



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:**  
**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**LUCAS FAÇANHA DE OLIVEIRA**

**OTIMIZAÇÃO MULTINIVEL DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO VIA**  
**ALGORITMOS GENÉTICOS**

**FORTALEZA**

**2014**

LUCAS FAÇANHA DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO MULTINIVEL DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO VIA  
ALGORITMOS GENÉTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Antônio Macário Cartaxo de Melo

FORTALEZA

2014

LUCAS FAÇANHA DE OLIVEIRA

OTIMIZAÇÃO MULTINIVEL DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO VIA  
ALGORITMOS GENÉTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Antônio Macário Cartaxo de Melo

Aprovada em \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

---

Prof. Dr. Jose Antônio Hernandez

Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA)

A Deus pela sua misericórdia  
A minha família por seu amor

“Você tem de saber responder a essa pergunta:  
Se você morresse agora, como você se sentiria  
a respeito da sua vida?”

*Tyler Durden – Clube da luta.*

## RESUMO

O concreto armado é um material compósito que possui uma extensa aplicação no mercado da construção civil. Estima-se que sejam utilizados 11 bilhões de toneladas de concreto por ano no mundo. As vigas em concreto armado são elementos estruturais que possuem aplicações em edifícios, residências, viadutos, entre outros e são projetadas via método tradicional de tentativa e erro, obedecendo recomendações de norma relativas à resistência, estabilidade, rigidez e durabilidade. Após um pré-dimensionamento, executam-se ciclos iterativos de análise e dimensionamento. No dimensionamento, um requisito é usado para definir o projeto e os demais são verificados. Modificações e a parada são controladas pelo projetista. No método de projeto ótimo, por sua vez, define-se um critério de desempenho (custo, peso, resistência, entre outros) e busca-se a melhor combinação de variáveis que satisfaça todos os critérios normativos e resulte no projeto com o melhor desempenho. Em geral, usa-se o custo como medida de desempenho e os trabalhos se diferenciam pela natureza das variáveis de projeto e pela inclusão dos detalhes de armadura. O objetivo deste trabalho é formular um modelo de otimização em dois níveis para minimização do custo de vigas de concreto armado. No primeiro nível (global), minimiza-se o custo com as dimensões das seções (discretas) e as áreas de armadura longitudinais (contínuas) como variáveis, e consideram-se restrições de resistência (ELU), deformação (ELS) e ductilidade. A armadura transversal já é detalhada neste nível. Estratégias para incluir no custo da armadura o efeito dos cortes e ancoragem sem as bitolas definidas são sugeridas. No segundo nível (local) busca-se o arranjo de armaduras longitudinais, considerando os cortes destas, com o menor volume. As variáveis descrevem a topologia das barras nas seções e restrições de boas prática de projeto, e de compatibilidade geométrica são verificadas. As análises lineares são realizadas com elementos finitos clássicos de viga utilizando o programa FAST e os dois modelos de otimização são resolvidos usando o algoritmo genético do programa BIOS. Os parâmetros do AG são calibrados com exemplos testes e são feitas aplicações a exemplos da literatura. A sensibilidade da solução é estudada para variação de parâmetros de custos da função objetivo.

**Palavras-chave:** Concreto Armado, Algoritmo genético, Otimização, Projeto detalhado

## ABSTRACT

Reinforced concrete is a composite material that has extensive application in the construction market. It is estimated that 11 billion tons of concrete per year are used in the world. The reinforced concrete beams are structural elements that have applications in buildings, homes, bridges, etc. and are designed via traditional method of trial and error, following standard recommendations concerning to the strength, stability, rigidity and durability. After a pre-dimensioning, run up iterative cycles of analysis and design. In designing, a requirement is used to define the project and the rest are checked. Modifications and stopping are controlled by the designer. In the optimum design method, on the other hand, a criterion of performance is set up (cost, weight, strength, etc.) and the best combination of variables is searched that satisfies all regulatory criteria and results in design with the best performance. In general, it uses cost as a performance measure and the works are distinguished by the nature of design variables and the inclusion of details of armor. The objective of this work is to formulate a model of optimization on two levels to minimize the cost of reinforced concrete beams. In the first level (global) the cost is minimized with the dimensions of the sections (discrete) and the areas of longitudinal reinforcement (continuous) as variables and constraints like strength (ULS), deformation (SLS) and ductility are considered. The detailed transverse reinforcement is already designed at this level. Strategies to include the cost of the armor cuts and anchoring without defined bar sizes are suggested. At the second level (local) the steel lowest volume of arrangement of longitudinal reinforcement is searched, considering the cuts and anchoring. The variables describe the topology of the bars in the sections and restrictions of good design practice, and geometric compatibility are checked. The linear analyzes are performed with classical beam finite element using the software FAST program and the optimization models are solved using genetic algorithm from the software BIOS. The GA parameters are calibrated with test examples and literature's application examples are made. The sensitivity of the solution is studied for varying cost parameters of the objective function.

**Keywords:** Reinforced concrete, genetic algorithm, optimization, detailed design

## Lista de Figuras

Figura 1. Modelos de vigas para o cálculo de engastamento perfeito.....	7
Figura 2. Modelo estrutural de ligação pilar/viga/pilar.....	8
Figura 3. Arredondamento do gráfico de momentos fletores.....	9
Figura 4. Estádios de uma viga de concreto armado.....	11
Figura 5. Domínios de deformação do estado limite-ultimo.....	11
Figura 6. Equilíbrio para seções retangulares simplesmente armadas.....	13
Figura 7. Equilíbrio para seções retangulares duplamente armadas.....	15
Figura 8. Representação do campo de tensões em um elemento linear exposto a carga concentrada.....	17
Figura 9. Modelo de treliça de Mörsch.....	20
Figura 10. Decalagem do momento fletor.....	21
Figura 11. Ancoragem por engrenamento.....	22
Figura 12. condições de boa e má aderência.....	23
Figura 13. Topologia de diferentes distribuições de aço em uma viga.....	29
Figura 14. Esquema de funcionamento do algoritmo.....	30
Figura 15. Padrões de distribuição de armaduras de aço.....	31
Figura 16. Distribuição de barras de aço em uma seção.....	32
Figura 17. Curva de interação Momento resistente ( $\mu$ ) - Força normal resistente ( $v$ ).....	34
Figura 18. Disposição das barras de aço em uma seção transversal de pilares.....	34
Figura 19. Distribuição de armaduras dentro da seção de pilares.....	35
Figura 20. Configurações de montagem de armaduras.....	36
Figura 21. Representação da geometria da viga.....	38
Figura 22. Gráfico do esforço de tração solicitante na barra.....	40
Figura 23. Distribuição de barras de aço na seção.....	41
Figura 24. Distribuição de barras de aço na seção.....	43
Figura 25. Comprimento de ancoragem x Área de aço.....	44
Figura 26. Distribuição de estribos em uma seção.....	45
Figura 27. Diagrama de esforço cortante.....	45
Figura 28. Curva de interação para $A_s \geq A'_s$ .....	47
Figura 29. Representação genética dos indivíduos.....	60
Figura 30. Decodificação do genótipo dos indivíduos.....	61
Figura 31. Correspondência entre a genética Darwinista e o algoritmo genético.....	62
Figura 32. Método da roleta.....	64
Figura 33. Gráfico de roleta e ranking.....	65
Figura 34. Combinação linear de genes.....	66
Figura 35. Representação de uma mutação.....	67
Figura 36. Divisão das avaliações por indivíduo.....	68
Figura 37. Representação da viga biapoiada.....	70
Figura 38. Representação viga bi apoiada - $A'_s=1$ , anc=0 (MPC01).....	73
Figura 39. Representação da viga bi apoiada - $A'_s=1$ , anc=1 (MPC11).....	73
Figura 40. Representação da viga bi apoiada - $A'_s=0$ , anc=1/ $A'_s=0$ , anc=1 (MPC00 e MPC10).....	74
Figura 41. Representação viga com dois vãos.....	75
Figura 42. Segundo nível de otimização – Viga dois vãos, anc=0.....	79
Figura 43. Segundo nível de otimização – Viga dois vãos, anc=1.....	80
Figura 44. Comparação Araújo (2010) x Modelo proposto – $\zeta=5$ .....	81
Figura 45. Custos relativos dos materiais – $\zeta=5$ .....	82
Figura 46. Comparação Araújo (2010) x Modelo proposto – $\zeta=1$ .....	82

Figura 47. Custos relativos dos materiais – $\zeta = 1$ .....	83
Figura 48. Volumes calculados de aço – $\zeta=1$ .....	83
Figura 49. Ilustração da viga otimizada no primeiro exemplo.....	84
Figura 50. Representação gráfica viga com três vãos – $\zeta = 1$ , $A'_s = 0$ e $\text{anc}=0$ , $\text{anc}=1$ (MPS001) e (MPS101). .....	89
Figura 51. Representação gráfica viga com três vãos – $\zeta = 1$ , $\text{anc}=0$ (MPS011).....	95
Figura 52. Representação gráfica viga com três vãos – $\zeta = 1$ , $\text{anc}=1$ / $\zeta = 5$ , $\text{anc}=0$ e $\text{anc}=1$ (MPS111, MPS015, MPS115).....	97

## Lista de tabelas

Tabela 1. Coeficientes da estimativa de ancoragem.....	44
Tabela 2. Indivíduos e função objetivo .....	65
Tabela 3 Valores dos parâmetros do AG – 1º exemplo.....	70
Tabela 4. Simbologia para exemplo – Viga biapoiada.....	70
Tabela 5. Variáveis de projeto obtidos no nível 1– exemplo 1 .....	71
Tabela 6 Variáveis dependentes obtidos no nível 1 – exemplo1.....	71
Tabela 7 Restrições obtidas no nível 1- 1ºexemplo.....	72
Tabela 8. Resultados para a otimização no nível 2– anc = 0 (MPC01).....	72
Tabela 9 Resultados para a otimização no nível 2– anc = 1 (MPC11).....	73
Tabela 10. Resultados para a otimização no nível 2– anc = 0, $A'_s = 0$ (MPC00 e MPC10). ...	74
Tabela 11. Resultados para a otimização no nível 2 – anc = 1, $A'_s = 0$ (MPC00 e MPC10). ..	74
Tabela. 12 Design final da viga – Viga bi apoiada.....	74
Tabela 13. Simbologia para exemplo – Viga com 2 vãos .....	76
Tabela 14 Valores dos parâmetros do AG – viga dois vãos.....	76
Tabela 15. Resultados do primeiro nível – viga dois vãos. ....	76
Tabela 16. Detalhes de armaduras – viga dois vãos. ....	77
Tabela 17. Tabela de restrições – Viga com dois vãos.....	78
Tabela 18. Resultados para a otimização no nível 2– viga com dois vãos – anc=0.....	79
Tabela 19. Resultados para a otimização no nível 2– viga com dois vãos – anc=0.....	79
Tabela 20. Custos finais das vigas – Viga com dois vãos. ....	80
Tabela 21. Simbologia para exemplo – Viga com 3 vãos. ....	84
Tabela 22. Resultados do primeiro nível – viga com três vãos, armadura simples.....	85
Tabela 23. Áreas de aço – viga com três vãos, armadura simples. ....	86
Tabela 24. Tabela de restrições – Viga com três vãos, armadura simples. ....	87
Tabela 25. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura simples – $\zeta = 1$ , anc=0 (MPS001) .....	88
Tabela 26. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura simples – $\zeta = 1$ , anc=1(MPS101).....	89
Tabela 27. Custos finais da viga – Viga com três vãos, armadura simples.....	90
Tabela 28. Resultados do primeiro nível – viga com três vãos .....	90
Tabela 29. Variáveis dependentes – viga com três vãos .....	91
Tabela 30 Restrições do problema .....	92
Tabela 31. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura dupla – $\zeta = 1$ , anc=0 (MPS011). ....	93
Tabela 32. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura dupla – $\zeta = 1$ , anc=1 / $\zeta =$ 5, anc=0 e anc=1(MPS111, MPS015, MPS115). ....	95
Tabela 33. Custos finais da viga – Viga com três vãos, armadura dupla. ....	97

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Objetivos.....</b>	<b>3</b>
<i>1.1.1. Objetivos gerais.....</i>	<i>3</i>
<i>1.1.2. Objetivos específicos .....</i>	<i>3</i>
<b>1.2. Organização do trabalho.....</b>	<b>3</b>
<b>2. CONCRETO ARMADO.....</b>	<b>5</b>
<b>2.1. Viga contínua .....</b>	<b>6</b>
<b>2.2. Arredondamento do DMF sobre apoios internos .....</b>	<b>9</b>
<b>2.3. Dimensionamento de vigas de concreto armado.....</b>	<b>9</b>
<i>2.3.1. Comportamento da seção .....</i>	<i>10</i>
<i>2.3.2. Dimensionamento de vigas a flexão simples .....</i>	<i>12</i>
<i>2.3.3. Seção retangular com armadura simples .....</i>	<i>13</i>
<i>2.3.4. Seção retangular com armadura dupla .....</i>	<i>14</i>
<i>2.3.5. Dimensionamento do elemento linear quanto ao cisalhamento.....</i>	<i>16</i>
<i>2.3.6. Modelo de cálculo I .....</i>	<i>17</i>
<i>2.3.7. Prescrições normativas.....</i>	<i>18</i>
<i>2.3.8. Deslocamento do diagrama de momentos fletores .....</i>	<i>19</i>
<i>2.3.9. Ancoragem por aderência de barras de aço .....</i>	<i>21</i>
<b>3. OTIMIZAÇÃO .....</b>	<b>25</b>
<b>3.1. Programação clássica .....</b>	<b>26</b>
<b>3.2. Otimização de vigas de concreto armado .....</b>	<b>26</b>
<i>3.2.1. Otimização de dimensão.....</i>	<i>27</i>
<i>3.2.2. Otimização da topologia das barras .....</i>	<i>28</i>
<i>3.2.3. Trabalhos nacionais .....</i>	<i>32</i>
<b>4. FORMULAÇÃO DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO.....</b>	<b>37</b>
<b>4.1. Formulação do primeiro nível ou otimização da seção .....</b>	<b>37</b>
<i>4.1.1. Variáveis de projeto .....</i>	<i>37</i>
<i>4.1.2. Função Objetivo .....</i>	<i>38</i>
<i>4.1.3. Cálculo dos custos da armadura longitudinal.....</i>	<i>39</i>
<i>4.1.4. Cálculo dos custos da armadura transversal.....</i>	<i>45</i>
<i>4.1.5. Custos da armadura de pele .....</i>	<i>46</i>
<i>4.1.6. Restrições .....</i>	<i>47</i>

4.1.7.	<i>Restrições relativas à resistência e equilíbrio</i> .....	47
4.1.8.	<i>Restrições de serviço</i> .....	50
4.1.9.	<i>Restrições de boas práticas de projeto e detalhamento</i> .....	52
4.1.10.	<i>Exigências arquitetônicas e limites laterais</i> .....	53
4.1.11.	<i>Resumo do modelo do primeiro nível</i> .....	54
4.2.	<b>Formulação do segundo nível ou design da viga</b> .....	55
4.2.1.	<i>Variáveis de projeto:</i> .....	55
4.2.2.	<i>Função Objetivo</i> .....	56
4.2.3.	<i>Restrições</i> .....	56
4.2.4.	<i>Exigências normativas e compatibilidade</i> .....	56
4.2.5.	<i>Boas práticas de projeto</i> .....	57
5.	<b>ALGORITMOS GENÉTICOS</b> .....	59
5.1.	<b>Operações básicas no algoritmo genético</b> .....	61
5.1.1.	<i>Função Aptidão e Penalidade</i> .....	62
5.1.2.	<i>Seleção</i> .....	63
5.1.3.	<i>Cruzamento (Crossover)</i> .....	65
5.1.4.	<i>Mutação</i> .....	66
5.1.5.	<i>Elitismo</i> .....	67
5.2.	<b>BIOS (Biologically Inspired Optimization Tool)</b> .....	67
6.	<b>APLICAÇÕES</b> .....	69
6.1.	<b>Viga biapoiada</b> .....	69
6.1.1.	<i>Resultados obtidos no 1º Nível</i> .....	71
6.1.2.	<i>Resultados obtidos no 2º nível</i> .....	72
6.2.	<b>Vigas com dois vãos</b> .....	75
6.2.1.	<i>Resultados obtidos no 1º nível</i> .....	76
6.2.2.	<i>Resultados obtidos no 2º nível</i> .....	78
6.2.3.	<i>Comparação entre resultados finais</i> .....	80
6.2.4.	<i>Análise de sensibilidade</i> .....	81
6.3.	<b>Sacoman et al (1987)</b> .....	83
6.3.1.	<i>Aplicação do modelo - 1º nível</i> .....	84
6.3.1.1.	<i>Aplicação do modelo simplesmente armado</i> .....	85
6.3.1.2.	<i>Aplicação do modelo duplamente armado</i> .....	90
7.	<b>CONCLUSÕES</b> .....	98
7.1.	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b> .....	99
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	100

## 1. INTRODUÇÃO

O concreto é utilizado em larga escala na construção civil, sua adaptabilidade e facilidade de manejo facilitaram sua adaptação. Este material é utilizado em construções de edifícios de concreto armado, rodovias, torres de resfriamento, silos de estoque de cereais, usinas nucleares, barragens, entre outros. Estima-se que se utilize cerca de 11 bilhões de toneladas de concreto por ano no mundo, este valor só é menor que o consumo de água (Ibracon, 2009).

O concreto armado é um material compósito, constituído de concreto e aço, cujos materiais trabalham em conjunto para atingir um melhor desempenho. Diversas empresas se especializaram na execução de estruturas, oferecendo produtos e serviços de alta qualidade como a entrega do aço cortado e dobrado, fornecimento do concreto com  $f_{ck}$ , aditivos e na hora especificada pelo cliente. Com um mercado tão competitivo é razoável inferir que esta disputa se faz presente também na etapa de projeto de estruturas, assim, torna-se muito atrativo aplicar conceitos de qualidade e melhoria para o projeto de estruturas de concreto, entre eles se destaca a diminuição dos custos de elementos de concreto armado.

Para entender como é possível diminuir custos, é necessário entender a filosofia de projeto tradicional e de projeto ótimo. O método tradicional é um processo iterativo que segue uma heurística de projeto, no qual o projetista pré-dimensiona a estrutura e realiza uma análise para conhecer a resposta desta, frente às solicitações. Buscando satisfazer os critérios presentes na norma, o elemento é dimensionado. Caso o pré-dimensionamento não gere um projeto exequível restando assim algum critério que não possa ser satisfeito, uma nova estrutura deverá ser pré-dimensionada e uma nova fase de análise e dimensionamento deverá ser executada. Esta iteratividade tem continuidade até que todas as restrições estejam satisfeitas simultaneamente, assim, observa-se que o resultado final do projeto dependerá fortemente da experiência projetista.

O método de projeto ótimo por outro lado, define inicialmente um critério de desempenho para o projeto como menor custo, menor peso ou menor volume, por exemplo, buscando dentro do espaço de projeto, uma combinação entre os parâmetros que obedeçam todos os critérios de norma e que apresente simultaneamente o melhor desempenho. Para isso, um modelo de otimização deverá ser formulado. Através da combinação das variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ , procura-se extremizar uma função objetivo  $f(\mathbf{x})$  sem contudo violar as restrições  $h(\mathbf{x}) = 0$  e  $g(\mathbf{x}) \leq 0$ .

A formulação do modelo deverá buscar um equilíbrio entre uma representação realista e uma representação simplificada. Um modelo muito realista pode ser complexo e de difícil solução. Caso o modelo seja demasiadamente simplificado as soluções serão obtidas mais facilmente, entretanto, estas podem não ser aplicáveis.

O objetivo de encontrar a melhor solução para uma estrutura de concreto armado é um desafio de grandes proporções, para se obter uma solução razoável, é necessário que sejam conhecidos os comportamentos individuais de cada elemento que compõe a estrutura. Usualmente uma estrutura de pórtico 3D é composta de elementos menores, tais como vigas, pilares e lajes, elaborar um modelo que otimize o comportamento global da estrutura pode ter um custo computacional alto, entretanto, dividindo-se a estrutura em elementos de complexidade menor: vigas, lajes e pilares, permitirá uma a modelagem da estrutura mais eficiente.

Os elementos que compõem uma estrutura de pórtico 3D, possuem diferentes comportamentos e diferentes restrições, entre eles, citam-se as vigas que usualmente são responsáveis pela transmissão das cargas das lajes aos pilares e em algumas estruturas (edifícios, pontes, etc.) podem apresentar repetições, que tornam este elemento muito atrativo do ponto de vista de otimização.

Os modelos elaborados para vigas de CA, usualmente possuem o objetivo de minimizar o custo do elemento estrutural. Em geral, as regras impostas por normas são seguidas como restrições matemáticas no modelo de otimização. As diferenças entre os modelos geralmente residem no tipo de variável de projeto: contínua ou discreta e na forma com a qual a topologia das barras de aço são tratadas. Sarma e Adeli (1998) realizaram um estudo acerca destes métodos de otimização e os catalogaram, incluindo em seus modelos concreto armado e protendido. Segundo estes autores, um dos primeiros trabalhos realizados, foi realizado por Goble e Lapay datando de 1971 que versava acerca da otimização de uma viga T de concreto protendido. Em termos de concreto armado o primeiro trabalho aparentemente trata-se de Friel (1974) que realizou a otimização de vigas em seção retangular simplesmente apoiadas .

