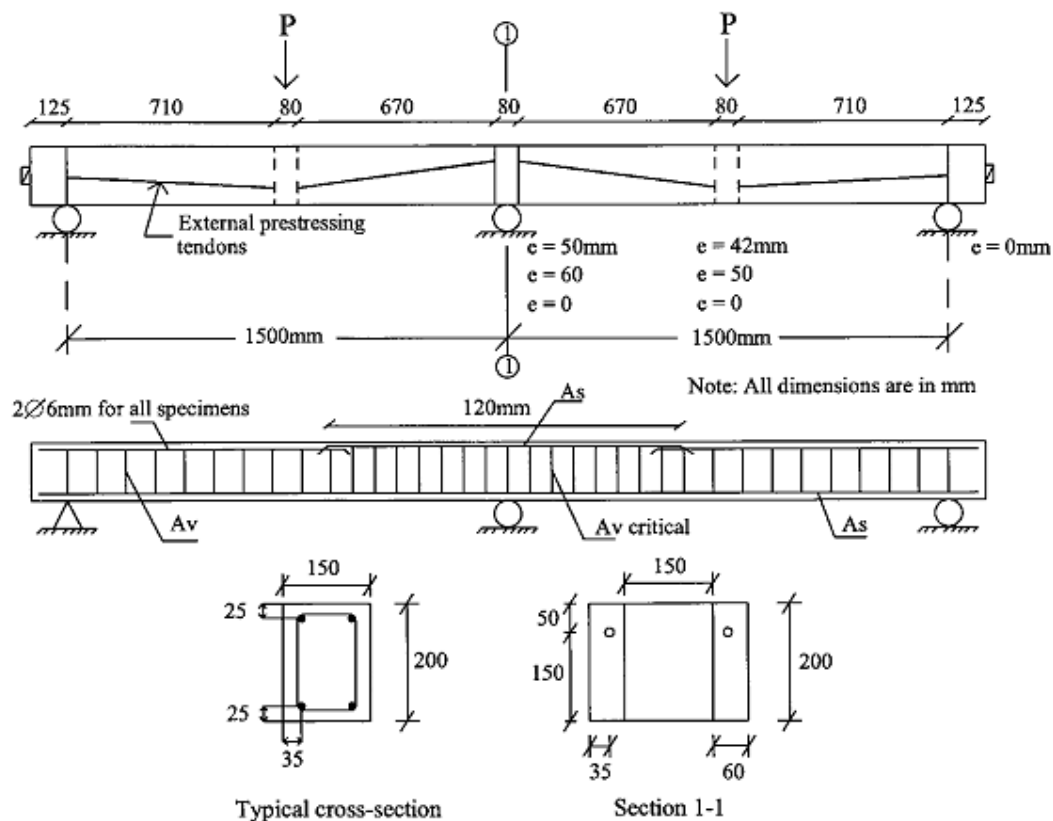
Fonte: Próprio autor

### 7.6 Viga contínua com protensão externa de Harajli (2002)

Por fim, um exemplo de uma viga contínua com protensão externa de Harajli (2002), a qual foi modelada a fim de comparação com o presente modelo. A geometria da viga, o carregamento e a disposição das armaduras passivas e ativas são mostradas na Figura 63.

A seção da viga é retangular, com 20 cm de largura e 15 cm de altura, exceto nos desviadores, onde a seção tem uma largura de 27 cm. A seção transversal ao longo de toda a viga possui a mesma quantidade de armadura positiva e negativa iguais a duas barras de 6 mm, sendo  $A_s = A_s' = 0.056 \text{ cm}^2$ . A distância da face da viga ao centro da armadura passiva é igual a 2.5 cm. A armadura ativa tem área de  $0.388 \text{ cm}^2$ . A tensão efetiva no cabo ( $\sigma_{pe}$ ) após a aplicação da protensão e perdas é dada igual a 1032 MPa.