Nos estudos realizados a partir da década de 70, são propostos diversos modelos de otimização, destacando-se duas linhas principais. Na primeira, os modelos consideram a viga com uma armadura de aço contínua não se preocupando com a topologia das barras de aço. Otimiza-se, desta forma, uma seção transversal da viga e usualmente considera-se que a área de aço estenda-se de apoio a apoio. Entre os autores que assim trataram o problema, pode-se citar: (Rao, 1973), (Friel, 1974), (Balaguru, 1980), (Chakrabarty, 1992), (Coello et al., 1997), (Melo, 2000), (Fedghouche e Tiliouine, 2012).

Na segunda linha de pesquisa, os autores realizam a otimização considerando a forma como as barras de aço são dispostas na seção (Kanagasudaram e Karihaloo, 1990), (Koumosis et al, 1995), (Balling e Yao, 1997), (Govindaraj e Ramasamy, 2005). Dentro desta linha alguns modelos consideram corte e dobra de barras de aço bem como sua distribuição longitudinal na viga. Uma revisão bibliográfica será apresentada na seção 3.2.

O trabalho de Balling e Yao (1997) uniu as duas linhas principais e as comparou. Os resultados sugeriram que não existia uma diferença significativa entre as duas linhas, entretanto, alguns autores chegaram a conclusões diferentes, tais como Vianna e El Debs (2003).

## **1.1. Objetivos**

### ***1.1.1. Objetivos gerais***

O objetivo geral deste trabalho é a formulação de um modelo de otimização em dois níveis do projeto estrutural de vigas contínuas de concreto armado considerando o detalhe das armaduras.

### ***1.1.2. Objetivos específicos***

- a) Verificar a eficiência do modelo em dois níveis;
- b) Analisar o comportamento da solução ótima em função da variação dos custos dos componentes (sensibilidade);
- c) Avaliar estratégias para estimar o custo das armaduras sem ter as bitolas das armaduras;
- d) Comparar soluções contínuas (1º nível) e discretas (2º nível) para as armaduras;
- e) Avaliar a eficiência do AG para o tipo de problema em consideração.

## **1.2. Organização do trabalho**

No primeiro capítulo é apresentada uma contextualização do problema e um breve introdução sobre trabalhos já realizados.

No segundo capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica acerca da análise e projeto de estruturas em concreto armado. Algumas considerações acerca da modelagem por

meio de vigas contínuas e os métodos de dimensionamento de vigas de concreto armado de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2007).

No terceiro capítulo, a otimização como uma ferramenta é apresentada e alguns termos usuais são melhor explicados nesta seção. O capítulo possui ainda uma revisão teórica acerca dos métodos utilizados por outros autores.

No quarto capítulo o modelo de otimização proposto neste trabalho é apresentado. Inicialmente o primeiro nível é detalhado, e as considerações do modelo são apresentados. Em seguida, o segundo nível é apresentado.

No quinto capítulo é apresentado o algoritmo genético usado neste trabalho, seus operadores e o modo como foi utilizado.

No sexto capítulo o modelo formulado é aplicado e comparado com outros trabalhos da literatura.

No sétimo capítulo são realizadas as considerações finais do trabalho.

## 2. CONCRETO ARMADO

O concreto trata-se de um dos materiais mais utilizados do mundo, possuindo aplicações em edifícios, pontes, usinas, obras de saneamento, estradas, entre outros. Este material é um compósito formado por uma mistura de água, cimento, agregados britados e agregados miúdos, podendo ser adicionados aditivos químicos com o objetivo de acelerar ou retardar a pega, ou ainda, adições minerais que podem vir a melhorar o desempenho do concreto após sua pega.

Segundo Clímaco (2005) os romanos já utilizavam uma espécie de concreto, utilizando como aglomerantes a cal e a pozolana que eram provenientes de extração natural ou através de subprodutos de outros materiais. O autor segue citando Joseph Apsdin que em 1824 na Inglaterra, industrializou a produção de cimento Portland. Apesar de este concreto apresentar características essenciais para a sua popularização como material de construção, a fragilidade deste em relação a esforços de tração (suportando apenas cerca de 1/5 a 1/15 em relação à compressão) não permitia que o material atingisse seu pleno desenvolvimento.

A solução para a baixa resistência do concreto a tração se deu através da associação entre o aço e o concreto criando assim o concreto armado, que se trata de um material compósito. Tal descoberta aconteceu na França em 1848 quando Jean-Louis Lambot criou um bote utilizando uma fina camada de concreto e uma malha de aço. Apesar da data de sua criação, o bote só foi exposto em 1855 na “*Paris Exhibition*”. William Wilkinson em 1854 patenteou um sistema construtivo de malha de barras ou fios de aço embutidos em elementos de concreto. A partir deste ponto o concreto armado apresentou uma grande aplicabilidade, cita-se: um par de pequenas casas (1866), um spa hidroterápico(1869), ponte Flixton (1870). Depois destas construções diversas outras foram surgindo e com isso o concreto armado tornou-se um sistema construtivo importante e popular (BCA, 1999).

Carvalho (2009) descreve diversas características que o concreto armado possui, entre elas as vantagens que tornaram possível a popularização e implementação deste material compósito, entre elas, citam-se:

- Boa resistência a situações de incêndio, desde que possua o cobrimento necessário, inclusive superior ao aço;
- Boa trabalhabilidade, bem como, domínio nacional de suas técnicas construtivas;
- Longa durabilidade, desde que a estrutura seja executada conforme as normas pertinentes;

- Boa resistência a vibrações, choques, efeitos térmicos, atmosféricos e desgastes mecânicos, desde que exista o revestimento necessário.

O autor prossegue descrevendo ainda algumas desvantagens do concreto armado, entre elas, citam-se:

- A necessidade de elementos robustos, com elevado peso específico levando a estruturas com peso próprio elevado;
- Reformas e adaptações de difícil execução;
- Relativa alta condutividade de calor e som;
- Necessidade de escoras e formas temporárias.

O sucesso da associação do concreto e do aço se deu em vários aspectos, entre eles, cita-se a aderência entre os dois materiais, tornando possível a elaboração de modelos matemáticos representativos, que considerem deformações variando linearmente ao longo da seção eliminando descontinuidades. Outra característica importante se trata do coeficiente de dilatação térmica que são aproximadamente iguais nos dois materiais, criando assim baixas tensões internas, quando o compósito é sujeito a variações de temperatura. O aço, por estar imerso no concreto, possui uma excelente proteção contra corrosão, desde que, seus revestimentos mínimos necessários sejam respeitados (Araújo 2010).

## **2.1. Viga contínua**

A norma NBR 6118/2007 sugere a modelagem de edifícios de concreto armado utilizando um sistema mais refinado, que é um modelo de pórtico espacial representando vigas e pilares modelados por elementos de pórtico 3D e lajes modeladas por elementos de placas e cascas.

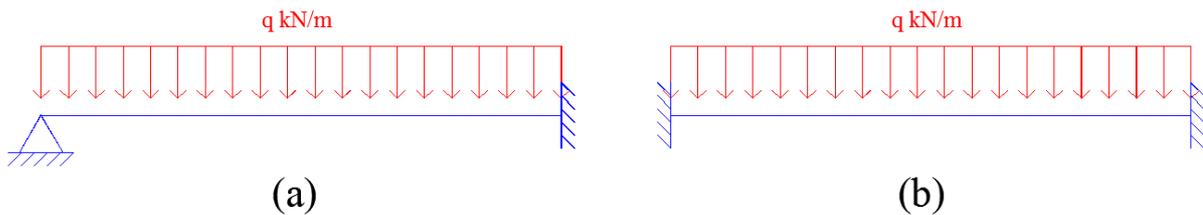
Algumas modificações com o intuito de simplificar a análise podem ser feitas de modo que o modelo antes tridimensional poderá ser tratado utilizando elementos de pórticos planos, dessa forma, a modelagem é realizada a um custo computacional menor.

Visando simplificar ainda mais a modelagem, esta poderá ser realizada utilizando um sistema de vigas contínuas ao longo do pavimento, desde que três exigências que busquem suprir certas deficiências deste tipo de modelo sejam cumpridas.

1. Nos vãos externos das vigas de CA não pode ser considerado um momento fletor positivo menor do que o obtido considerando seu apoio interno como engaste. Nos vãos internos não se pode considerar um momento fletor positivo menor do que o obtido engastando-se seus dois apoios;

Para um melhor entendimento a Figura 1 ilustra as duas situações acima citadas. Para vãos que estejam em contato com o apoio externo deverá ser considerado um modelo de viga tal qual esteja expresso em (a). Caso a viga esteja situada entre apoios internos o modelo utilizado deverá ser o expresso em (b). As equações de momento máximo para (a) e (b) estão expressas em (1) e (2) respectivamente.

Figura 1. Modelos de vigas para o cálculo de engastamento perfeito



Fonte: Elaborado pelo autor

$$M_{eng,a} = \frac{9 \cdot q \cdot l^2}{128} \quad (1)$$

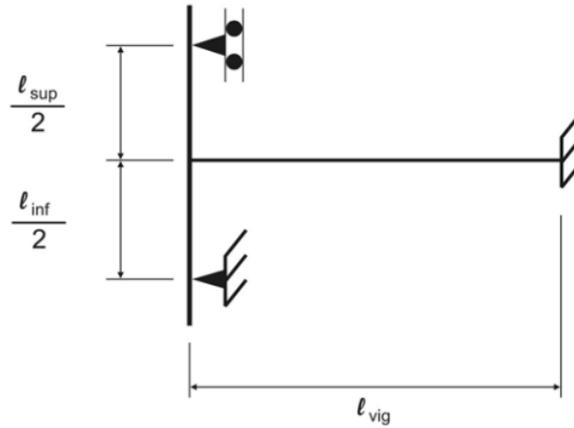
$$M_{eng,b} = \frac{q \cdot l^2}{24} \quad (2)$$

2. Em vigas que atuem solidárias com pilares intermediários cujas larguras medidas na direção da viga sejam maiores que 25% da altura do pilar no próximo pavimento tipo, não poderão ter um momento total absoluto menor que o obtido engastando os apoios que obedecem a relação supracitada;
3. Nos apoios externos das vigas, deverá ser considerado um momento mínimo de engastamento de acordo com a equação (3).

$$M = M_{eng} \cdot \left( \frac{r_i + r_s}{r_i + r_s + r_{vig}} \right) \quad (3)$$

Para esta última exigência, é realizado uma análise estrutural considerando o modelo representado na Figura 2.

Figura 2. Modelo estrutural de ligação pilar/viga/pilar



Fonte: NBR 6118/2007

Aplicando-se o método das forças no pórtico acima, é possível obter um momento atuante na ligação da viga ao pilar, no valor expresso em (4).

$$M = M_{eng} \cdot \left( \frac{6 \frac{I_i}{l_i} + 6 \frac{I_s}{l_s}}{6 \frac{I_i}{l_i} + 6 \frac{I_s}{l_s} + 4 \frac{I_{vig}}{l_{vig}}} \right) \quad (4)$$

onde  $I_i$ ,  $I_s$  e  $I_{vig}$  correspondem as inércias do pilar inferior, pilar superior e viga respectivamente, de forma análoga,  $l_i$ ,  $l_s$  e  $l_{vig}$  são os comprimentos dos pilares e da viga.  $M_{eng}$  é o momento de engastamento perfeito.

Desta forma, é possível considerar as relações expressas em (5), (6) e (7) entre os coeficientes  $r_i$ ,  $r_s$  e  $r_{vig}$  e suas inércias.

$$r_i = 6 \frac{I_i}{l_i} \quad (5)$$

$$r_s = 6 \frac{I_s}{l_s} \quad (6)$$

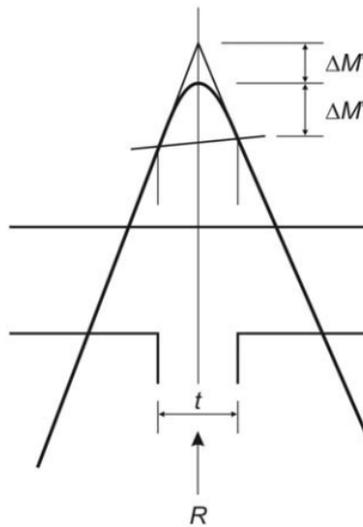
$$r_{vig} = 4 \frac{I_{vig}}{l_{vig}} \quad (7)$$

Os valores acima listados também são encontrados em Araújo (2010), entretanto, valores diferentes são encontrados na norma, mesmo em sua mais nova edição NBR 6118/2014.

## 2.2. Arredondamento do DMF sobre apoios internos

O modelo de viga contínua considera as reações ( $R$ ) dos apoios como cargas pontuais, entretanto, a norma NBR 6118/2007 permite um arredondamento do DMF considerando a reação  $R$  distribuída ao longo do comprimento do pilar ( $t$ ) no sentido da viga. A Figura 3 ilustra uma seção de uma viga contínua apoiada sobre um pilar.

Figura 3. Arredondamento do gráfico de momentos fletores



Fonte: NBR 6118:2007

O arredondamento  $\Delta'_m$  do DMF pode ser expresso segundo a expressão

$$\Delta m' = \frac{R \cdot t}{8} \quad (8)$$

## 2.3. Dimensionamento de vigas de concreto armado

Para o dimensionamento das vigas de concreto armado, certas hipóteses são consideradas, citam-se: a consideração de elasticidade do material, que deverá obedecerá às leis de Hooke e comportar-se em um regime linear elástico, pequenas deformações para o material e visando simplificar o modelo, considera-se ainda que o material se comporte de maneira isotrópica.

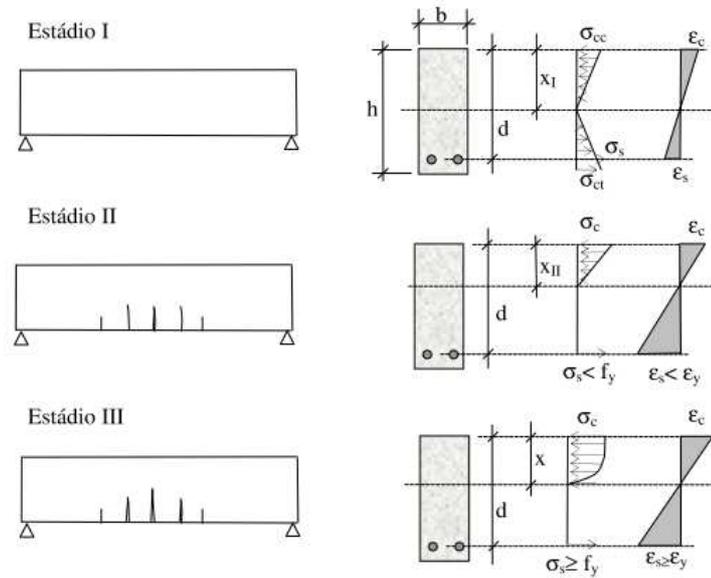
Segundo Araujo (2010) a hipótese das seções planas é considerada impondo assim que uma seção transversal ao eixo do elemento estrutural indeformado permanecerá transversal a este após a deformação. Como consequência desta consideração, as deformações nas fibras da seção da viga variarão diretamente proporcionais a distância da linha neutra. Não é considerado nenhum tipo de escorregamento ou deslocamento relativo entre o aço e o concreto, de forma a garantir uma aderência perfeita entre estes dois materiais. Não é considerada a contribuição do concreto no tocante a resistência a tração da peça, garantindo-se assim que somente o aço resistirá a este esforço.

A NBR 6118/2007 define como elemento linear todo aquele em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal. O elemento linear cujo esforço preponderante é a flexão é denominado de viga.

### **2.3.1. Comportamento da seção**

São citados por Carvalho (2009) três estádios definidos na norma em que a viga poderá se deformar. No estágio I, o concreto ainda não atingiu sua resistência característica à tração, portanto seu diagrama de tensão normal é linear elástico, ao longo de sua seção, e a peça não apresenta fissuras. No estágio II, que se trata do estágio de fissuração, a resistência limite de tração do concreto é ultrapassada e fissuras começam a aparecer na parte inferior da viga. No estágio III, que pode ser definida como uma situação extrema, temos que as fissuras se aproximam da linha neutra, o concreto se deforma de 2 ‰ a 3,5 ‰ sem aumento de tensão e segundo a norma, pode-se supor que a distribuição de tensões no concreto ocorra segundo um diagrama parábola-retângulo. A Figura 4 ilustra os estádios que a viga poderá ser submetida.

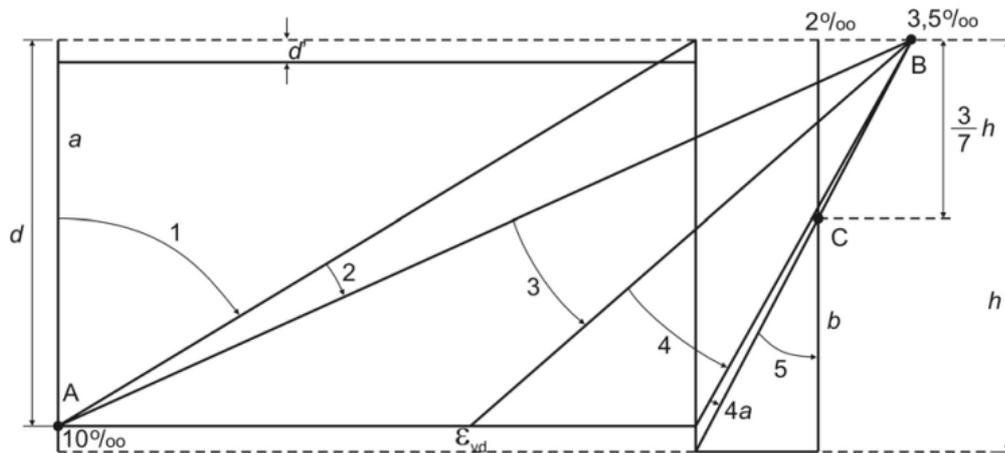
Figura 4. Estádios de uma viga de concreto armado



Fonte: [http://www.narbal.ecv.ufsc.br/Concreto\\_3\\_ECV/Verificações%20do%20ELS.pdf](http://www.narbal.ecv.ufsc.br/Concreto_3_ECV/Verificações%20do%20ELS.pdf)

Segundo a NBR 6118:2007 no ELU existem de seis padrões ou domínios de deformação possíveis de ruptura. (Figura 5).

Figura 5. Domínios de deformação do estado limite-último



Fonte: NBR 6118:2007

Como se pode notar cada domínio indica um tipo de ruptura, bem como a predominância de certo tipo de ação. A explicação sobre cada domínio será citada adiante e será de grande importância durante o processo de otimização.

No domínio 1, a seção é submetida apenas a esforços de tração, portanto, apenas a seção de aço trabalha, visto que a resistência à tração do concreto é desprezada. O estado limite último é caracterizado pela deformação excessiva do aço em  $\epsilon = 10\text{‰}$  e a ruptura da seção

acontece de forma dúctil. Na Figura 5, a seção gira em torno do vértice “A” e vai de  $\varepsilon = 10\text{‰}$  a  $\varepsilon = 0\text{‰}$ .

No domínio 2, o aço se deforma de  $10\text{‰}$  e o concreto apresenta uma variação em seu encurtamento entre  $0\text{‰}$  e  $3,5\text{‰}$  atingindo seu escoamento. A seção resistente compõe-se de concreto comprimido e aço tracionado e a seção prossegue a girar em torno do vértice “A”.

Segundo Carvalho (2009), as seções que chegam ao estado-limite último no domínio 3, apresentam grandes deslocamentos antes de sua ruína e são denominadas de sub armadas. Conforme a Figura 5, a seção passa a girar em torno de “B” mantendo uma deformação constante para o concreto de  $3,5\text{‰}$  e variando a do aço de  $10\text{‰}$  até sua deformação específica de escoamento. A seção atinge seu rompimento apresentando o simultâneo esmagamento do concreto e o escoamento do aço, por isso é considerada por alguns autores (Clímaco, Carvalho) como a situação ideal, pois os dois materiais são utilizados em seu potencial máximo.

O domínio 4 é conhecido pelo fato de possuir uma seção superarmada, e é caracterizado por uma ruptura frágil do concreto, pois, este se rompe antes que a armadura entre em escoamento, não apresentando assim, grandes deformações ou fissuração na peça que alertem os usuários, desta forma, é razoável evitar seções dimensionadas neste domínio. A seção gira em torno do vértice “B”, mantendo assim a deformação do concreto constante a um valor de  $3,5\text{‰}$  e a do aço varia do escoamento até zero.

O domínio 4a tem início quando a armadura inferior inicialmente tracionada passa a ser comprimida e termina quando a fibra mais afastada da zona comprimida de concreto passa a ser comprimida, a deformação do concreto permanece constante a um valor de  $3,5\text{‰}$ . Vale ressaltar que mais uma vez a ruptura será frágil e tal qual o domínio 4, a seção não apresentará grandes deformações ou fissurações.

O domínio 5 é denominado de compressão não uniforme e não apresenta nenhum ponto tracionado, desta forma, a linha neutra não corta a seção. A reta passa a girar em torno de “C” e seus limites são definidos como o encurtamento do concreto de  $3,5\text{‰}$  a  $2\text{‰}$  e o alongamento do aço de  $0\text{‰}$  a  $2\text{‰}$ .

### **2.3.2. Dimensionamento de vigas a flexão simples**

Para o dimensionamento de uma seção pelo método tradicional, é necessário que sejam definidos os valores dos esforços que atuam nesta, para isto, se deve considerar a hipótese teoria de Euler-Bernoulli. Valores para as dimensões da seção são definidos usualmente

segundo a experiência do projetista, ou ainda seguindo uma heurística desenvolvida no ambiente de escritório. As áreas de aço necessárias que trabalham tracionadas e comprimidas bem como as alturas das linhas neutras são definidas através da satisfação dos critérios de equilíbrio de forças e de momentos seção a seção.

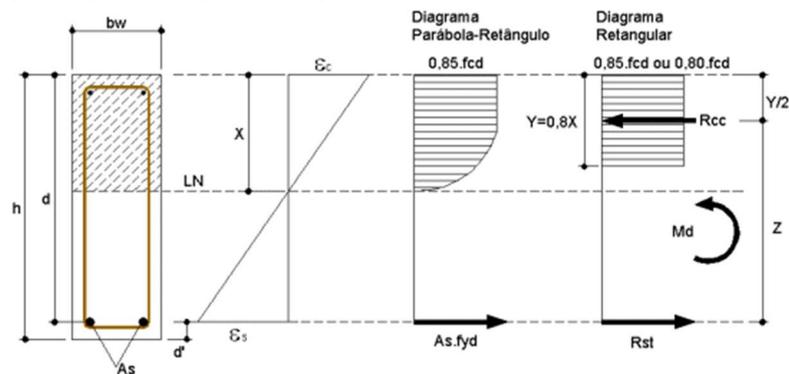
As vigas de concreto armado possuem diversas formas e diferentes distribuições de armadura, entretanto, o presente estudo considerou as vigas de concreto armado em duas formas distintas:

1. Seção retangular com armadura simples;
2. Seção retangular com armadura dupla;

### 2.3.3. Seção retangular com armadura simples

A Figura 6 ilustra um esquema em uma seção retangular onde existem duas tensões atuantes: a de compressão no concreto, com resultante  $R_{cc}$ , a de tração no aço, com resultante  $R_{st}$ . As tensões de compressão atuantes na seção de concreto possuem um formato de parábola-retângulo, entretanto, é permitido pela NBR 6118 a simplificação do parábola-retângulo pelo diagrama retangular que, possui valores bem aproximados.

Figura 6. Equilíbrio para seções retangulares simplesmente armadas



Fonte: <http://faq.altoqi.com.br/content/268/651/pt-br/dimensionamento-de-vigas-a-flex%C3%A3o-simples.html>

Supondo que a seção trabalhe entre os domínios 2 e 3, teremos que as forças resultantes das tensões atuantes no concreto e no aço estão expressas em (9) e (10) e são funções de seus valores de escoamento de cálculo e de sua geometria.

$$R_{CC} = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \quad (9)$$

$$R_{ST} = A_{st} \cdot f_{yd} \quad (10)$$

onde  $b_w$  é a base da viga,  $f_{cd}$  é a tensão de escoamento de cálculo do concreto,  $x$  é a altura da linha neutra,  $A_{st}$  a área de aço tracionada e  $f_{yd}$  a tensão de escoamento de cálculo do aço.

Para satisfazer o critério de equilíbrio de forças, temos que a resultante de compressão expressa em (9) deverá ser igual em módulo a força de tração no aço expressa em (10).

Na filosofia de projeto tradicional, considera-se a igualdade entre momentos solicitantes e resistentes. Substituindo-se o valor de  $R_{cc}$  de acordo com a equação (9), se obtém (12) que é utilizada para a determinação da altura da linha neutra.

$$M_{res} = R_{CC} \cdot z \quad (11)$$

$$M_{Sd} = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd} \quad (12)$$

onde  $z$  é dado por:

$$z = d - 0,4 \cdot x \quad (13)$$

A área de aço necessária é então

$$A_s = \frac{M_{Sd}}{z \cdot f_{yd}} \quad (14)$$

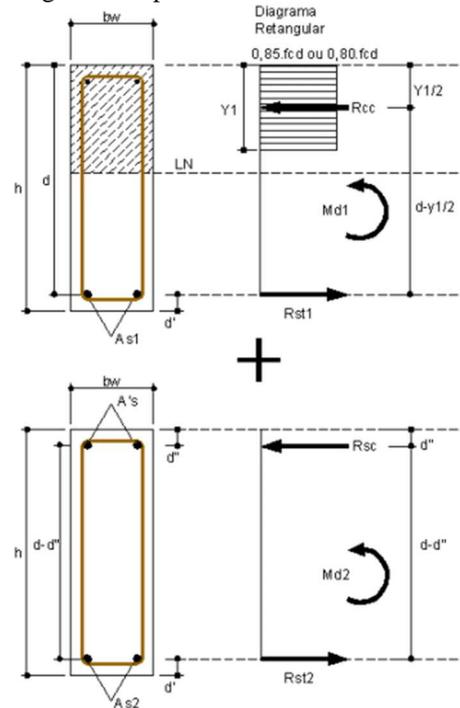
#### 2.3.4. Seção retangular com armadura dupla

A armadura dupla é utilizada quando as dimensões escolhidas para a seção não conseguem resistir ao esforço utilizando apenas armaduras simples, desta forma, pode-se variar as dimensões da seção ou utilizar armadura dupla para adicionar mais resistência a seção.

A Figura 7 ilustra uma seção duplamente armada de concreto resistindo a um momento  $M_{Sd}$ , que corresponde a soma dos momentos  $M_{d1}$  e  $M_{d2}$ . Uma das estratégias para o dimensionamento pelo método de projeto tradicional, é estabelecer uma altura da linha neutra na seção que, usualmente, é o limite entre os domínios 3 e 4, onde, os dois materiais trabalham simultaneamente perto de seu escoamento. A área de aço tracionada e a área de concreto comprimida definida até então atua com um momento  $M_{d1}$  na seção.

Ao adicionar a parcela relativa à armadura comprimida, é necessário garantir que a linha neutra da seção permaneça com o mesmo valor designado anteriormente, caso contrário, os valores obtidos de  $M_{d1}$  variarão. Um artifício comumente utilizado é adicionar uma parcela  $A_{s2}$  de aço tracionado na seção e garantir a igualdade entre a força resultante no aço comprimido ( $R_{sc}$ ) e no aço tracionado ( $R_{st2}$ ).

Figura 7. Equilíbrio para seções retangulares duplamente armadas



Fonte: <http://faq.altoqi.com.br/content/268/651/pt-br/dimensionamento-de-vigas-a-flex%C3%A3o-simples.html>

As forças atuantes na seção podem ser expressas por:

$$R_{CC} = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \quad (15)$$

$$R_{ST} = A_{s1} \cdot f_{yd} \quad (16)$$

$$R_{SC} = A'_s \cdot f'_\sigma \quad (17)$$

$$R_{ST2} = A_{s2} \cdot f_{yd} \quad (18)$$

onde  $f'_\sigma$  é a tensão atuante na barra de aço comprimida e poderá ser a tensão de escoamento do aço caso sua deformação seja superior a  $\epsilon_{yd}$  e pode ser obtido através de .

$$\epsilon'_s = \frac{\epsilon_c \cdot (x - d')}{x} \quad (19)$$

As equações que descrevem o equilíbrio de momentos são abaixo listadas.

$$M_{sd} = M_{d1} + M_{d2} \quad (20)$$

$$M_{d1} = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd} \quad (21)$$

$$M_{d2} = A'_s \cdot (d - d') \cdot f'_\sigma \quad (22)$$

Dado que o valor da altura da linha neutra foi escolhida anteriormente pelo projetista, a aplicação da equação (21) tem como resultado o valor do momento  $M_{d1}$ , substituindo em (20), pode-se obter o valor de  $M_{d2}$ . Conhecendo-se os dois momentos fletores, pode-se conhecer a área de aço através de

$$A_s = \frac{M_{d1}}{z \cdot f_{yd}} + \frac{M_{d2}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (23)$$

onde  $z$  é o braço de alavanca definido em (13).

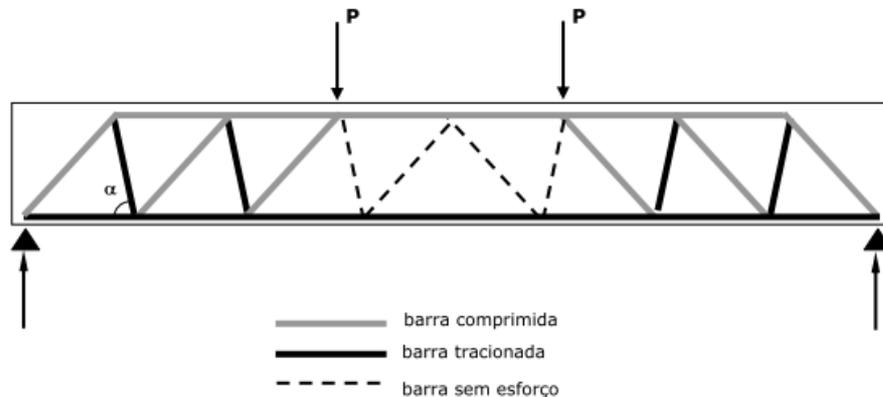
$$A'_s = \frac{M_{d2}}{(d - d') \cdot f'_\sigma} \quad (24)$$

### 2.3.5. Dimensionamento do elemento linear quanto ao cisalhamento

Para pequenos carregamentos que permitam que a viga trabalhe no estágio I as tensões de cisalhamento se comportam de maneira relativamente simples, entretanto, quando o concreto começa a apresentar fissurações e passa a trabalhar no estágio II, complexos rearranjos internos de tensões ocorrem sendo necessário assim utilizar uma análise mais apurada para entender o comportamento da seção (Carvalho, 2009).

Visando obter métodos para resolver a complexidade deste problema, os cientistas alemães W. Ritter e E. Mörsch propuseram um modelo no qual a viga fissurada trabalhava de forma análoga a uma treliça (Clímaco, 2005). Esta treliça é composta por banzos de concreto comprimido na área superior, barras de aço (armadura longitudinal) trabalhando como tirantes na área inferior, diagonais de aço (estribos) tracionadas e bielas comprimidas de concreto (Ribeiro, 2005). A Figura 8 representa o esquema de funcionamento do campo de tensões acima descrito.

Figura 8. Representação do campo de tensões em um elemento linear exposto a carga concentrada



Fonte: [http://professor.ucg.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/c31\\_cisalhamento.pdf](http://professor.ucg.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/c31_cisalhamento.pdf)

O dimensionamento da armadura de cisalhamento se baseia nos princípios apresentados por Morsch, acrescido de algumas modificações. Mesmo após o desenvolvimento de novas tecnologias, como o advento de concretos mais resistentes, utilização de barras de aço corrugadas, o modelo proposto ainda apresenta resultados consistentes (Carvalho, 2009).

Para que o elemento estrutural resista a carregamentos diversos, é necessário que as diagonais comprimidas e tracionadas permaneçam em equilíbrio, ou seja, as forças resistentes da seção deverão ser maiores que os esforços solicitantes. A diagonal tracionada é resistida por estribos, que costuram a seção. A diagonal comprimida é resistida pelo somatório das contribuições do efeito de pino das armaduras de flexão e engrenamento dos agregados.

Segundo a NBR 6118, existem dois modelos que podem ser utilizados para o cálculo da armadura de cisalhamento, entretanto, dado que este estudo utiliza apenas o modelo de cálculo I, o modelo de cálculo II não será citado.

### 2.3.6. Modelo de cálculo I

A modelagem da norma limita a utilização de ambos os modelos de cálculo para o caso em que a resistência do concreto é menor ou igual a 50 MPa, além disso, é adicionado um fator de fragilidade do concreto ( $\alpha_{v2}$ ) dado por (NBR 6118).

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (25)$$

A NBR 6118 impõe duas verificações que garantem que a seção não atingirá a ruína. A satisfação da inequação (26) garante que a biela de concreto resistirá ao esmagamento e a inequação (27) garante que não haverá ruína por tração diagonal.

$$V_{sd} \leq V_{rd2} \quad (26)$$

$$V_{sd} \leq V_c + V_{sw} \quad (27)$$

onde  $V_{sd}$  é força cortante resistente de cálculo,  $V_{rd2}$  é a força cortante resistente de cálculo relativo a ruína das diagonais comprimidas do concreto,  $V_c$  é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares,  $V_{sw}$  é a resistência da armadura tracionada (estribos).

O modelo de cálculo I considera que as diagonais de compressão possuem um ângulo de 45° em relação ao eixo longitudinal da viga e que o valor de  $V_c$  é constante e independente do valor do cortante solicitante  $V_{sd}$ . Assim,  $V_{rd2}$  é dado por

$$V_{rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (28)$$

e  $V_c$  e  $V_{sw}$  são dados por

$$V_c = 0,09 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \cdot b_w \cdot d \quad (29)$$

$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \quad (30)$$

### 2.3.7. Prescrições normativas

Para elementos lineares submetidos à força cortante, a norma impõe a utilização de uma armadura mínima de cisalhamento, exceto em casos em que a dimensão da base do elemento seja maior que 5 vezes a altura útil deste. A taxa de armadura mínima  $\rho_{sw90,min}$  é dada em (31).

$$\rho_{sw90,min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (31)$$

onde  $f_{ctm}$  é a resistência média a tração no concreto,  $f_{ywk}$  é o valor característico do aço ao escoamento.

O espaçamento entre estribos medidos no eixo longitudinal da viga é restrito a um espaçamento mínimo (8 cm) que permita a passagem do vibrador e um espaçamento máximo que garanta que a diagonal tracionada seja interceptada por estribos. A equação (32) representa o espaçamento máximo.

$$s_{\max} \leq \begin{cases} \begin{cases} 0,6 \cdot d \\ 30 \text{ cm} \end{cases} & \text{se } V_{sd} \leq 0,67 \cdot V_{Rd2} \\ \begin{cases} 0,3 \cdot d \\ 20 \text{ cm} \end{cases} & \text{se } V_{sd} > 0,67 \cdot V_{Rd2} \end{cases} \quad (32)$$

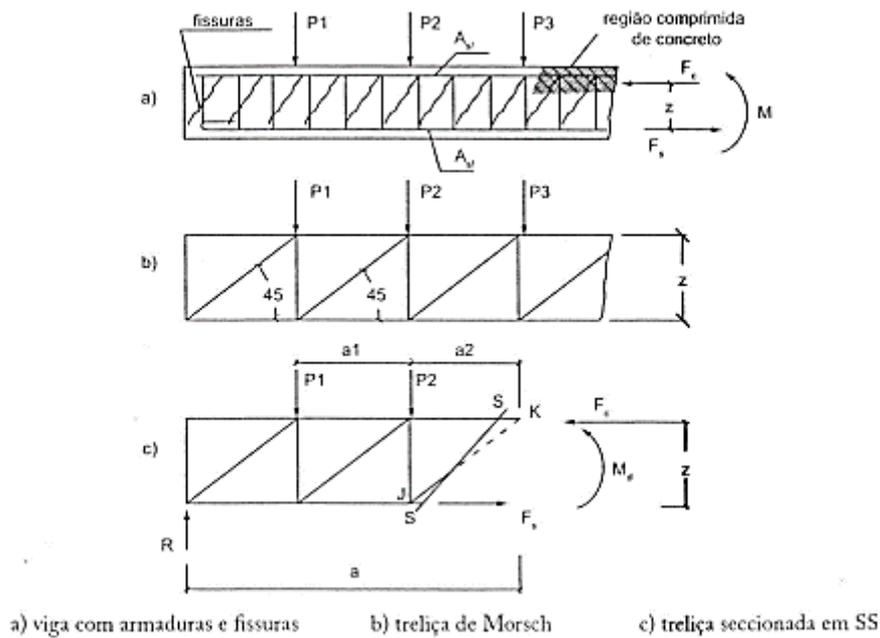
A norma limita também o espaçamento transversal entre ramos dos estribos de acordo com

$$s_{t,\max} \leq \begin{cases} \begin{cases} d \\ 80 \text{ cm} \end{cases} & \text{se } V_{sd} \leq 0,20 \cdot V_{Rd2} \\ \begin{cases} 0,6 \cdot d \\ 35 \text{ cm} \end{cases} & \text{se } V_{sd} > 0,20 \cdot V_{Rd2} \end{cases} \quad (33)$$

### 2.3.8. *Deslocamento do diagrama de momentos fletores*

A Figura 9 representa o modelo generalizado de Morsch em uma viga.

Figura 9. Modelo de treliça de Morsch



Fonte: Carvalho (2009)

Realizando-se o equilíbrio de momentos no ponto \$k\$ (Figura 9.c), temos

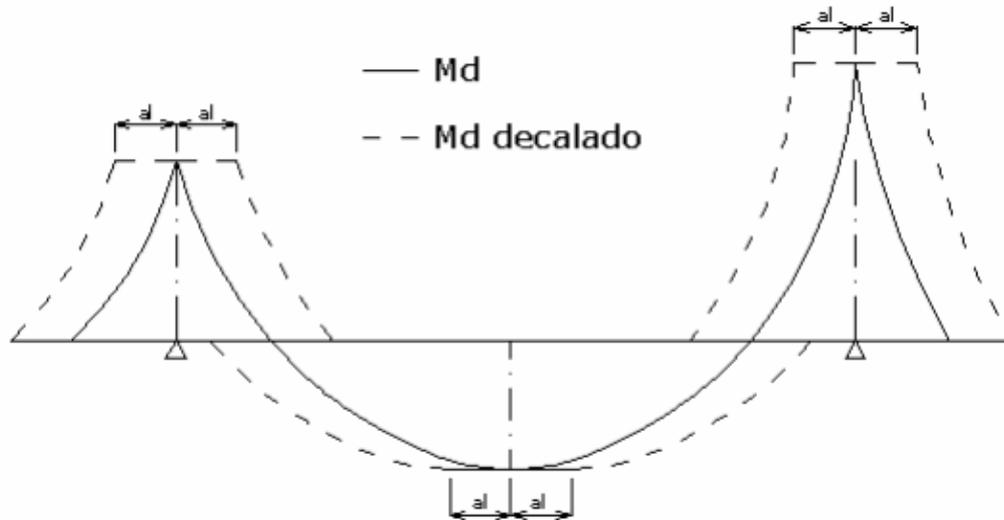
$$F_s \cdot z = R \cdot a - P_1 \cdot (a_1 + a_2) - P_2 \cdot a_2 \quad (34)$$

A parcela a esquerda da equação (34) é numericamente igual ao valor do momento fletor de cálculo (\$M\_{Sd,j}\$) e sua área de aço é dada por

$$A_s = \frac{M_{Sd,j}}{z \cdot f_{yd}} \quad (35)$$

Utilizando-se o modelo de bielas e tirantes, nota-se que a força \$F\_s\$ é constante para os pontos \$j\$ e \$k\$, pois ambas são representadas pela mesma barra tracionada. Dado que \$M\_{Sd,j} > M\_{Sd,k}\$ a armadura longitudinal da viga poderia ser dimensionada contra a segurança. Este problema poderá ser evitado deslocando-se o diagrama de momentos fletores a uma distância \$a\_{li}\$ no sentido mais desfavorável (Carvalho, 2009). A Figura 10 ilustra um gráfico do momento fletor decalado de \$a\_l\$.

Figura 10. Decalagem do momento fletor



Fonte: [http://professor.ucg.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/c36\\_detalhamento%20da%20armadura%20longitudinal%20vigas.pdf](http://professor.ucg.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/c36_detalhamento%20da%20armadura%20longitudinal%20vigas.pdf)

O valor de  $a_1$  para estribos verticais pode ser calculado através de

$$a_1 \geq \begin{cases} d \left( \frac{V_{sd, \max}}{2 \cdot (V_{sd, \max} - V_c)} \right) \\ 0,5 \cdot d \end{cases} \quad (36)$$

### 2.3.9. Ancoragem por aderência de barras de aço

A aderência entre o aço e o concreto é um fenômeno que viabiliza a utilização do concreto armado, através deste pode-se garantir que não exista descontinuidades entre as deformações em uma seção, garantindo assim que os materiais atuem juntos. A aderência garante ainda que as barras de aço não deslizem dentro da seção de concreto, garantindo assim que os esforços de tração sejam absorvidos pelo aço. A aderência é composta por três parcelas: a adesão, o atrito e o engrenamento.