Figura 63 - Detalhe da viga modelada por Harajli (2002)



Fonte: Harajli (2002)

A viga foi modelada utilizando-se 22 elementos de viga e 4 elementos de cabo, um elemento de cabo para cada trecho reto. Na integração longitudinal, foi utilizada a quadratura de Gauss com 3 pontos de integração. Na integração transversal, a seção transversal foi discretizada com 50 fatias.

Na análise não linear, adotou-se o método do controle de deslocamentos, com um incremento de 1 mm no deslocamento vertical do nó central por passo, com tolerância para convergência do equilíbrio de  $1 \times 10^{-5}$ .

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o proposto por Zupan e Saje (2005). Os dados do material concreto foram dados por Harajli (2002), sendo: a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), igual a 42.7 MPa. A deformação última à compressão ( $\epsilon_{cu}$ ) igual 8.0 %. A deformação de pico do concreto ( $\epsilon_{ci}$ ) foi estimada, segundo Eurocode 2 (2004), sendo igual a 2.241%. A deformação última à compressão ( $\epsilon_{cu}$ ) foi adotada igual 8.0 %, a deformação de pico à tração e a deformação última à tração do concreto foram também adotadas sendo, respectivamente:  $\epsilon_r = 1,5 \cdot 10^{-4}$   $\epsilon_m = 1 \cdot 10^{-3}$ .

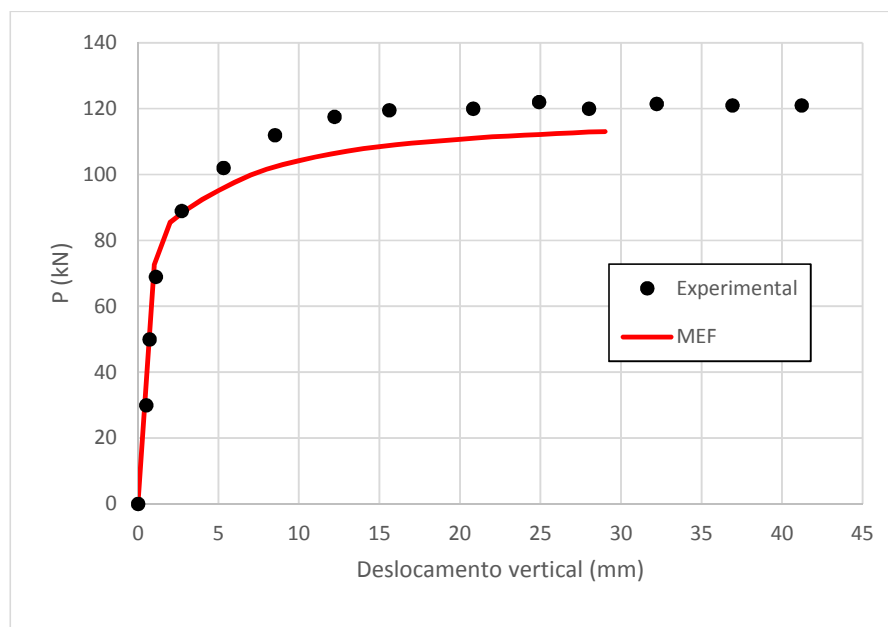
Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico, com endurecimento linear, com uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 347 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 210 GPa, o módulo de elasticidade de endurecimento ( $E_{sh}$ ) igual a 1 GPa e deformação última ( $\epsilon_u$ ) igual a 20%, sendo os dois últimos parâmetros adotados.

O aço de protensão desse exemplo apresenta tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 1400 MPa, tensão de última ( $f_u$ ) igual a 1607 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 206.85 GPa, deformação última de 5% e coeficiente  $K = 1.04$ , sendo os últimos dois valores adotados.

Embora o modelo numérico tenha aproximado com precisão a fase elástica do experimento, após a formação das rótulas plásticas verificada em laboratório, a resposta do modelo foi menos rígida e o deslocamento máximo não foi atingido.

A Figura 64 mostra a curva de equilíbrio do modelo numérico e os resultados experimentais obtidos por Harajli (2002) da viga B6D3.