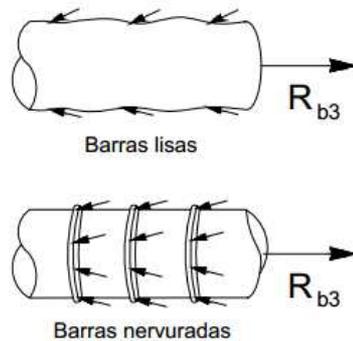
A adesão ocorre devido a tensões capilares na interface entre o concreto e o aço produzidos durante o processo de pega do cimento, possuindo uma natureza físico-química. Esta ligação pode ser destruída caso haja algum deslocamento relativo entre os dois materiais.

O atrito é um fenômeno de mecanismo físico que atua na superfície do aço e do concreto, esta tensão atua quando existe uma tendência de movimento relativo entre os dois materiais e seu efeito pode ser potencializado aumentando-se a tensão de compressão entre o

concreto e o aço, desta forma, o atrito é maior nas regiões próximas aos apoios e nas partes curvas das barras, os efeitos da retração do concreto podem vir também a aumentar a tensão por atrito (Carvalho, 2009).

O engrenamento se dá devido a pequenas saliências contidas na superfícies das barras de aço. Estas saliências formam dentes que “empurram” o concreto quando existe uma tendência de deslocamento relativo entre os dois materiais. A Figura 11 ilustra o mecanismo de funcionamento do engrenamento.

Figura 11. Ancoragem por engrenamento



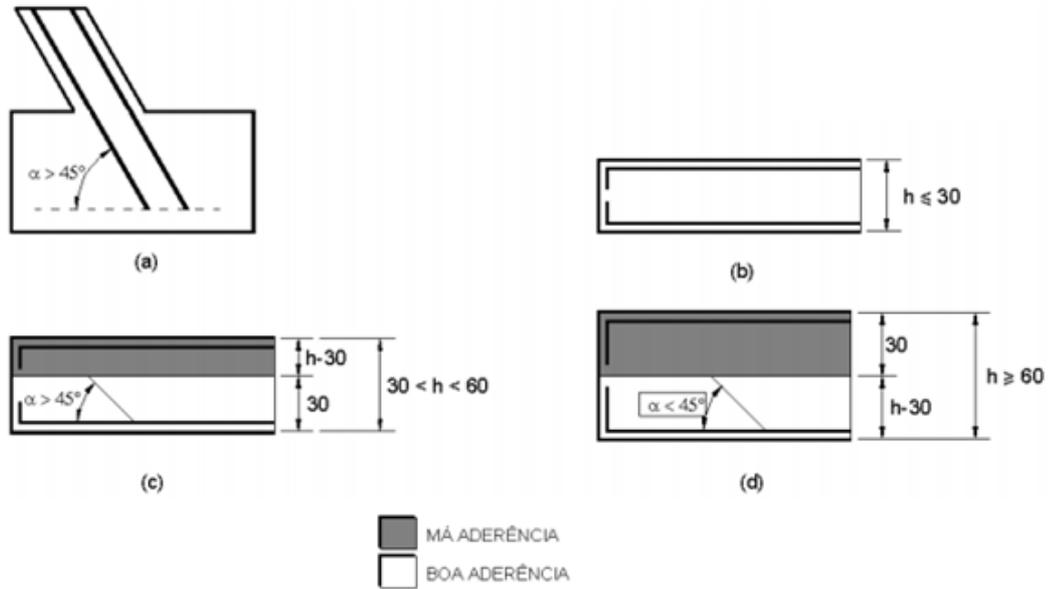
Fonte: Fusco (2000)

A norma NBR 6118 (2007) destaca que a posição das barras também influenciará o comprimento de ancoragem. Para barras verticais, ou que façam com a diagonal um ângulo maior que  $45^\circ$ , podem ser considerados boas condições de ancoragem. Para barras horizontais, podem ser considerados situações de boa ancoragem:

1. Barras em vigas de altura menor ou igual a 30 cm;
2. Barras situadas a 30 cm do fundo da viga, desde que a altura da viga seja menor que 60 cm;
3. Barras situadas a  $h - 30$ , desde a altura ( $h$ ) da viga seja maior ou igual a 60 cm.

A Figura 12 ilustra as condições de boa e má ancoragem, as quais uma barra pode estar submetida.

Figura 12. condições de boa e má aderência



Fonte: adaptado de Promon (1976)

A norma permite a consideração de boa aderência para uma viga com  $h > 60\text{cm}$  se este elemento for concretado em etapas, desde que a altura de cada etapa não ultrapasse 30cm e que exista um intervalo de tempo suficiente entre cada camada para que o concreto do trecho anterior possua uma consistência que não permita a fuga de nata de concreto (Carvalho, 2010)

O comprimento de aderência é dado em relação a tensão suportada pela barra e pela superfície lateral desta. Assim, tem-se:

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \quad (37)$$

onde  $f_{bd}$  é a resistência de aderência de cálculo, que

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} \quad (38)$$

onde  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$  são fatores que dependem do tipo de barra, das condições de ancoragem e do diâmetro da barra e  $f_{ctd}$  é o valor de cálculo da resistência a tração. Os valores de  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  e  $f_{ctd}$  são dados respectivamente por

$$\eta_1 = \begin{cases} 1,0 & \text{para barras lisas} \\ 1,4 & \text{para barras entalhadas} \\ 2,25 & \text{para barras de alta aderência} \end{cases} \quad (39)$$

$$\eta_2 = \begin{cases} 1,0 & \text{Boa aderência} \\ 0,7 & \text{Má aderência} \end{cases} \quad (40)$$

$$\eta_2 = \begin{cases} 1,0 & \phi < 32mm \\ \left(\frac{132 - \phi}{100}\right) & \phi \geq 32mm \end{cases} \quad (41)$$

$$f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{(f_{ck})^2}}{\gamma_c} \quad (42)$$

A norma impõem ainda que no mínimo 2 barras ou pelo menos 1/3 do total de barras da seção cheguem aos apoios. A NBR 6118 impõe ainda que as barras de aço penetrem no mínimo  $10\phi$  dentro dos apoios.

### 3. OTIMIZAÇÃO

Snyman (2005) afirma que otimização é a ciência de encontrar a melhor solução para problemas matematicamente definidos, e Segundo Yang (2010) um problema de otimização pode ser escrito na forma

$$\text{Min} \rightarrow f(\mathbf{x}) \quad (43)$$

Sujeito a

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \therefore j = 0, 1, 2 \dots n \quad (44)$$

$$g_k(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \therefore k = 0, 1, 2 \dots m \quad (45)$$

$$x_i^U \leq x_i \leq x_i^L \quad (46)$$

onde  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{nvar}]^T$  representa o vetor de variáveis de projeto,  $f(\mathbf{x})$  representa a função objetivo podendo ser linear ou não linear, as funções  $h_j(\mathbf{x})$  e  $g_k(\mathbf{x})$  representam as funções de restrição que definem o espaço de soluções viáveis do problema.

Silva (2001) afirma que a programação matemática clássica pode ser dividida em duas grandes áreas: a programação linear que trata problemas em que todas as equações são lineares e a programação não linear onde a função objetivo ou pelo menos uma das restrições são não lineares. A programação não linear é dividida em diversas outras áreas como por exemplo métodos unidimensionais ou multidimensionais para problemas sem restrição e ainda método das penalidades, ou das barreiras para problemas com restrições. O vetor das variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ , podem conter valores contínuos, nesse caso, sua descrição depende unicamente dos limites laterais ( $x_i^U$  e  $x_i^L$ ), ou discretos e nesse caso a equação (46) é modificada para

$$x_i \in [x_{i_1} \ x_{i_2} \ \dots \ x_{i_{n_j}}] \quad (47)$$

onde  $n_j$  representa o número de elementos do vetor  $x_i$ .

### 3.1. Programação clássica

Algoritmos de programação matemática clássica são baseados em informações dos gradientes ou derivadas primeiras das funções objetivos e restrições. Executam uma busca dentro do espaço de projeto onde, em cada passo a partir de um ponto dado, definem-se uma direção de busca e um passo. Estes métodos, usualmente utilizam a equação da recorrência, dada por

$$x^k = x^{k-1} + \alpha^k \cdot d^k \quad (48)$$

onde  $\alpha$  é o passo,  $d$  a direção de busca e  $k$  representa o número da interação.

Snyman (2005) afirma que a história da otimização matemática teve início no final de 1940 quando o método simplex foi desenvolvido, a partir deste marco inicial diversos métodos de otimização foram desenvolvidas e testadas. Entretanto, apesar deste crescimento não existe um algoritmo que funcione perfeitamente para todos os casos, restando ao formulador do problema a responsabilidade de escolher o algoritmo a ser usado.

Chong e Zak (2001) afirmam que entre as desvantagens dos algoritmos de programação matemática, está a possibilidade de convergência para um mínimo local. Desta forma não existe garantias de que o resultado alcançado seja o ótimo global dentro do espaço de projeto viável. Algumas estratégias podem ser realizadas, como executar a otimização diversas vezes começando de pontos iniciais diferentes, ou mesmo, testando-se as condições de kuhn Tucker. Apesar destas desvantagens, os algoritmos de programação matemática são usualmente mais leves e eficientes.

### 3.2. Otimização de vigas de concreto armado

Diversos modelos de otimização foram propostos, algumas abordagens tratavam o problema de forma contínua e após o processo de otimização eram realizadas alterações na solução para adapta-la a realidade de projeto. Outros modelos utilizavam variáveis discretas e incluíam em sua formulação a topologia das barras de aço.

Sarma e Adeli (1998) realizaram um trabalho contendo um resumo do modelo de otimização de diversos autores. Através deste estudo, pode-se notar um crescente refinamento nas formulações ao longo do tempo.

### 3.2.1. *Otimização de dimensão*

Rao (1973) foi um dos pioneiros na otimização estrutural com um modelo para otimização de vigas de concreto armado visando minimizar o custo total que era composto pelas somas dos custos do aço, concreto e forma. As variáveis consideradas foram a altura útil  $d$  da seção, a tensão de compressão  $f_c$  no concreto, a tensão de tração  $f_y$  no aço, a largura da viga  $b_w$  e a área de aço  $A_s$  todas contínuas. As restrições eram relativas à resistência e a valores limites das variáveis de projeto. Rao resolveu o problema através do método da penalidade interior e, inicialmente, os valores das tensões últimas do concreto e do aço foram fixadas e o problema foi reduzido a três variáveis.

Friel (1974) elaborou um modelo de otimização para vigas de concreto armado, utilizando como método de solução, os multiplicadores de Lagrange. O problema, tinha como variáveis de projeto a altura útil ( $d$ ) e a armadura longitudinal ( $A_s$ ). O autor definiu a função custo como a soma do preço do concreto, do aço e das formas e por fim um custo indireto relacionado ao número de andares da edificação. O autor concluiu em seu trabalho que o custo da forma e o custo indireto tinham pouca influência no custo total da estrutura.

Balaguru (1980) propôs um modelo para otimização de vigas duplamente armadas. Em sua formulação, o autor levou em consideração apenas os efeitos da flexão, ou seja, em relação a solicitações tangenciais ou deflexões era necessário realizar verificações após o processo de otimização. Segundo o seu trabalho, a otimização do elemento pode ser **representado pela utilização da taxa de armadura máxima** para a armadura de flexão. O algoritmo de solução utilizado foi o dos multiplicadores de Lagrange. Manipulando algebricamente as equações de dimensionamento impostas pelo ACI Code 318-77, incluindo o critério de resistência, Balaguru formulou um critério para escolha da solução mais econômica: viga simplesmente armada ou viga duplamente armada.

Chakrabarty (1992) propôs em seu trabalho um modelo de otimização de vigas de concreto armado utilizando armadura simples. O autor considerou o custo mínimo como objetivo e utilizou como variáveis de projeto a altura, a largura da base, a área de armadura, o momento fletor já contendo o efeito do peso próprio e a altura da linha neutra, entretanto, as duas últimas variáveis de projeto tornaram-se dependentes de outras durante sua formulação. Chakrabarty considerou nove restrições onde cinco são condições de não negatividade para as variáveis e as restantes se referem ao equilíbrio da seção, resistência, e limites laterais para a largura da viga. Em seu artigo foi utilizado como algoritmo de solução a programação geométrica que é um método clássico de otimização

Adamu e Karihaloo (1994) propuseram um modelo para a minimização do custo da viga, considerando apenas três variáveis de projeto: a altura, largura e a taxa de armadura. Foram consideradas restrições que levavam em consideração a deflexão máxima, resistência à compressão e o efeito do cisalhamento, utilizando como algoritmo de solução, o sistema DCOC. Em suas considerações, o autor afirmou que métodos clássicos são mais eficientes quando as restrições e as variáveis de projeto são limitadas em número, ao passo que os métodos probabilísticos tendem a ser mais eficientes quando utilizados em problemas com grande número de variáveis de projeto ou restrições indefinidas. O autor assume em sua formulação que a restrição relativa a deformação da viga estará sempre ativa.

Coello *et al* (1997) realizou um trabalho dando continuidade ao modelo de Chakrabarty (1992), o autor adicionou duas restrições a mais no intuito de viabilizar a utilização do trabalho para aplicações práticas, foram adicionadas limitações laterais para a razão entre a largura e a altura da viga na forma  $0,25 \leq b_w/h \leq 0,6$ . Coello utilizou um algoritmo diferente de otimização, tendo em vista a automatização foi utilizado o algoritmo genético como solução.

Fedghouche e Tiliouine (2012) apresentaram um modelo de minimização do custo de vigas de concreto armado com seção “T”. A sua proposta de modelagem apresenta cinco variáveis de projeto das quais quatro descrevem a geometria da seção como: altura da alma, altura do flange, largura da alma e largura do flange. A última representa a área de aço necessária para resistir a tração. O problema inclui restrições relativas a dimensão da estrutura e restrições relativas ao critério de resistência e altura da linha neutra. O autor utilizou o método dos gradientes generalizados para a busca da solução ótima. A função objetivo deste autor apresentou uma grande diferenciação das demais, isto pois não foi considerado o preço de cada insumo (concreto, aço e forma) mas foi realizado razões entre os preços, de forma a realizar uma análise de sensibilidade.

### **3.2.2. Otimização da topologia das barras**

Alguns autores consideraram a topologia das barras de aço como variáveis de projeto, desta forma, o resultado obtido foi bem mais refinado do que os autores citados no item 3.2.1.

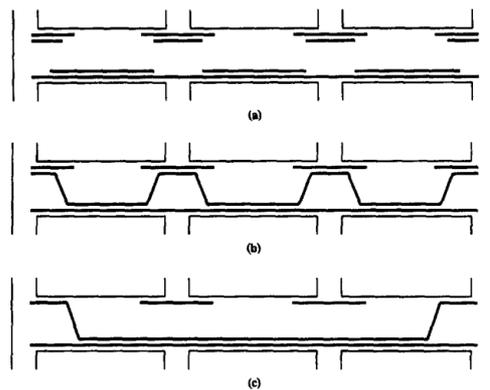
Kanagasudaram e Karihaloo (1990) foram um dos pioneiros em otimizar as posições das barras de aço em uma seção. Os autores apresentaram um modelo relativo à minimização dos custos de uma viga, que com base nos critérios da norma Australiana, intitulada *Australian Standard AS3600-1988*, considerava restrições de resistência,

estabilidade, critérios de serviço, durabilidade, resistência ao fogo, restrições laterais das dimensões da viga devido a exigências arquitetônicas, restrições devidas à distribuição de barras na seção da viga. Outro ponto a ser citado seria o fato de que a análise da resistência da seção não se limitava apenas a flexão, incluía também os efeitos dos cortantes e de cargas axiais. O modelo do autor considerava apenas um diâmetro de bitola na seção, cujas barras eram dispostas em apenas uma camada de armadura. O autor, utilizou duas ferramentas diferentes para a resolução do problema, segundo Kanagasudaram e Karihaloo (1990), ambos convergiam para o mesmo resultado, são elas: “*Sequential Linear Programming*” (SLP) e “*Sequential Convex Programming*” (SCP).

Koumosis *et al* (1995) utilizaram em sua formulação uma função multiobjetivo cujo intuito seria minimizar o peso, obter uniformidade máxima e minimizar o número de barras de aço.

Um estudo mais refinado foi apresentado por Balling e Yao (1997) que adotaram uma abordagem que levava em consideração a topologia das barras de aço na seção utilizando uma estratégia multi-nível. O processo de otimização dos autores, levava em consideração além do número e corte de barras, também a forma que essas barras possuiriam, conforme a Figura 13 que ilustra três situações diferentes para detalhes de armadura, onde, observa-se nas topologias mostradas, que aquelas que empregam bacias e cavaletes foram excluídas dos projetos atuais por razões de custo de mão de obra.

Figura 13. Topologia de diferentes distribuições de aço em uma viga



Fonte: Balling e Yao (1997)

Para a modelagem matemática da viga, foram considerados como variáveis, a altura e a largura da seção, a topologia das barras de aço, ou seja, o número de cada uma das barras que compunham a área de aço da viga, a distribuição de cada barra dentro da viga, pontos de corte e de dobramentos.

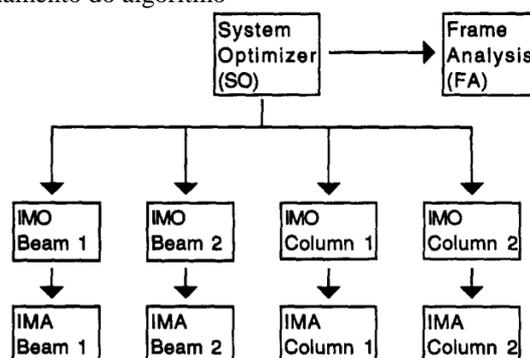
Balling e Yao (1997) realizaram a análise considerando um modelo global-local. Na primeira fase o comportamento da estrutura global era observado, para isto intitulou-se a técnica de *frame analysis* (FA), onde era utilizada uma análise linear elástica. Em seguida cada membro era analisado individualmente, o autor nomeou esta fase de *Individual Member Analysis* (IMA). Pode-se notar facilmente a existência de dois níveis de análise, o primeiro trata-se da verificação global da estrutura (FA) e a segunda trata-se de uma verificação e otimização local de cada elemento (IMA). O algoritmo ficou organizado da seguinte forma: Uma rotina intitulada *System Optimizer* (SO) é acionado e aplica a (FA) com os dados da seção a segunda fase tem início com a *Individual Member Optimization* (IMO), que trata-se de uma função que ativa a função IMA e aplica nelas os dados obtidos na FA.

A fase de otimização global apresenta como variáveis de projeto apenas a altura da seção e a largura da mesma, diminui-se o custo do concreto através da escolha da configuração que obedeça todas as restrições relativas à deformação vertical e horizontal, que tenha a menor função objetivo parcial.

A otimização local das vigas (IMA) é realizada escolhendo-se os valores das bitolas, pontos de corte, dobras, valores da armadura de cisalhamento que minimizem o custo da função objetivo. Para evitar que o número de barras de aço ultrapasse a capacidade de porte da seção, criou-se uma nova restrição que impunha que a largura necessária da viga para conter o número de barras de aço fosse menor que a largura existente obtida na fase (FA).

A Figura 14 abaixo ilustra a ordem de funcionamento do sistema.

Figura 14. Esquema de funcionamento do algoritmo



Fonte: Balling e Yao (1997)

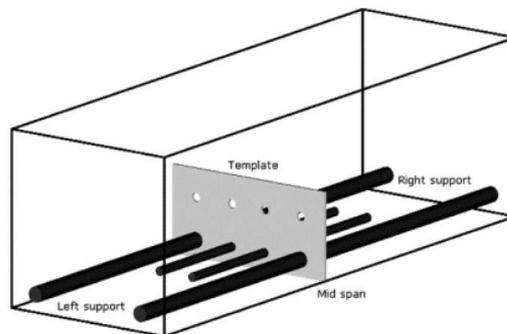
Visando diminuir o custo computacional de seu algoritmo, os autores adotaram algumas simplificações, entre elas cita-se: a limitação de apenas dois tipos de bitolas diferentes por seção, isto devido a imposições práticas de projeto, a consideração de monotonicidade da

função custo e das restrições o que permite a saída do loop assim que se nota que a função cresce em qualquer direção.

Govindaraj e Ramasamy (2005) elaboraram um modelo que realizava a análise estrutural levando em consideração três pontos para cada tramo de viga. Um no início de cada vão da viga, outro no meio de cada vão e um último no final do vão. A ideia do autor era considerar as seções críticas do elemento.

Govindaraj e Ramasamy (2005) elaboraram um modelo de minimização do custo de vigas de CA em dois estágios, no primeiro, era determinado as dimensões da seção. A área de aço necessária era obtida satisfazendo na igualdade as equações de equilíbrio e compatibilidade. O segundo estágio (interno ao primeiro) buscava uma topologia para barras de aço através de um modelo complexo que combinava até quatro tipos de bitolas e espaços vazios ou *slots* que poderiam alocar barras ou não. As combinações entre *slots* e bitolas formavam os padrões que possuíam um valor total de área de aço. A Figura 15 indica um exemplo de padrão, nota-se que os slots da camada superior encontram-se vazios, ao passo que os da camada inferior se encontram ocupadas por dois tipos diferentes de bitola.

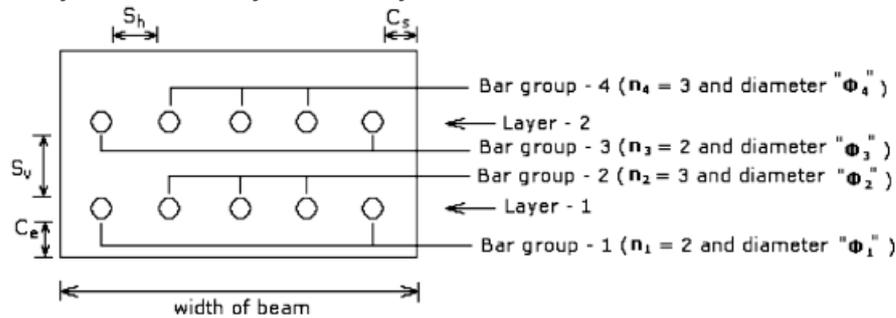
Figura 15. Padrões de distribuição de armaduras de aço



Fonte: Elaborado por Govindaraj e Ramasamy (2005)

A Figura 16 representa a armadura tracionada de uma viga e um outro exemplo de distribuição topologica de barras de aço. Pode-se notar que as barras do grupo 1 e 3 representam as bitolas que compoem as extremidades da primeira e segunda camada respectivamente. As bitolas do grupo 2 e 4 representam as armaduras que serão inseridas entre as barras do grupo 1 e 3. O número de barras do grupo 1 e 3 é constante e igual a 2, ao passo que o número de barras do grupo 2 e 4 eram variáveis e poderiam ir sendo retiradas ou colocadas conforme as interações dos padrões. Todas as combinações eram realizadas através de uma busca exaustiva e a menor área de aço viável era escolhida.

Figura 16. Distribuição de barras de aço em uma seção



fonte: Govindaraj e Ramasamy (2005)

Os autores impuseram diversas restrições que garantam que uma geometria satisfatória seja obtida, como por exemplo as bitolas do grupo 1 e 2 devem ser maiores que as dos grupos 3 e 4, as barras da extremidade devem ser maiores que as do centro.

Foi utilizado algoritmos genéticos como algoritmo de solução e no estágio interno, o autor utilizou busca exaustiva.

### 3.2.3. *Trabalhos nacionais*

Merecem destaque os trabalhos nacionais, baseados nas normas da ABNT, por propiciarem uma comparação direta, embora, face às constantes alterações, se refiram a versões antigas.

Sacoman et al (1987) apresentou seu modelo de otimização para minimização do custo de vigas contínuas de concreto armado utilizando como variáveis de projeto as alturas da seção de cada vão, as larguras foram fixadas por imposições arquitetônicas e as áreas de aço transversal e longitudinal eram definidas através da satisfação do critério de resistência no limite. Sua função objetivo levava em consideração os custos do aço, concreto e forma. As restrições eram relativas a resistência e ductilidade da seção. Para a resolução do problema, o autor utilizou o método do gradiente generalizado (GRG). Ao final do processo de otimização, o autor desenvolveu o projeto de uma viga de CA com base nos resultados obtidos pela otimização.

Soares e El Debs (1997) apresentaram um modelo de otimização de um pavimento de concreto realizando a minimização do custo de cada viga individualmente, entretanto, analisando-as de forma conjunta através do método dos elementos finitos utilizando elementos de barra e placa. O autor relata que esta minimização pode vir a ser diferente da minimização do pavimento como um todo, levando-se em conta seu comportamento como grelha, entretanto, ele afirma que em termos práticos esse resultado é satisfatório.

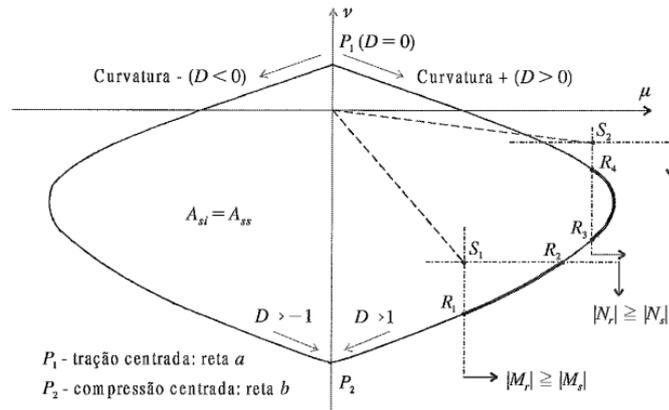
Foram utilizadas três variáveis de projeto para cada viga, cita-se: a área de armadura comprimida ( $A_s'$ ), área de armadura tracionada ( $A_s$ ) e a altura útil da viga ( $d$ ), a altura da linha neutra ( $x$ ) também é uma variável de projeto, entretanto, ela se tornará dependente de outras. A função objetivo dos autores é o custo dos materiais. Suas restrições consideram o equilíbrio e a compatibilidade da seção, a taxa de armadura em relação a área de concreto e uma consideração que a razão entre a quantidade de armadura comprimida e tracionada deve possuir um valor máximo de 0,5.

Os autores apresentaram algumas considerações para seu modelo, cita-se: a base da viga é considerada como um valor constante. Soares e El Debs (1997), tal como Sacoman et al (1987), explicaram essa consideração afirmando que o elemento deverá possuir a mesma largura da alvenaria. Os autores consideram ainda que a limitação da flecha da viga deverá ser imposta pelo projetista, e será calculada através da fórmula de Branson. É considerada ainda a igualdade nas equações de compatibilidade, fazendo assim que a altura da linha neutra se torne uma variável dependente. Soares e El Debs (1997) utilizaram os multiplicadores de Lagrange para a extremização de funções não lineares sujeitas às condições de condições de Kuhn-Tucker.

Melo (2000) realizou um trabalho minimizando o custo de pórticos planos de concreto. O autor utilizou como variáveis de projeto as áreas necessárias de armadura transversal inferior e superior, a altura da seção transversal e as configurações resistentes das seções externas, que são caracterizados por um parâmetro  $D$ . Foi utilizado pelo autor programação matemática clássica denominada programação quadrática recursiva de Hanpowell, além de realizar comparações com o software DOT discretizado.

Entre as contribuições do autor, cita-se uma curva de resistência do elemento estrutural em função de  $v$  e  $\mu$  que representam grandezas adimensionais correspondentes a força de compressão e momento fletor respectivamente. A Figura 17 apresenta este gráfico.

Figura 17. Curva de interação Momento resistente ( $\mu$ ) - Força normal resistente ( $\nu$ )



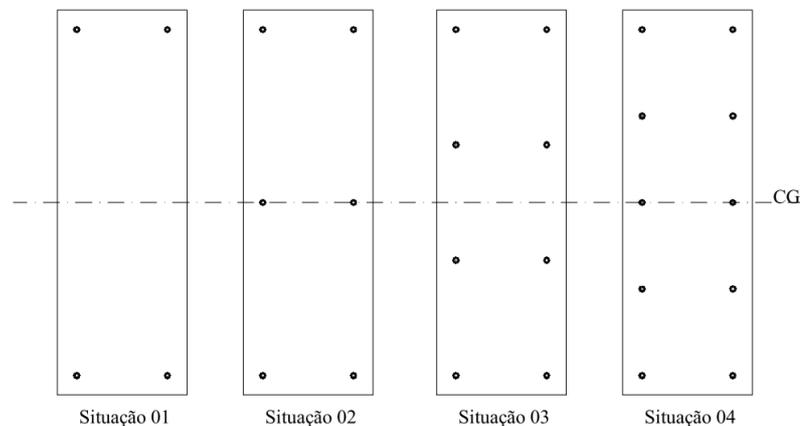
Fonte: Elaborado por Melo (2000)

Para sua formulação, Melo (2000) se apoiou na hipótese citada por Balling e Yao (1997) de que um modelo de otimização que considere a área de aço tratado como uma variável contínua não apresenta uma performance superior a um outro modelo que considere a variável como topológica. Em suas conclusões o autor afirma que a limitação devido a deformação sempre é limitante, o que explica em partes as considerações realizadas por Adamu e Karihaloo, (1994).

Dando prosseguimento ao modelo de Soares e El Debs (1997), Vianna e El Debs (2003) publicaram sua pesquisa utilizando o mesmo modelo sugerido anteriormente, entretanto, o modelo foi estendido para porticos planos.

O estudo de Vianna adicionou principalmente as considerações necessárias para a otimização de pilares retangulares de concreto. O autor prestabeleceu 4 tipos diferentes de disposição das armaduras, a Figura 18 ilustra a disposição das armaduras.

Figura 18. Disposição das barras de aço em uma seção transversal de pilares

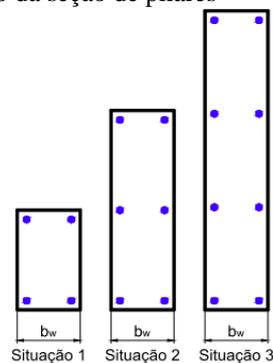


Fonte: Vianna e El Debs (2003)

A otimização se deu através da resolução analítica de cada uma das situações e o autor verificou que a conformação das armaduras provocava variações até de cerca de 8% do valor de custo de cada pilar. Outro ponto destacado pelo autor é que algumas das seções encontradas acabaram se tornando inviáveis devido a regras de espaçamento mínimo adotado pela norma. Desta forma, pode-se dizer que o autor tem conclusões diferentes de Balling e Yao (1997).

A continuidade destes dois trabalhos se deu com a publicação de Nina e El Debs (2006) que adicionou ao modelo desenvolvido até então, o caso em que a linha neutra corta a seção do pilar, estando portanto o mesmo simultaneamente submetido a tração e compressão. A metodologia considera três situações de distribuição de armadura e diversas hipóteses de como a linha neutra da seção e as armaduras estavam dispostas. Foram elaborados cerca de 30 modelos diferentes de cálculo. O objetivo era descrever a posição da linha neutra e a disposição das armaduras e determinar dentre as barras de aço quais estão comprimidas e o valor de seus braços de alavanca. A Figura 19 ilustra a conformação das armaduras nos pilares.

Figura 19. Distribuição de armaduras dentro da seção de pilares



Fonte: Nina (2006)

Brito (2013) formulou um modelo de otimização para vigas bi apoiadas de concreto armado, utilizando oito variáveis de projeto, dos quais, duas definiam as configurações das camadas 1 e 2, duas representavam as bitolas A e B da armadura de flexão. As demais variáveis são referentes a bitola da armadura transversal, bitola da armadura de pele, altura da seção, largura da seção.

Figura 20. Configurações de montagem de armaduras

Nº DA CONFIGURAÇÃO	CONFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	Nº DE BARRAS TIPO A	Nº DE BARRAS TIPO B
0		0	0
1	● ●	2	0
2	● ●	0	2
3	● ● ●	3	0
4	● ● ●	0	3
5	● ● ●	2	1
6	● ● ● ●	4	0
7	● ● ● ●	0	4
8	● ● ● ●	2	2

● BARRA TIPO A    ● BARRA TIPO B



Nº CONFIG. CAMADA 2 → 2  
 Nº CONFIG. CAMADA 1 → 3  
 DIÂMETRO BARRA TIPO A → 2,00 cm<sup>2</sup>  
 DIÂMETRO BARRA TIPO B → 1,25 cm<sup>2</sup>  
 ÁREA DE AÇO (A<sub>s</sub>) → 3x2+2x1,25

Fonte: Brito (2013)

A função objetivo de Brito (2013) era a soma dos custos do aço, concreto e formas e suas restrições atendiam a critérios de resistência, deformação, áreas de aço máximas e mínimas, relação entre a altura da viga e o comprimento do vão (modelo de Navier-Bernoulli), ductilidade da seção e regras de boas práticas de projeto. Para a resolução deste modelo formulado, foi utilizado o algoritmo genético.

Oliveira (2014) elaborou um modelo multinível de otimização para vigas biapoiadas, em seu trabalho, o autor minimizou o custo da viga no primeiro nível, considerando dimensões discretas para as seções e áreas de aço supostas contínuas dentro de uma precisão, entretanto, não foram elaboradas estratégias para as considerações de volume de aço, o autor considerava que as armaduras encontravam-se dispostas de apoio a apoio sem acréscimo de ancoragem, ou pontos de corte. Para o segundo nível, é buscado uma solução discreta da topologia das barras de aço que melhor representem o resultado do primeiro nível minimizando a área de aço. Para a solução do problema, o autor utilizou os algoritmos genéticos em ambos níveis.

## 4. FORMULAÇÃO DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO

Utilizando-se da filosofia proposta por Júlio Cesar *Divide et Impera* (Dividir para conquistar), o modelo de otimização de vigas de concreto armado foi dividido em dois níveis. Este artifício, simplificou o problema e ainda assim, apresentou resultados refinados de forma a representar uma realidade de projeto.

No primeiro nível de otimização, que é denominado modelo global, busca-se minimizar o custo da viga que é representado pela soma dos dispêndios do concreto, forma e aço. As variáveis de seção são discretas e variam em valores múltiplos de  $\delta$ , definido para cada caso. As áreas de armadura são supostas contínuas dentro de uma certa precisão.

No segundo nível, ou modelo local, as informações da solução global são usadas na busca do detalhe das armaduras que minimiza o volume de aço respeitando os valores necessários obtidos no primeiro nível.

### 4.1. Formulação do primeiro nível ou otimização da seção

O primeiro nível se focará em obter o menor custo de construção da viga minimizando o custo de todas as seções e observando seu comportamento em conjunto, pois alterações nos valores de uma seção afetarão a análise estrutural como um todo. O modelo apresenta restrições relativas as imposições da norma NBR 6118, .

#### 4.1.1. Variáveis de projeto

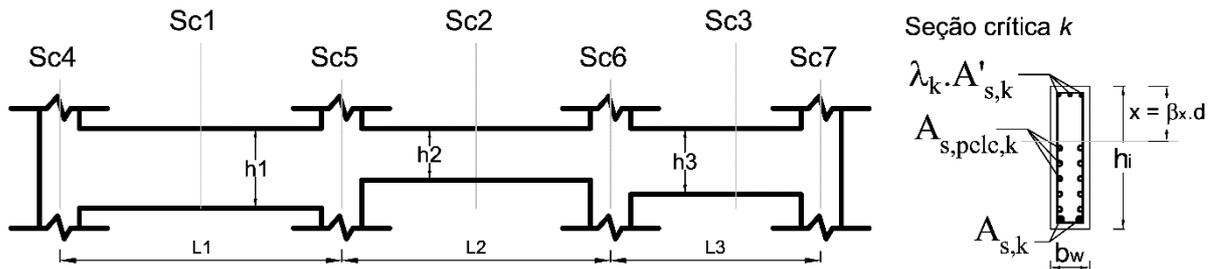
Para melhor representar a seção, bem como, para garantir uma melhor eficiência para o algoritmo de otimização escolhido, optou-se por deixar livre a posição da linha neutra, de forma que o algoritmo busque o melhor equilíbrio de utilização de aço, concreto e forma. As variáveis escolhidas são citadas abaixo.

- Base da viga: ( $b_w$ );
- Alturas dos vãos da viga: ( $h_i$ ),  $i = 1, 2, \dots n_v$ ;
- Taxas de armaduras: tração e compressão: ( $\lambda A_s' / A_{s,i}$ ),  $i = 1, 2, \dots n_v + n_a$ ;
- Posição relativa da linha neutra: ( $\beta_{x,i}$ ),  $i = 1, 2, \dots n_v + n_a$ ;
- Variável de ativação de armadura dupla:  $\kappa_i$  (se = 1, existe  $A_{s,i}'$ ),  $i = 1, 2, \dots n_v + n_a$ ;

onde, define-se  $n_v$  como número de vãos e  $n_a$  como número de apoios.

A Figura 21 representa as variáveis de projeto em uma viga contínua. Nos pontos de maior momento fletor no vão e nos apoios são definidos seções críticas de projeto. O problema foi simplificado no sentido de se considerar um único valor para a largura de todo o elemento, pois, descontinuidades na largura, além de não serem práticas usuais, poderiam levar a diversas dificuldades construtivas. A altura da viga é definida por vão, desta forma, para cada vão  $i$  existirá uma altura  $h_i$ . As demais variáveis de projeto descrevem o comportamento de cada seção crítica. As armaduras de compressão serão definidas através de variáveis de projeto ( $\lambda_{A_s'/A_{s,i}}$ ) que representam uma razão entre as armaduras de compressão ( $A'_{s,i}$ ) e as armaduras de tração ( $A_{s,i}$ ). A altura da linha neutra é definida através do valor de  $\beta_x$  e da altura útil para cada seção. A variável de projeto ( $\kappa_i$ ) não possui em si um sentido físico, trata-se apenas de um artifício para permitir que o algoritmo restrinja suas soluções a apenas simplesmente armada, apenas duplamente armada ou permita ambos os tipos de soluções.

Figura 21. Representação da geometria da viga



Fonte: Elaborado pelo autor

#### 4.1.2. Função Objetivo

A função objetivo possui uma importância singular no problema, pois esta ditará a solução que se quer obter. A equação (49) representa a função custo da viga e é expresso pelas somas do concreto, forma, aço longitudinal e transversal. Devido a maior complexidade, os custos relativos ao aço, serão separados em sub tópicos e explicados detalhadamente.

$$f_g(\mathbf{x}) = C_c \cdot b_w \cdot \sum_1^{n_v} (h_i \cdot L_i) + C_f \cdot \sum_1^{n_v} (L_i \cdot (b_w + 2 \cdot h_i)) + C_a \cdot \gamma_a \cdot \left( \sum_1^{2n_v+1} (V_{Strac,i}) + \sum_1^{2n_v+1} (V_{Scomp,i}) \right) + \quad (49)$$

$$C_a \cdot \gamma_a \cdot \left( \sum_1^{n_v} (V_{SWvao,i}) + \sum_1^{n_v} (l_{pele,i} \cdot A_{Spele,i}) \right)$$

onde  $C_c$  representa o custo de concreto por unidade de volume,  $L_i$  representa o comprimento do vão teórico  $i$ ,  $C_f$  representa o custo das formas por unidade de área,  $C_a$  representa o custo do aço por unidade de peso,  $\gamma_a$  representa o peso específico do aço,  $V_{strac,i}$  representa o volume de aço utilizado na seção  $i$  com armadura simples. O termo  $V_{scomp}$  se refere ao volume de aço comprimido na seção  $i$ ,  $V_{SWvao}$  representa o volume de aço utilizado em estribos de acordo com a seção do vão. As variáveis  $n_{pele}$ ,  $l_{pele}$  e  $A_{Spele}$  se referem a quantidade, comprimento e área de cada armadura de pele e é distribuída por vão.

#### 4.1.3. Cálculo dos custos da armadura longitudinal

A função objetivo no 1º nível tem 3 parcelas. As parcelas do concreto e da forma são avaliadas para os valores finais das variáveis das quais elas dependem. A parcela do aço, por lidar com natureza contínua para as armaduras longitudinais, é apenas uma estimativa do custo final. Se o custo de aço no 1º nível avaliado com base no aço estimado for menor que o necessário, a solução do primeiro nível pode resultar em grandes áreas de aço. Ao executar o modelo local o volume de aço aumentará ainda mais e o custo da viga crescerá devido ao excesso de aço. Se ocorrer o extremo oposto e o custo do aço for superestimado, a solução do primeiro nível poderá aumentar as dimensões da seção para empregar uma menor quantidade de aço e ao término do segundo nível resultará em um projeto mais dispendioso. Visando diminuir estes efeitos duas estratégias são propostas para o modelo global visando aproximar o volume de aço no primeiro. No trabalho de Oliveira (2014) o volume foi estimado supondo todas as barras estendidas de apoio a apoio sem corte e sem ancoragem.

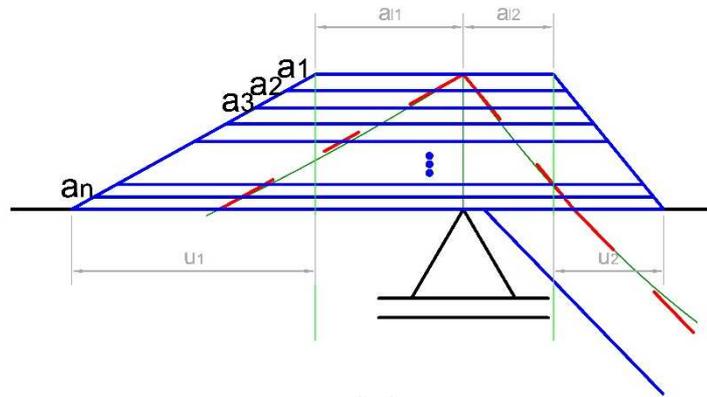
A primeira estratégia consiste em um modelo que preveja o volume de aço considerando o corte de barras longitudinais. Na segunda estratégia, adiciona-se os volumes referentes as ancoragens das armaduras.