Figura 64 - Curva de equilíbrio da viga B6D3 de Harajli (2002)



Fonte: Próprio autor

## 8 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou um modelo de elementos finitos de pórtico plano Lagrangeano Total, baseado em deslocamentos, para análise não linear física e geométrica de vigas de concreto com protensão não aderente, interna e externa, a partir da modelagem do cabo como um elemento resistente de cabo poligonal, acoplado ao elemento de pórtico plano.

A eficiência do modelo de elementos finitos desenvolvido neste trabalho para análise de vigas de concreto com protensão não aderente foi comprovada, a partir da boa aproximação com os resultados experimentais disponíveis na literatura de vigas com protensão não aderente interna de Hussien et al (2012), Tao e Du (1985) e Chen (2008) e externa de Tan e Ng (2006) e Harajli (2002).

Apesar da consideração da protensão como um elemento resistente tornar a formulação um pouco mais complexa, tem-se uma representação mais consistente do seu efeito, pois o elemento de cabo contribui na matriz de rigidez global e as forças em um ponto em equilíbrio são consideradas de maneira correta.

Devido à possibilidade de a malha de elementos finitos de cabo ser independente da malha de elementos finitos de pórtico plano, o modelo apresentado foi capaz de representar estruturas de concreto com protensão não aderente interna e externa.

O modelo de pórtico plano apresentado pode ser considerado ainda bastante eficiente do ponto de vista computacional, quando comparado com elementos bi e tridimensionais, e apresenta resultados satisfatórios para boa parte das estruturas convencionais de concreto armado e protendido.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se que o modelo apresentado pode ser ainda ampliado para análise de vigas de concreto protendido ao longo do tempo, bem como incluir a possibilidade de protensão com aderência inicial e com aderência posterior. A consideração da variação da força de protensão ao longo do cabo é também uma possível melhoria do modelo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AALAMI, B. O. Structural Modeling of Posttensioned Members. **ASCE Journal of Structural Division**, New York, ASCE, v. 126, n. 2, 2000.

AALAMI, B. O. Unbonded and Bonded Post-Tensioning Systems in Building Construction; A Design and a Performance Review. **PTI Technical Notes**, Phoenix, Arizona, PTI, v. 5, 1994.

ArcelorMittal. **Fios e Cordoalhas para Concreto Protendido**. 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118: Projeto de estruturas de concreto - procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7197: Projeto de estruturas de concreto protendido**. Rio de Janeiro, 1989.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1ª ed. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto: Portugal, 2003.

BARBIERI, R. A. **Modelo numérico para análise à flexão de elemento estruturais com protensão aderente e não aderente**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 2003. 305p. Tese de doutorado em Engenharia Civil.

BASTOS, P. S. S. **Disciplina de Concreto Protendido: Notas de Aula**. Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Civil, Bauru, 2015.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 74, 1979.

BERGAN, P. G.; HOLLAND, I. Nonlinear finite element analysis of concrete structures. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 17/18, p. 443-467, 1979.

BURNS, N. H. & SIESS, C. P. Load-deformation characteristics of beam-column connections in reinforced concrete. **Civil Engineering Studies**. Urbana, University of Illinois, SRS No. 234, 1962.

BRATINA, M. S. & PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International Journal of Solids and Structures**, Ljubljana, Slovenia, v. 41, p. 7181-7207, Dec. 2004.

CARREIRA, D. J. e CHU, K., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. **ACI Journal**, vol. 82, pp. 797-804.

CAUDURO, E. L. **Manual para a boa execução de estruturas protendidas usando cordoalhas de aço engraxadas e plastificadas**. 2<sup>a</sup> ed. 2006.

CHEN, Y. W. **The experimental researches on unbonded partially prestressed concrete continuous beams**. Hunan University, Changsha, 2008. Tese de doutorado.