##### 4.1.3.1. Estimativa de volume de aço considerando o corte de barras

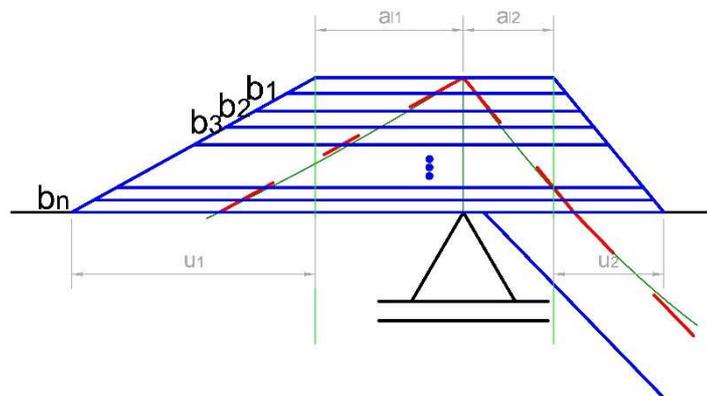
O cálculo do comprimento das barras de aço é dado através da envoltória da força normal resistente, que está representado na Figura 22 através da linha tracejada e pontilhada(verde). A linha tracejada representa uma envoltória trapezoidal do diagrama, traçada para os pontos de momento positivo com linhas tangentes e para os pontos negativos com linhas



Figura 23. Distribuição de barras de aço na seção



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor

Em (a) a série  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  forma uma PA de razão  $r$ , com os seguintes parâmetros:

$$r = \frac{u_1 + u_2}{n_b} \quad (50)$$

$$a_1 = a_{11} + a_{12} \quad (51)$$

$$a_n = (a_{11} + a_{12}) + (n-1) \left( \frac{u_1 + u_2}{n_b} \right) \quad (52)$$

Calculando-se a soma de todos os termos da PA, tem-se:

$$S_1 = \frac{1}{2} \left[ n_b (2a_1 + 2a_n + u_1 + u_2) - (u_1 + u_2) \right] \quad (53)$$

Em (b) a série  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  também forma uma PA de mesma razão, cujos parâmetros são

$$b_1 = a_{l1} + a_{l2} + \frac{u_1 + u_2}{n_b} \quad (54)$$

$$b_n = (a_{l1} + a_{l2}) + \frac{u_1 + u_2}{n_b} + (n-1) \left( \frac{u_1 + u_2}{n_b} \right) \quad (55)$$

e a soma de todos os termos da PA, vale

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[ n_b (2a_{l1} + 2a_{l2} + u_1 + u_2) + (u_1 + u_2) \right] \quad (56)$$

Avaliando a média aritmética entre as duas somas (53) e (56), tem-se:

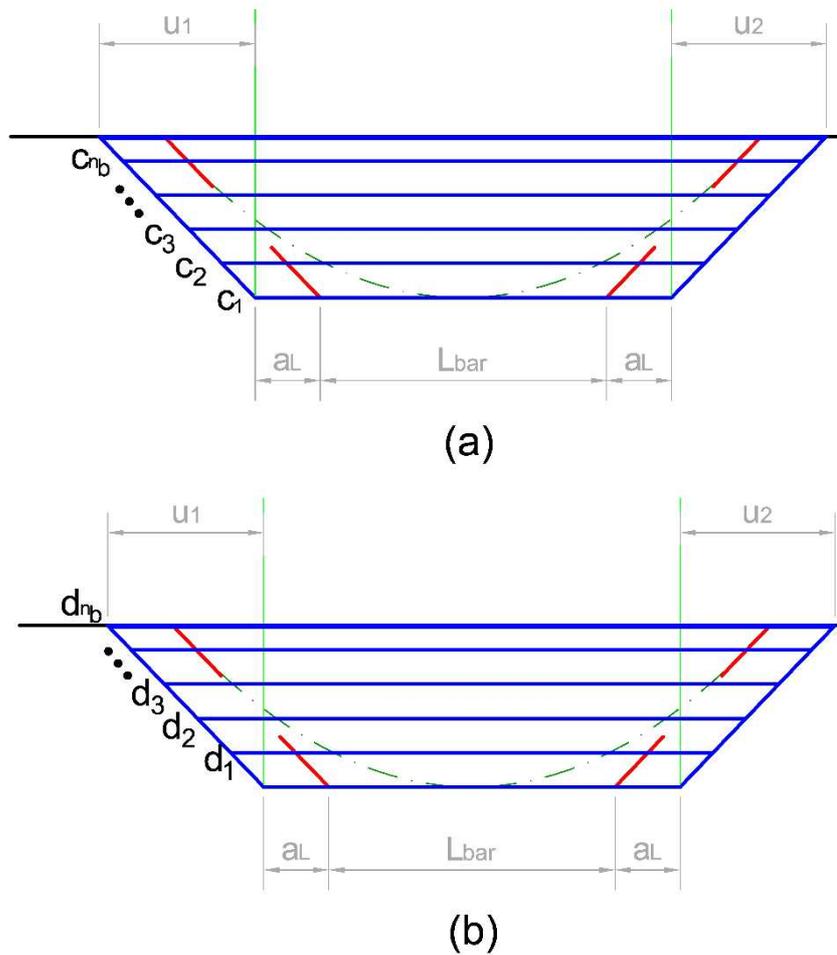
$$S_{med} = \frac{n_b}{2} (2a_{l1} + 2a_{l2} + u_1 + u_2) \quad (57)$$

supondo que exista uma barra de aço de área transversal  $A_\phi = \frac{A_{nec}}{n_b}$ , o volume de aço pode ser estimado por

$$V_{med} = A_\phi \cdot S_{med} = \frac{A_{nec}}{2} (2a_{l1} + 2a_{l2} + u_1 + u_2) \quad (58)$$

Para os momentos positivos nos vãos, uma formulação (Figura 24) fornece para o volume de aço.

Figura 24. Distribuição de barras de aço na seção



Fonte: Elaborado pelo autor

$$V_{med} = \frac{A_{nec}}{2} (4a_l + 2L + u_1 + u_2) \quad (59)$$

onde neste caso  $a_{l1} = a_{l2}$ .

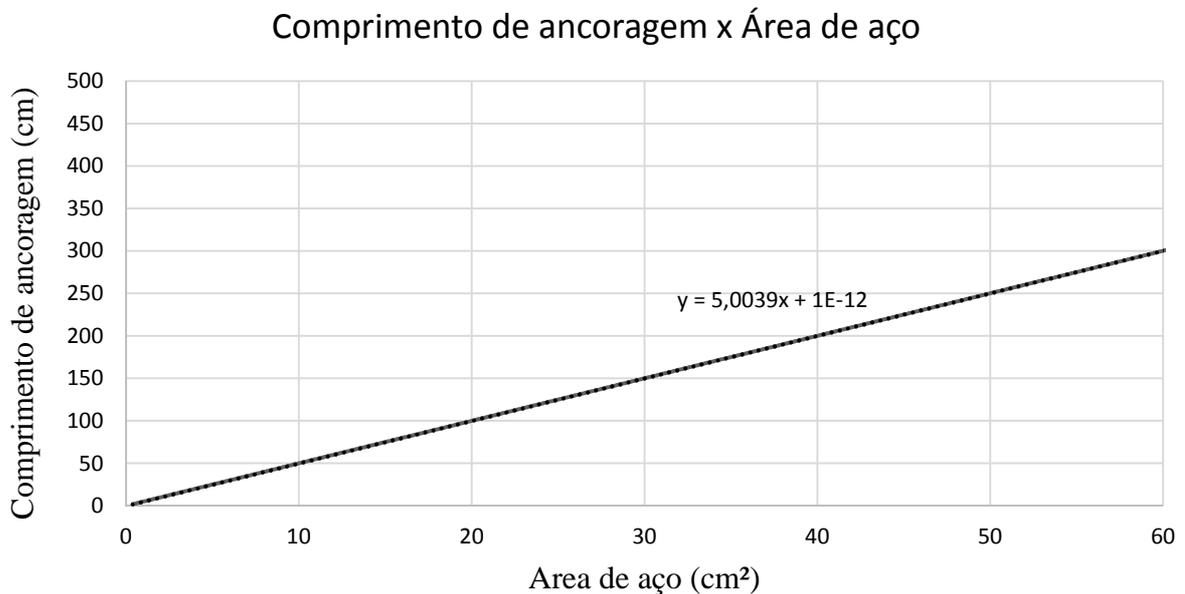
Esta estratégia possui a vantagem de aproximar o volume de aço utilizado em um possível processo de corte de barras sem envolver o diâmetro ou o número de barras. Esta estimativa do volume de armadura pode ser usada no nível global como um valor de referência por que o detalhamento rigoroso das armaduras e o custo final serão feitos no nível local.

#### 4.1.3.2. *Estimativa de volume de aço considerando o comprimento de ancoragem*

Mesmo utilizando-se a estratégia de simular o corte de barras, existe ainda os comprimentos de ancoragem que adicionam volume de aço. A estratégia proposta neste modelo consiste em calcular os comprimentos de ancoragem para todas as bitolas comercialmente

disponíveis, respeitando o limite mínimo de 10 cm, em uma área de aço variando de 0,4 cm<sup>2</sup> a 60 cm<sup>2</sup>, em um incremento de 0,1cm<sup>2</sup> de acordo com a Eq. (37). A média do comprimento de todas as bitolas e a área de aço necessária foram submetidos a uma regressão linear, obtendo-se assim equações que relacionavam a área de aço necessária ao comprimento de ancoragem necessário. Esta regressão foi realizada para:  $f_{ck}$  variando de 15 a 40 MPa em uma incremento de 5 MPa e condições de boa e má aderência. A Figura 25 apresenta um gráfico que relaciona a área de aço e o comprimento de ancoragem  $l_b$ , pode-se notar que o gráfico é linear e o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) é 100%.

Figura 25. Comprimento de ancoragem x Área de aço



Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 1 contém os coeficientes para cada tipo de  $f_{ck}$  do concreto, a multiplicação destes coeficientes pela área de aço necessária (em cm<sup>2</sup>) resultará em uma estimativa média para o comprimento de ancoragem  $l_b$ .

Tabela 1. Coeficientes da estimativa de ancoragem

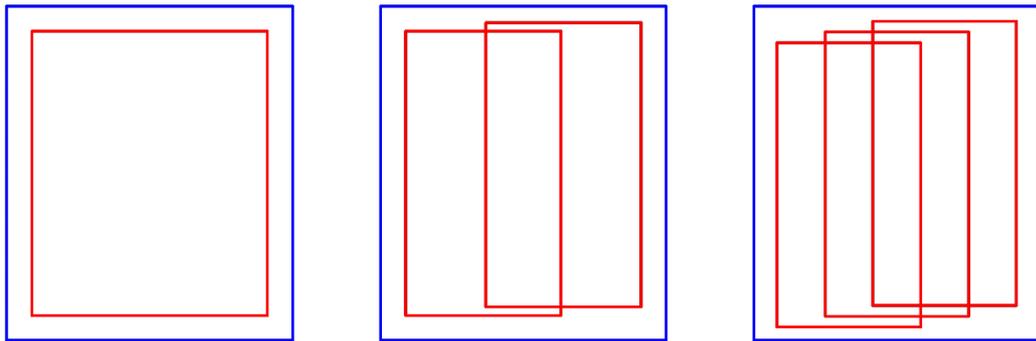
Tipo de aderência	$f_{ck}$ do concreto					
	15	20	25	30	35	40
Boa Aderência	5,0039	4,1306	3,5596	3,1522	2,8444	2,6021
Má aderência	7,1484	5,9009	5,0852	4,5032	4,0634	3,7173

Fonte: Elaborado pelo autor

#### 4.1.4. Cálculo dos custos da armadura transversal

Uma busca exaustiva seleciona a combinação de tipos e bitolas de estribo que satisfazem todas as exigências da norma com o volume mínimo de aço (Figura 26). Vale frisar que essa busca foi aplicada no nível global pois todos os dados necessários já estão disponíveis e isto contribui para uma avaliação mais realista do custo do aço.

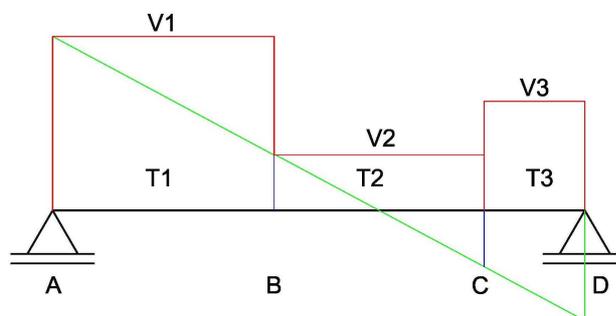
Figura 26. Distribuição de estribos em uma seção



Fonte: Elaborado pelo autor

Após a definição da bitola e do número de estribos em uma seção, é necessário calcular a distribuição desta ao longo do vão da viga. Conforme a Figura 27, o vão é dividido em três trechos de distribuição, são eles: os esforços cortantes solicitantes ( $V_1$  e  $V_3$ ) nas extremidades e distribuídos ao longo de  $T_1$  e  $T_3$  respectivamente, e o esforço cortante mínimo definido por norma ( $V_2$ ) em função da armadura mínima de cisalhamento, atuando no trecho  $T_2$ .

Figura 27. Diagrama de esforço cortante



Fonte: Elaborado pelo autor

Certas situações, que estão listadas abaixo podem alterar a forma que o algoritmo funciona:

- a. Se  $V_1$  ou  $V_3$ , for menor que  $V_2$ , os trechos  $T_1$  ou  $T_3$  não existem;
- b. Se o trecho  $T_2$  for menor que uma porcentagem  $\psi$  do vão,  $T_2$  será desconsiderado e a viga será dividida em  $T_1$  e  $T_3$  no ponto de cortante nulo.

O volume de aço da armadura de cisalhamento será definida conforme (60).

$$V_{SWvao} = \sum_{i=1}^{nd} (A_{\phi,sw} \cdot l_{unit} \cdot n_s \cdot q) \quad (60)$$

onde  $A_{\phi,sw}$  representa a área da bitola da armadura de cisalhamento,  $nd$  é o número de distribuições,  $n_s$  possui os valores 1,2,3 para estribos simples, duplos e triplos respectivamente e  $q$  representa a quantidade mínima de estribos para atender todas as exigências de espaçamento, taxa de armadura, entre outros e será apresentado junto as restrições do problema. A variável  $l_{unit}$  que representa o comprimento unitário de cada estribo é dado por

$$l_{unit} = 2 \cdot k_{red} \cdot (b_w - 2 \cdot c_n) + 2 \cdot (h_i - 2 \cdot c_n) + 2 \cdot l_{anc} \quad (61)$$

onde  $k_{red}$  é o fator de redução que vale 1, 2/3 e 3/5 para estribos simples duplos e triplos respectivamente,  $c_n$  é o cobrimento nominal das armaduras e  $l_{anc}$  é a ancoragem que equivale ao maior entre os valores expressos em (62).

$$l_{unit} \geq \begin{cases} 5\phi \\ 5 \text{ cm} \end{cases} \quad (62)$$

#### 4.1.5. Custos da armadura de pele

Segundo a NBR 6118/2007, a área de armadura de pele, necessária quando a altura for maior que 60 cm, se distribuirá em cada face lateral da viga, na zona tracionada de apoio a apoio no vão considerado é dada em função da área de concreto ( $A_{c,alma}$ ) na forma

$$A_{s,pele} = 0,1\% A_{c,alma} \quad (63)$$

#### 4.1.6. Restrições

As restrições do problema global são divididas nos seguintes grupos:

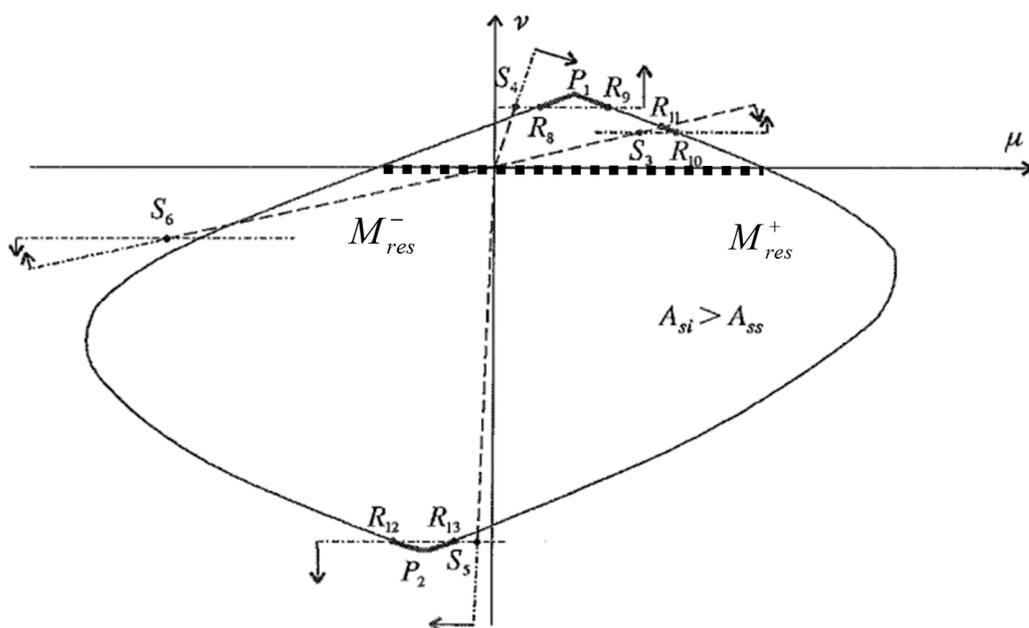
- Relativas ao colapso ou ruína estrutural (ELU): só é necessária a verificação do ELU de esgotamento da capacidade resistente da estrutura;
- Relativas ao comportamento em serviço (ELS);
- Boas práticas de projeto e detalhamento;
- Exigências arquitetônicas;
- Limites laterais.

#### 4.1.7. Restrições relativas à resistência e equilíbrio

As restrições de resistência compreendem as exigências contidas na NBR 6118 para que a seção não seja levada à ruína, segundo os critérios do ELU.

Para seção retangular sujeita a flexão composta normal, a segurança quanto à ruptura é assegurada se o par de esforços solicitantes ( $M_{sd}$ ,  $N_{sd}$ ) estiver no interior da curva de interação resistente conforme Figura 28 (Melo, 2000). Para o ponto  $S_3$  da figura, são desenvolvidos na seção esforços resistentes necessários para equilibrar os solicitantes, mas a seção tem uma capacidade resistente maior.

Figura 28. Curva de interação para  $A_s \geq A'_s$



Fonte: Adaptado de Melo (2000)

onde  $v$  é o esforço normal reduzido e  $\mu$  é o momento reduzido, ambos dados respectivamente por

$$v = \frac{N}{f_{cd} \cdot b_w \cdot h} \quad (64)$$

$$\mu = \frac{M}{f_{cd} \cdot b_w \cdot h^2} \quad (65)$$

A curva de interação é obtida variando-se as configurações deformadas correspondentes aos estados limites últimos definidos pela NBR 6118:2007 (ABNT, 2007) desde a reta  $a$  até a reta  $b$  com curvatura positiva e negativa (MELO, 2000).

Nas vigas, a força normal solicitante é nula. Portanto, não há o desenvolvimento de esforço normal resistente, e a relação de equilíbrio de forças

$$N_{sd,i} = (N_{res,i})_{des,i} = 0 \quad (66)$$

é usada em cada seção, com os valores de  $b$ ,  $d$  e  $\beta_x$ , para determinação das áreas de aço necessárias.

O par solicitante  $(M_{sd}, 0)$  está sobre o eixo das abscissas e a segurança quanto ao momento fletor é garantida se

$$|M_{sd,i}| \leq M_{res,i} \quad (67)$$

onde  $M_{sd,i}$  representa o momento fletor solicitante,  $M_{res,i}$  é o momento resistente, que assume os valores de  $M_{res,i}^+$  e  $M_{res,i}^-$  (Figura 28) correspondentes à curvatura positiva e negativa, respectivamente. Como em cada seção considera-se sempre a situação de curvatura positiva, tanto para momento fletor positivo como negativo, a restrição se reduz a

$$|M_{sd,i}| \leq M_{res,i} = M_{res,i}^+ \quad (68)$$

Utilizando o modelo de cálculo I da NBR 6118/2007 (ABNT, 2007) para a armadura transversal, deve-se verificar simultaneamente o esmagamento da biela comprimida do concreto e a ruína por tração diagonal. Deverá ser assegurado que o esforço cortante ( $V_{sd,i}$ ) será menor que a força cortante resistente de cálculo relativa a ruína das diagonais comprimidas de concreto ( $V_{rd2,i}$ ) e do que a força cortante resistente de cálculo relativa a ruína por tração diagonal ( $V_{rd3,i}$ ) em cada seção

$$V_{sd,i} \leq V_{rd2,i} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d_i \quad (69)$$

$$V_{sd,i} \leq V_{rd3,i} = V_c + V_{sw} \quad (70)$$

onde  $\alpha_{v2}$  é dado por:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (71)$$

com  $f_{ck}$  em MPa,  $V_{sw}$  é a parcela resistida pela armadura transversal,  $V_c$  é a parcela resistida por mecanismos complementares ao da treliça

$$V_{c,i} = 0.6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d_i \quad (72)$$

onde  $f_{ctd}$  é o valor de cálculo da resistência no concreto.