COLLINS. M. P. & MITCHELL, D. **Prestressd Concrete Structures**. Ed. Prentice-Hall, Inc., 1991.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4<sup>a</sup> ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 2002.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1991. v.1.

DESAYI, P., Krishnan S. Equation for the stress-strain curve of concrete. **ACI Journal Proceedings**. Farmington Hills, ACI, v. 61, n. 3, p. 345-350, 1964.

E. HOGNESTAD. **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members**, University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin Series no. 399, Bulletin no. I, 1951

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. EN 1992-1-1. Brussels. 2004.

FAFITIS, A. Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending. **Journal of Structural Engineering**, Arizona, v. 127, n. 7, p. 840-846, July, 2001.

FONSECA, Marcos Torres. **Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

HARAJLI, M. H.; MABSOUT, M. E. & AL-HAJJ, J. A. Response of Externally Post-Tensioned Continuous Members. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v. 99, n. 5, 2002.

HUSSIEN, O.F.; ELAFAND, T. H. K.; ABDELRAHMAN, A. A.; ABDEL, B. S. A.; NASR, E. A. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. **HRBC Journal**, p. 239-251, v. 8, n. 3, 2012.

LEONHARDT, F. **Construções de Concreto: Concreto Protendido**. Ed. Interciência, vol. 5, Rio de Janeiro, 1983.

LIN, T. Y & BURNS, N. H. **Design of Prestressed Concrete Structures**. 3<sup>a</sup> ed. New York: John Wiley & Sons, 1982.

LOU, T; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, v. 119, p. 166-176, 2013.

LOU, T; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Finit element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. **Computers and Structures**, v. 28, p. 1919-1926, 2006.

MATTOCK, Alan H. Flexural strength of prestressed concrete sections by programmable calculator. **PCI Journal**. January-February, 1979.

MENEGOTTO, M.; PINTO P. E. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames, including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. **IABSE preliminary report for symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on well-defined repeated loads**, Lisbon. p 15–22, 1973.

MOON, J & BURNS, N. H. Flexural Behavior of Member with Unbonded Tendons I: Theory. **ASCE Journal of Structural Division**, New York, ASCE, v. 20, n. 8, 1978.

MELO, Antônio Macário Cartaxo. **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado**. 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

NAAMAN, A. E. & ALKHAIRI, F. M. Stress at Ultimate um Unbonded Post-Tensioned Tendons: Part 2 – Proposed Methodology. **ACI Structural Journal**, Farmington Hills, ACI, v. 88, n. 5, 1991.

NOGUEIRA, G. V. **Análise não linear física de pórticos planos de concreto armado**. 2013. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

PAPANIKOLAOU, V. K. Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. **Computers and Structures**, Thessaloniki, Greece, v. 98-99, p. 33-54, May, 2012.

PARENTE JUNIOR, E.; NOGUEIRA, G. V. ; MEIRELES, M.N. ; MOREIRA, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 7, n.5, p. 879-904, 2014.



PRATES JUNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1992. 110p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**, 3rd ed., McGraw-Hill Education, 2005.

SOUSA JR., João Batista M. **Curso de Análise Não-Linear de Estruturas: Notas de Aula.** Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Fortaleza, 2014.

STRAMANDINOLI, Renata Sá Brito. **Modelos de Elementos Finitos para Análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado.** Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

TAO, Xuekang; DU, Gongchen. Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams. **PCI Journal**. November-December, 1985.

VASCONCELOS, A. C. **Manual prático da correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas.** Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, Editora LTDA, 1980.

VERÍSSIMO, G. S. & CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto Protendido: Fundamentos Básicos.** Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Engenharia Civil, 1998.

VERÍSSIMO, G. S. & CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto Protendido: Perdas de Protensão.** Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Engenharia Civil, 1998.

ZONA, A.; RAGNI, L. & DALL'ASTRA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. **Finite Elements in Analysis and Design**. v. 44, p. 910-919. 2008.

ZUPAN, D. & SAJE, M. Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections. **Computers and Structures**, v. 83, p. 2368-2380, Mar. 2005.