Assim, a parcela de resistência do aço é dada por

$$V_{sw,i} \geq \begin{cases} V_{sd,i} - V_{c,i} \\ 0 \end{cases} \quad (73)$$

Definido o valor da força necessária para a armadura de cisalhamento pode-se calcular a área de armadura por unidade de comprimento, para estribos verticais, como

$$\left( \frac{A_{sw,i}}{s_i} \right)_{nec,i} = \frac{V_{sw,i}}{0,9 \cdot d_i \cdot f_{yd}} \quad (74)$$

Para cada bitola e topologia de estribo obtém-se a armadura transversal por unidade de comprimento existente  $(A_{sw})_{ex} = (A_{sw,i} / s_i)_{exit,i}$  e o espaçamento dos estribos é dado por

$$s_{t,i} = \frac{2 \cdot A_{\phi,sw,i} \cdot n_{s,i}}{\left( \frac{A_{sw,i}}{s_i} \right)_{nec,i}} \quad (75)$$

onde  $n_{t,i}$  indica o número de ramos de estribos que cortam a seção e vale  $2 \cdot n_{s,i}$ .  $n_{s,i}$  vale 1, 2, 3 para estribos simples, duplo ou triplo respectivamente.

O valor de  $s_t$  deve obedecer limites mínimos da norma detalhados na seção 4.1.9, ou ser arredondado para o menor inteiro. E através de  $s_t$  final calcula-se o volume final de aço deste trecho.

#### 4.1.8. Restrições de serviço

Com relação ao ELS foi considerado o estado limite de deformação excessiva. Para o cálculo do deslocamento foi utilizada a inércia obtida através do modelo simplificado presente na norma (NBR 6118, 2007) que descreve o comportamento da inércia da seção realizando-se uma interpolação entre suas inércias nos estádios I e II.

$$I_m = \left( \frac{M_r}{M_{at}} \right)^n \cdot I_I + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_{at}} \right)^n \right] \cdot I_{II} \quad (76)$$

onde  $M_r$  é o momento de fissuração no concreto e  $M_{at}$  é o momento atuante de serviço na seção mais solicitada,  $I_I$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto,  $I_{II}$  é o momento de inércia da seção de concreto no estádio II puro. O valor de  $n$  considerado foi 3 e  $I_{II}$  é calculado através da seguinte expressão: (Ghale et al., 2002)

$$I_{II} = \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{12} + \alpha_e \cdot A_{s,i} \cdot (x_{II} - d_i)^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_{s,i} \cdot (x_{II} - d_i')^2 \quad (77)$$

onde,  $\alpha_e$  representa a razão entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade secante do concreto,  $x_{II}$  representa a altura da linha neutra da viga em que esta atuará no estádio

II puro, vale frisar que  $x_{II}$  é obtido igualando-se o momento estático da seção homogeneizada a zero, podendo ser obtido através da equação (78). (Ghali and Favre, 2002).

$$\frac{b_w}{2} \cdot (x_{II})^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II}) - d' \cdot (\alpha_e - 1) \cdot A'_s - d \cdot \alpha_e \cdot A_s = 0 \quad (78)$$

A flecha máxima total de cada vão da viga é determinado conforme o item 17.3.2.1.2 da NBR 6118, que considera o deslocamento diferido, da forma

$$v_{total,i} = v_{im,i} \cdot (1 + \alpha_{f,i}) \quad (79)$$

onde  $v_{im,i}$  é a flecha imediata e  $\alpha_{f,i}$  é o fator da parcela devida a fluência. A flecha imediata vale

$$v_{im,i} = \frac{5 \cdot q_i \cdot L_i^4}{384 \cdot E \cdot I_{m,i}} - \frac{\chi_{0,i} \cdot L_i^2}{16 \cdot E \cdot I_{m,i}} - \frac{\chi_{1,i} \cdot L_i^2}{16 \cdot E \cdot I_{m,i}} \quad (80)$$

onde  $q_i$  é a carga uniformemente distribuída no vão,  $\chi_{0,i}$  e  $\chi_{1,i}$  são os momentos fletores atuantes respectivamente nas extremidades dos vãos.

O fator da parcela devida a fluência é dada por

$$\alpha_{f,i} = \frac{\xi(t)_i - \xi(t_0)_i}{1 + 50 \cdot \rho_i'} \quad (81)$$

onde  $\rho_i'$  é a taxa de armadura comprimida, e  $\xi(t)$  é dado por.

$$\xi(t) = \begin{cases} 0,68 \cdot 0,996^t \cdot t^{0,32} & t \leq 70 \text{ meses} \\ 2 & t > 70 \text{ meses} \end{cases} \quad (82)$$

onde  $t$  representa a idade em meses na qual se deseja avaliar o deslocamento e  $t_0$  é a idade correspondente à aplicação da carga de longa duração.

#### 4.1.9. Restrições de boas práticas de projeto e detalhamento

Para evitar soluções superarmadas (domínio 4), impõe-se a restrição de compatibilidade.

$$\beta_{x,i} - \frac{0,0035}{0,0035 + \varepsilon_{yd,i}} \leq 0 \quad (83)$$

A NBR 6118/2007 (ABNT, 2007) sugere a limitação da altura da linha neutra em seções que atuem sobre os apoios a uma certa fração ( $\beta_{x,lim,i}$ ) da altura. Entretanto, Araújo (2010) sugere valores mais rigorosos para estes coeficientes, que se mostraram condizentes com a NBR 6118/2014 (ABNT, 2014) que até o termino da implementação computacional deste modelo ainda não havia sido divulgada. Estes coeficientes, são dados por

$$\beta_{x,lim,i} \leq \begin{cases} 0,45 & \text{se } f_{ck} \leq 35 \text{ Mpa} \\ 0,35 & \text{se } f_{ck} > 35 \text{ Mpa} \end{cases} \quad (84)$$

Com relação ao cisalhamento, considera-se restrições relativas a taxa mínima de armadura transversal é descrita por:

$$\rho_{sw\alpha,\min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (85)$$

onde  $f_{ctm}$  é a resistência média à tração do concreto e  $f_{ywk}$  é o valor característico da resistência ao escoamento do aço da armadura transversal.

O espaçamento máximo longitudinal ( $s_{max,i}$ ) imposto pela norma para os estribos, é diretamente influenciado pelos valor de  $V_{rd2}$  da resistência do concreto sendo dado por:

$$s_{max,i} \leq \begin{cases} \begin{cases} 0,6 \cdot d_i \\ 30 \text{ cm} \end{cases} & \text{se } V_{sd} \leq 0,67 \cdot V_{Rd2} \\ \begin{cases} 0,3 \cdot d_i \\ 20 \text{ cm} \end{cases} & \text{se } V_{sd} > 0,67 \cdot V_{Rd2} \end{cases} \quad (86)$$

O espaçamento transversal máximo ( $s_{t,max,i}$ ) entre tramos de estribo, também é dependente do valor de  $V_{rd2}$  e vale:

$$s_{t,max,i} \leq \begin{cases} \begin{cases} d_i & se V_{sd} \leq 0,20 \cdot V_{Rd2} \\ 80 \text{ cm} & \end{cases} \\ \begin{cases} 0,6 \cdot d_i & se V_{sd} > 0,20 \cdot V_{Rd2} \\ 35 \text{ cm} & \end{cases} \end{cases} \quad (87)$$

Para assegurar a validade do modelo de análise de vigas de Navier-Bernoulli, impõem-se o limite para a relação entre o vão e a altura da seção  $h_i$  dada por:

$$3 \cdot h_i - L_i \leq 0 \quad (88)$$

As taxas de armadura longitudinais máximas e mínimas impostas pela norma são aplicadas às armaduras longitudinais tracionadas e comprimidas, na forma:

$$A_{s,i} \geq A_{s,MIN,i} = 0,8 \cdot W_{0,i} \cdot f_{ctk,sup} \quad (89)$$

$$A_{s,i} + A'_{s,i} \leq A_{s,MAX,i} = 4\% \cdot A_{C,i} \quad (90)$$

onde  $W_{0,i}$  é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto relativo à fibra mais tracionada,  $A_{C,i}$  é a área de concreto da seção transversal da viga.

Segundo Vianna (2003) trata-se de uma boa prática de projeto limitar a proporção de armadura comprimida em relação à tracionada a 50%. Desta forma, a seguinte restrição é imposta

$$\kappa_i = \frac{A'_{s,i}}{A_{s,i}} \leq K \quad (91)$$

#### **4.1.10. Exigências arquitetônicas e limites laterais**

Restrições laterais ou arquitetônicas, são impostas devido a situações diversas de projeto ou valores impossíveis e que possam criar situações absurdas durante a otimização,

como por exemplo uma viga com uma largura nula. Os valores limites das variáveis são definidas como um dado de entrada para o modelo.

$$h_i \geq h_{\min} \quad (92)$$

$$b_w \geq b_{\min} \quad (93)$$

$$h_i \leq h_{MAXproj} \quad (94)$$

$$b_w \leq b_{MAXproj} \quad (95)$$

#### 4.1.11. Resumo do modelo do primeiro nível

Visando melhorar a convergência do AG, as restrições foram normalizadas, assim o problema é definido como:

$$\begin{aligned} \min f_g(\mathbf{x}) = & C_c \cdot b_w \cdot \sum_1^{n_v} (h_i \cdot L_i) + C_f \cdot \sum_1^{n_v} (L_i \cdot (b_w + 2 \cdot h_i)) + \\ & C_a \cdot \gamma_a \cdot \left( \sum_1^{n_{trac}} (V_{Strac,i}) + \sum_1^{n_{comp}} (V_{Scomp,i}) \right) + \\ & C_a \cdot \gamma_a \cdot \left( \sum_1^{n_v} (V_{SWvao,i}) + \sum_1^{n_{pele}} (l_{pele,i} \cdot A_{Spele,i}) \right) \end{aligned} \quad (96)$$

tal que:

$$\frac{h_i}{L_i} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_v \quad (97)$$

$$\frac{V_{total,i}}{V_{lim,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_v \quad (98)$$

$$\frac{V_{sd,i}}{V_{rd2,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v \quad (99)$$

$$\frac{2 \cdot (A'_{s,i} + 1)}{A_{s,i} + 2} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (100)$$

$$\frac{A_{s,MIN,i}}{A_{s,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (101)$$

$$\frac{M_{d,i}}{M_{res,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (102)$$

$$\frac{x_{lin,i}}{\varepsilon_{ck,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (103)$$

$$\left( \varepsilon_{ck,i} + \varepsilon_{yk,i} \right)$$

$$\frac{x_{lin,i}}{h_{lim,i} \cdot d_{res,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (104)$$

## 4.2. Formulação do segundo nível ou design da viga

O segundo nível tem como objetivo encontrar o volume mínimo do projeto detalhado respeitando a solução obtida no primeiro nível. Para isso é necessário transformar as áreas de armaduras que antes eram contínuas, em soluções discretas que respeitem as prescrições da NBR 6118.

Este nível, herda diversos dados do primeiro, tais como as dimensões das seções e seus cobrimentos, as áreas de aço necessárias, as bitolas dos estribos e todos os dados referentes a análise estrutural da viga.

A adição de restrições relativas à natureza discreta para as áreas das armaduras longitudinais produz, como era esperado, um aumento no custo em relação à solução do nível global.

### 4.2.1. Variáveis de projeto:

Na formulação deste modelo, optou-se pela possibilidade de utilização de até duas bitolas diferentes em cada seção. Desta forma, para descrever o detalhe da armadura longitudinal, são necessários 4 parâmetros: a bitola ( $\phi_1$ ) e sua quantidade de barras ( $n_1$ ) a bitola ( $\phi_2$ ) e seu número de barras ( $n_2$ ). Como  $n_2$  pode ser obtido em função dos primeiros, buscando-se o valor mínimo que gera uma armadura maior que a necessária, as variáveis de projeto que compõem o problema, se resumem a

- Variável de escolha da bitola 1:  $\phi_1$
- Número de barras da bitola 1:  $n_1$  ;
- Variável de escolha da bitola 2:  $\phi_2$

Os valores das bitolas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são escolhidos a partir de

$$\mathbf{c}^T = [6,3 \quad 8,0 \quad 10,0 \quad 12,5 \quad 16,0 \quad 20,0 \quad 25,0 \quad 32,0 \quad 40,0] \quad (105)$$

#### 4.2.2. Função Objetivo

Busca-se a minimização do volume de aço empregado na viga, e a função objetivo é

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2n_v+1} (A_{\phi 1,i} \cdot n_{1,i} \cdot l_{\phi 1,i} + A_{\phi 2,i} \cdot n_{2,i} \cdot l_{\phi 2,i}) \quad (106)$$

#### 4.2.3. Restrições

O modelo apresenta restrições visando atender boas práticas de projeto e exigências da NBR 6118/2007 (ABNT, 2007).

##### 4.2.3.1. Exigências normativas e compatibilidade

Para compatibilizar a solução obtida no 1º nível, a área a ser colocada ( $A_{s,real}$ ) deve respeitar os valores necessários obtidos em

$$A_{s,real} = A_{\phi 1,i} \cdot n_{1,i} + A_{\phi 2,i} \cdot n_{2,i} \geq A_{nec,i} \quad (107)$$

Esta condição é automaticamente satisfeita quando  $n_2$  é tratada como uma variável dependente. O seu valor é o mínimo necessário para satisfazer a condição (107), ou seja

$$n_{2,i} \geq \begin{cases} \frac{A_{nec,i} - A_{\phi 1,i} \cdot n_{1,i}}{A_{\phi 2,i}} \\ 0 \end{cases} \quad (108)$$

O critério de armadura concentrada estabelecido pela NBR 6118 em seu item 17.2.4.1 limita a distância  $a$  do centro de gravidade das barras de aço até o ponto da seção de armadura mais afastada da linha neutra, medida na direção perpendicular à linha neutra, a 10% de sua altura. Desta forma, é imposto

$$a \leq 10\% \cdot h_i \quad (109)$$

#### 4.2.3.2. Boas práticas de projeto

Visando uma melhor construtibilidade da viga, impõem-se que a bitola das barras de canto da seção sejam maiores ou iguais às do centro, assim

$$\phi_{1,i} \geq \phi_{2,i} \quad (110)$$

Soluções que possuem bitolas de diâmetros muito diferentes podem gerar dificuldades construtivas (Govindaraj e Ramasamy, 2005). Por isso, restringe-se a diferença entre as posições das bitolas no vetor  $\mathbf{c}$  a um valor  $\Delta_{pmax,i}$ . Por exemplo, se  $\phi_1$  for escolhida como 12,5 que ocupa a 4ª posição, e supondo um valor de  $\Delta_{pmax}$  como 2, as únicas possibilidades de escolha para a barra 2 serão as bitolas na 2ª, 3ª e 4ª posições, que correspondem a 8,0; 10,0 e 12,5 respectivamente. A restrição é escrita como

$$P_{\phi_{1,i}} - P_{\phi_{2,i}} \leq \Delta_{p,max} \quad (111)$$

A partir dos dados referentes à seção, tais como: largura da base, cobrimentos, diâmetro dos estribos e espaçamento mínimo, um algoritmo de montagem da topologia é executado alojando as barras de aço até que todas estejam alocadas ou até que não exista espaço suficiente para comportar uma outra barra. Neste caso, é adicionada mais uma camada e se considera a anterior completa.

O modelo restringe ainda, o número máximo de camadas de barras em uma seção devido à dificuldade de execução e visando seguir regras de boa prática de projeto.

$$N_{Cam,i} \leq N_{MAX} \quad (112)$$

O modelo de otimização é resumido abaixo.

$$\min f_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{arm}} (A_{\phi 1,i} \cdot n_{1,i} \cdot l_{\phi 1,i} + A_{\phi 2,i} \cdot n_{2,i} \cdot l_{\phi 2,i}) \quad (113)$$

Sujeito a:

$$\frac{\phi_{2,i}}{\phi_{1,i}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (114)$$

$$\frac{P_{\phi 1,i}}{P_{\phi 2,i} + \Delta_{p,\max}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (115)$$

$$\frac{N_{Cam,i}}{N_{MAX}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (116)$$

$$\frac{a}{10\% \cdot h_i} - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_v + 1 \quad (117)$$

## 5. ALGORITMOS GENÉTICOS

Na natureza observa-se uma ação seletiva entre os seres vivos e, usualmente, os mais aptos possuem uma maior chance de sobrevivência e com isso uma maior probabilidade de transmitirem pelo cruzamento suas características a seus descendentes. Por sua vez, os menos aptos possuem chances reduzidas de se perpetuarem, dificultando ou impossibilitando estes indivíduos de gerarem descendentes e com isso garantir que suas características continuarão a existir. No decorrer de gerações, se não ocorrer mudanças no critério de eficiência, é esperado que os seres menos aptos deixem de existir, restando assim somente os indivíduos mais aptos (Grosko, 2006).

Essa adaptabilidade apesar de ser aplicada no reino animal, é composta por regras lógicas que podem ser aplicadas em qualquer sistema que possua critérios de eficiência e se comporte de maneira similar ao meio ambiente: selecionando, perpetuando ou eliminando. Inspirando-se nestas regras, Holland (1975) em meados da década de 70 propôs o algoritmo genético que funciona através de mecanismos similares à teoria da evolução das espécies. Este algoritmo estabelece critérios de desempenho (função objetivo) e busca combinar diferentes características (variáveis de projeto) para obter a melhor solução possível. O algoritmo genético é uma ferramenta robusta de otimização.

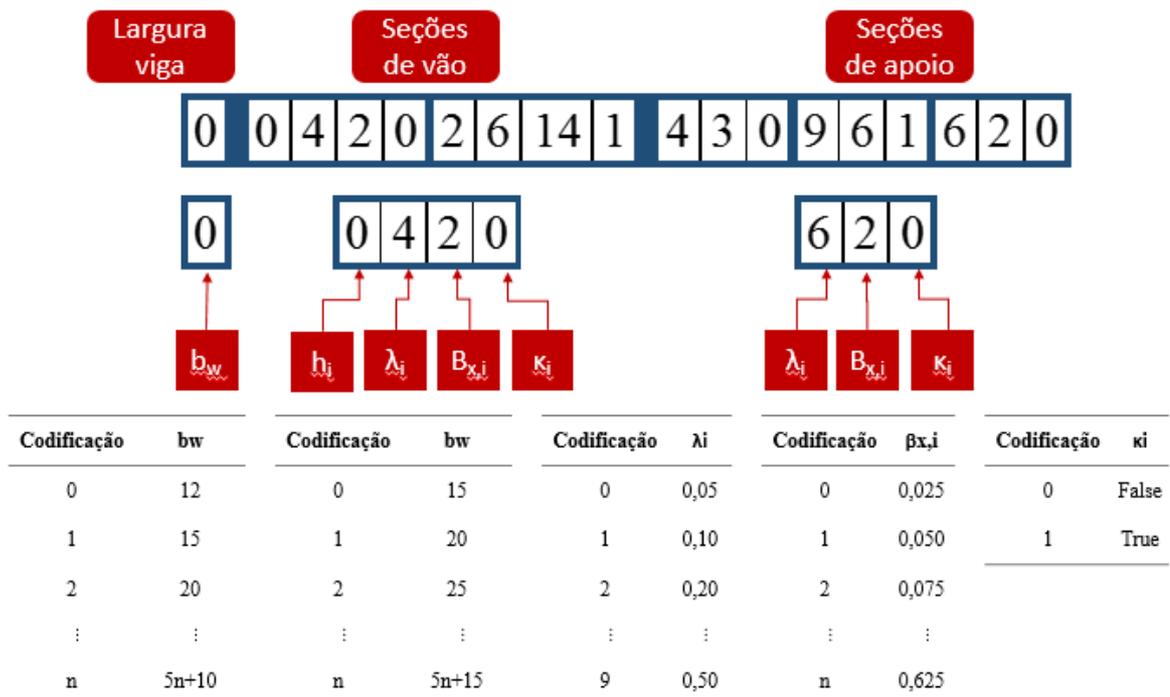
Algumas características evidenciaram sua eficiência e influenciaram na popularização desta técnica. Adeli e Sarma (2006) destacam alguns pontos que descrevem bem as características deste algoritmo: o AG possui uma acelerada convergência, pois trabalha com um conjunto de soluções em cada interação, onde cada solução ou ponto do espaço de projeto é denominado indivíduo e o conjunto de indivíduos forma uma população. As informações requeridas pelo AG são apenas as avaliações das funções, não sendo necessárias informações sobre o gradiente e nem envolvem a determinação de direções de busca e passos, presentes em muitos algoritmos clássicos de otimização. Assim, o AG não é do tipo *hill climbing* e a possibilidade de encontrar mínimos locais como resposta é reduzida.

O AG não trabalha diretamente com os valores das variáveis de projeto, mas sim com uma codificação destes valores para cada indivíduo, arranjados em uma sequência de caracteres ou genes, chamada de cromossomo. Esta codificação é chamada genótipo e o gene é a unidade básica de representação no cromossomo e os valores que ele assume são chamados de alelos. Dentre as diversas formas de codificação citam-se a binária, a inteira e a real, que se distinguem pela representação dos números nas formas binária (0 ou 1), decimal inteira e real, respectivamente.

Na representação inteira, usada neste trabalho, cada gene armazena um código inteiro representando uma variável de projeto  $x$  e o seu alelo pode ser o próprio valor da variável de projeto se  $x$  for inteiro ou pode representar a posição em uma lista que associa a variável a um valor qualquer, podendo ser um caractere alfanumérico ou lógico. Esta estratégia qualifica o AG para solução de problemas de otimização discreta (combinatória).

A Figura 29 mostra um exemplo, para uma viga de dois vãos, do cromossomo do indivíduo na representação inteira, onde as variáveis representam posições em listas, também indicadas na figura para cada uma das variáveis. O primeiro gene caracteriza a largura  $b_w$  da viga, os genes nas posições de 2 a 5 e de 6 a 9 caracterizam as seções dos vãos, representando, em cada vão, a altura  $h$ , a razão  $\lambda$  entre a armadura comprimida e a tracionada, a posição relativa da linha neutra  $\beta_x$  e o parâmetro lógico  $\kappa$  de controle de existência de armadura comprimida. As posições de 10 a 12, de 13 a 15 e de 16 a 19 caracterizam as seções dos apoios. A lista para decodificação da largura é a mesma da altura.

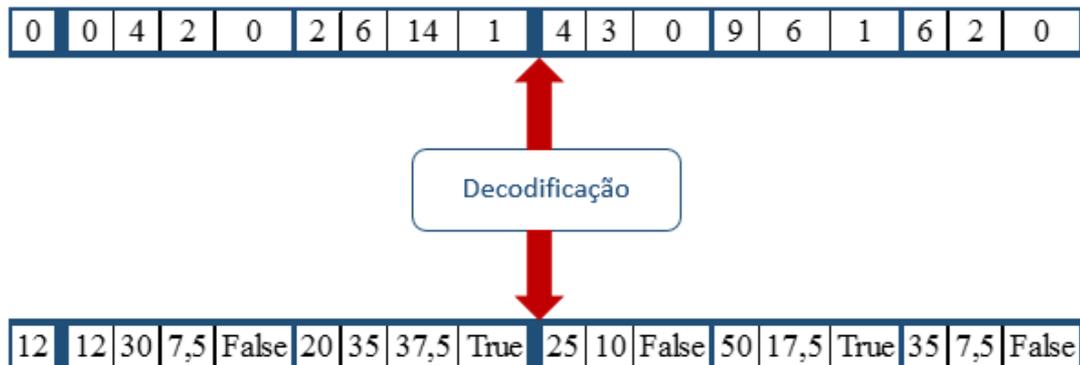
Figura 29. Representação genética dos indivíduos



Fonte: Elaborado pelo autor

A decodificação de um indivíduo, ou do seu cromossomo, é feita convertendo as posições nas listas para os valores nelas armazenados. A Figura 30 ilustra o fenótipo obtido da decodificação da cadeia genotípica do exemplo da Figura 29.

Figura 30. Decodificação do genótipo dos indivíduos



Fonte: Elaborado pelo autor

O tamanho do cromossomo varia com o problema em função do número de vãos da viga e o tamanho das listas varia em função dos valores considerados para cada variável. Estes valores são definidos em função de valores limites e de um incremento para as variáveis numéricas.

### 5.1. Operações básicas no algoritmo genético

Apesar da existência de muitas variações, o AG básico tem os passos seguintes (Grosko *et al.*, (2006):

1. Geração da população;
2. Avaliação da população;
3. Teste de convergência ou critério de parada;
4. Seleção dos indivíduos;
5. Aplicação dos operadores;
6. Criação de uma nova geração.

Vale frisar que esta metodologia trata-se de um processo estocástico, ou seja, tem base em eventos aleatórios, o que pode trazer diferentes resultados se examinado mais de uma vez. Lima (2011) afirma que devido ao fato do AG ser um método probabilístico, alguns autores preferem escolher outras metodologias, entretanto, a autora segue afirmando que os estudos apresentam uma boa evolução do algoritmo, conferindo assim ainda mais confiabilidade e precisão ao método. A Figura 31 representa um paralelo entre a genética natural e o AG.

Figura 31. Correspondência entre a genética Darwinista e o algoritmo genético



Fonte: Lima(2011)

### 5.1.1. Função Aptidão e Penalidade

Os AGs não resolvem diretamente problemas com restrições (Rocha, 2013). Havendo restrições, estratégias devem ser utilizadas para considerar o efeito delas sobre os indivíduos, mantendo uma medida de desempenho para que possam ser avaliados e comparados no AG, chamada de função aptidão. As estratégias para tratar as restrições podem ser classificadas em diretas ou interiores e indiretas ou exteriores (Lemonge e Barbosa, 2004). Nas primeiras, somente indivíduos viáveis são considerados. Nas indiretas, tanto indivíduos viáveis quanto inviáveis são permitidos e, para estes, o efeito das restrições é incorporado na função objetivo na forma de uma penalidade exterior.

Dentre os métodos diretos mais simples, para exemplificar, cita-se a pena de morte, que simplesmente descarta o indivíduo inviável e cria outro, repetindo o processo até obter um viável. Esta técnica, dependendo do que se está vinculado ao cálculo da função objetivo e o tamanho do espaço de projeto, pode ser computacionalmente ineficiente.

Dentre as técnicas indiretas, a mais popular e de implementação simples é a de penalidade exterior. Em problemas de minimização, ela consiste em aumentar a função objetivo de indivíduos inviáveis, que pode ser feito de forma aditiva ou multiplicativa. À este fator dá-se o nome de penalidade.

A penalidade estática é uma técnica em que um fator constante ( $k$ ) é escolhido e aplicado ao longo das gerações. Este fator é multiplicado pelo valor da restrição violada e acrescida à função objetivo do indivíduo, criando a função aptidão

$$f_p = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n_{res}} (k \cdot \max(g_i(\mathbf{x}), 0)) \quad (118)$$

onde  $n_{res}$  é o número de restrições e  $g_i(\mathbf{x})$  são as funções de restrição dos problemas.

Esta técnica é simples, entretanto, alguns cuidados devem ser tomados antes de sua utilização:

1. Caso o fator escolhido seja muito pequeno, corre-se o risco de que um indivíduo inviável seja melhor que um indivíduo viável, resultando em uma resposta absurda;
2. Caso o fator de penalidade seja muito grande, o indivíduo obterá uma função aptidão muito alta, diminuindo sua probabilidade de cruzar e assim aproveitar alguma característica positiva;
3. Caso existam grandes diferenças na ordem de grandeza de uma restrição em relação às outras, mesmo com uma violação fisicamente intolerável dessa restrição, o uso de um fator pequeno pode tornar um indivíduo inviável competitivo em relação aos demais.

Para se evitar a terceira possibilidade, é necessário que as restrições estejam normalizadas, variando os seus valores com a mesma ordem de grandeza.

Deb (2000) propôs em seu trabalho um fator de penalidade mutável que leva o valor da função objetivo de indivíduos inviáveis ao valor mais alto da população e adiciona à função objetivo dos indivíduos inviáveis a soma das violações das restrições, isto é,

$$f_p = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for viável} \\ f_{\max} + \sum_{i=1}^{n_{res}} (\max(g_i(\mathbf{x}), 0)) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for inviável} \end{cases} \quad (119)$$

onde  $f_{\max}$  representa a maior função objetivo da população.

### 5.1.2. Seleção

O operador de seleção seleciona os indivíduos que se submeterão ao cruzamento (*crossover*). Desta forma, é esperado que o método de seleção escolha melhores indivíduos e exclua os piores. Quando a probabilidade de seleção dos melhores indivíduos é elevada, diz-se

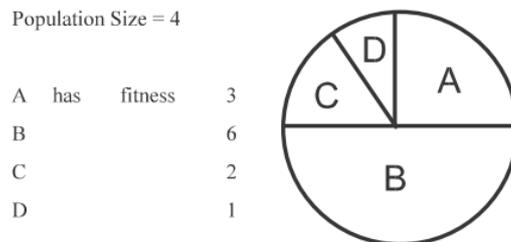
que a estratégia de seleção tem alta pressão de seleção e quanto maior for esta pressão, maior será a velocidade de convergência do algoritmo para um mínimo (local ou global). Por outro lado, se esta pressão de seleção é pequena, o algoritmo tenderá a explorar mais o espaço de projeto (Jones, 1995).

As estratégias de seleção mais usadas são a Roleta e o Torneio. No Torneio, em geral, dois indivíduos são selecionados aleatoriamente e levados para um confronto em termos da função objetivo. O melhor indivíduo é selecionado para o cruzamento.

Na Roleta, um par de indivíduos é selecionado para o cruzamento em função de uma probabilidade de seleção. Esta probabilidade pode ser proporcional ao valor da função aptidão ou baseada na posição em um ranking dos indivíduos em função da função aptidão.

A Figura 32 ilustra para uma população de 4 indivíduos (A, B, C e D) com valores de funções aptidão 3, 6, 2 e 1, respectivamente, a aplicação da roleta com probabilidade proporcional à função aptidão. As probabilidades são obtidas dividindo a função aptidão do indivíduo pela soma das aptidões. Na roleta abaixo, o indivíduo B tem 50% de chance de ser selecionado para o cruzamento, ao passo que A, C e D possuem 25%, 16,67% e 8,33%, respectivamente. Um número entre 0 e 1, gerado aleatoriamente, define o indivíduo selecionado.

Figura 32. Método da roleta



Fonte: Jones (1995)

Ao longo do processo é esperado que indivíduos menos aptos deixem de existir, restando somente as melhores soluções. Este tipo de seleção pode ter problemas de convergência, pois um único indivíduo com alta função aptidão pode dominar a roleta levando o algoritmo a uma convergência prematura (Thompson, 2009).

Na seleção por ranking, o melhor indivíduo de uma população terá a mesma probabilidade de ser escolhido independentemente do quão melhor for sua função aptidão. A Tabela 2 ilustra um exemplo de uma população com 4 indivíduos, com valores hipotéticos para a função objetivo.

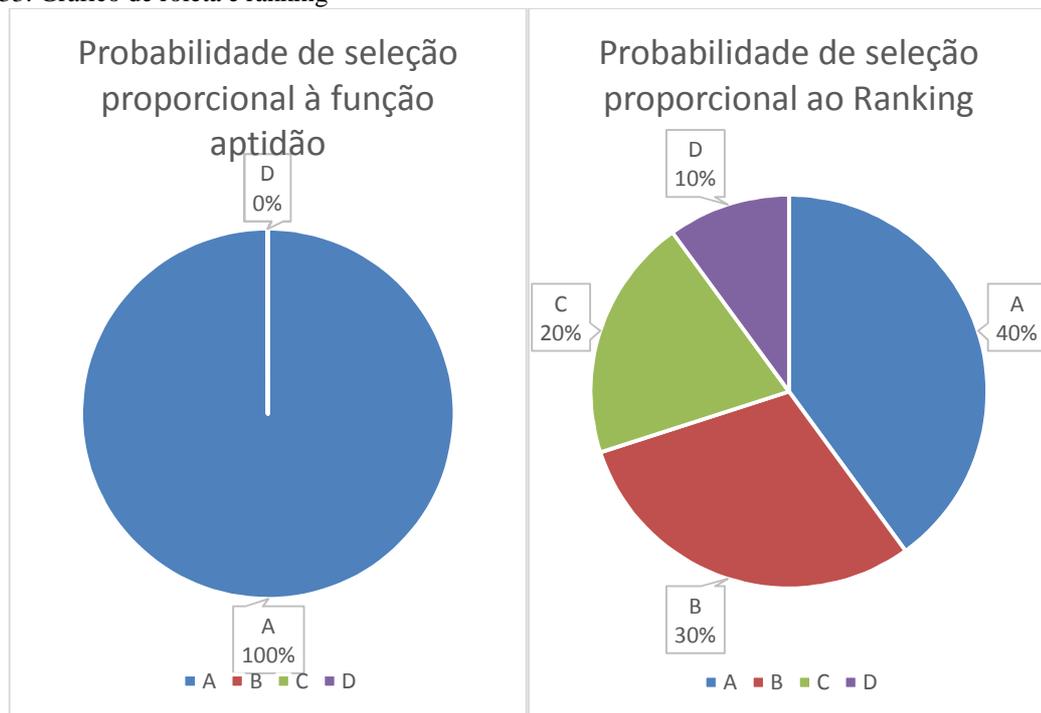
Tabela 2. Indivíduos e função objetivo

Indivíduo	Função aptidão
A	20000
B	5
C	4
D	3

Fonte: Elaborado pelo autor

As probabilidades de seleção dos indivíduos são representadas na Figura 33. Nota-se que o absurdo valor da função aptidão do indivíduo A, na probabilidade proporcional à aptidão, dá a este aproximadamente 100% de chance de escolha, ao passo que a probabilidade de escolha dos indivíduos B, C e D são praticamente nulas. Para as probabilidades baseadas no ranking, estas probabilidades são distribuídas linearmente, com incrementos constantes entre indivíduos. A pressão de seleção para o ranking é usualmente menor que o da roleta.

Figura 33. Gráfico de roleta e ranking



Fonte: Elaborado pelo autor

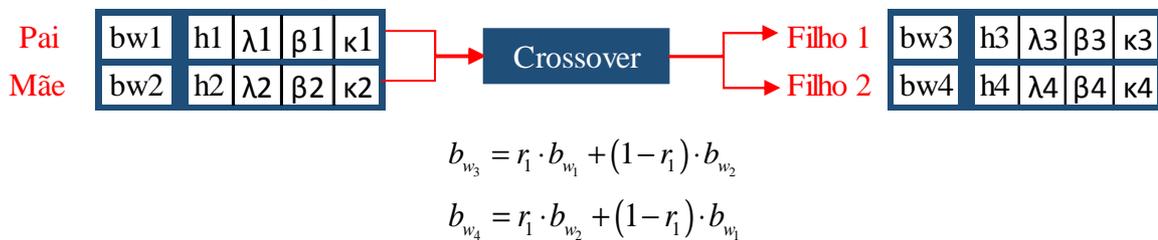
### 5.1.3. Cruzamento (Crossover)

O cruzamento é o operador do algoritmo genético que mais destaca este algoritmo de outras estratégias evolutivas (De Jong, 2006). Durante o crossover, são combinadas

informações de dois ou mais indivíduos (pais) e a partir destes, outros indivíduos (filhos) são gerados. A literatura apresenta diversos tipos de cruzamento para AG's que utilizam uma forma de representação ou codificação binária (Grosko, 2006), (Thompson, 2009), (Jones, 1995). Entretanto, este tipo de representação não é objeto de estudo deste trabalho. O cruzamento aqui apresentado será o proposto por Rocha (2013) que apresentou uma formulação real para o AG, que pode ser estendida para a representação inteira com o conceito de aproximação.

Segundo Rocha (2013), um número randômico  $r_1$  compreendido entre 0 e 1 é criado aleatoriamente e os filhos possuem valores de genes correspondentes à combinação linear dos valores dos genes dos pais utilizando o valor de  $r_1$ , conforme ilustra a Figura 34.

Figura 34. Combinação linear de genes



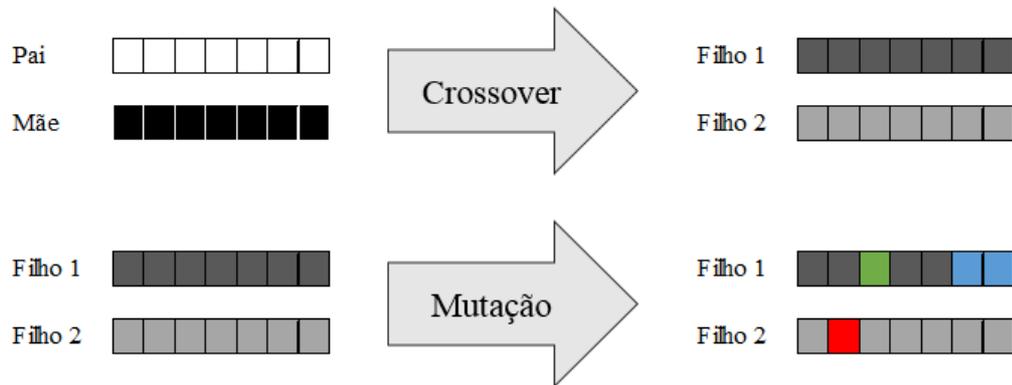
Fonte: Elaborado pelo autor

Segundo De Jong (2006), a característica de realizar cruzamentos entre indivíduos diferentes, aliado à mutação provê a possibilidade de uma exploração muito maior do espaço de projeto.

#### 5.1.4. Mutação

A mutação é um operador do algoritmo genético que modifica as características de um certo indivíduo de forma aleatória, apagando um determinado gene e gerando um novo valor.

Figura 35. Representação de uma mutação



Fonte: Elaborado pelo autor

### 5.1.5. *Elitismo*

Durante a etapa de seleção, os melhores indivíduos, usualmente possuirão boas chances de ser escolhidos. Entretanto, não existe nenhuma garantia de que estes indivíduos sejam escolhidos, ou se perpetuem para a próxima geração. Esta falta de garantia pode erroneamente descartar um indivíduo que é um forte candidato a ser o ótimo. Para atenuar ou eliminar esta possibilidade, o elitismo foi sugerido. Este operador passa automaticamente para a próxima geração os melhores indivíduos da geração atual. Desta forma é garantido que no caso do valor ótimo ser encontrado em algum ponto da execução do AG, ele será perpetuado até o fim da execução.

## 5.2. BIOS (*Biologically Inspired Optimization Tool*)

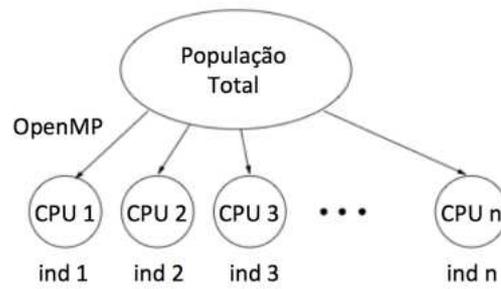
Reunindo algoritmos de otimização inspirados na natureza, o BIOS é um software desenvolvido pelo LMCV (UFC) e foi inicialmente proposto por Rocha (2013) que implementou o algoritmo genético no software.

O AG do BIOS foi implementada em C++ utilizando linguagem orientada ao objeto, possuindo como algoritmos de seleção: o método de penalidade proposto por Deb (2000), penalidade estática, penalidade adaptativa (Barbosa e Lemonge 2004). A seleção do algoritmo se dá de forma proporcional a função objetivo ou através do ranking.

Existem diversas formas de paralelização para o AG. A mais simples é a paralelização global, na qual os indivíduos não possuem restrições de quem podem cruzar (*Panmitica*). Através da utilização da biblioteca OpenMP e do advento de processadores com múltiplos núcleos (*multi-core*) é possível dividir a avaliação dos indivíduos entre os diferentes

núcleos. A Figura 36 ilustra a divisão de um número de indivíduos  $n$  nos  $n$  cores de um computador.

Figura 36. Divisão das avaliações por indivíduo.



Fonte: Rocha (2013)

## 6. APLICAÇÕES

A formulação proposta é aplicada em exemplos retirados de trabalhos da literatura com otimização de vigas de concreto armado para verificação da eficiência da estratégia em 2 níveis.

Os exemplos foram dispostos em ordem crescente de complexidade, começando com uma viga bi apoiada Clímaco (2009); Brito (2013); Oliveira (2014), depois uma viga com dois vãos (Araújo, 2010), uma viga com três vãos Sacoman (1987).

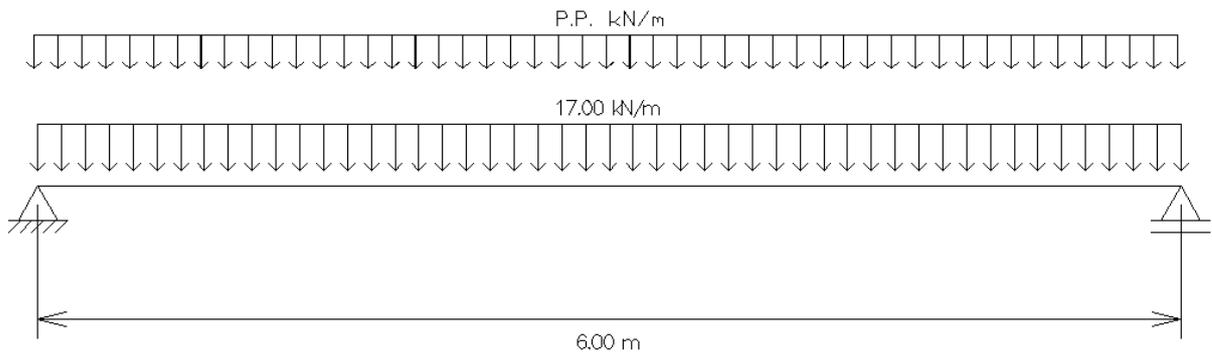
### 6.1. Viga biapoiada

Brito (2013) e Oliveira (2014) utilizaram este exemplo para otimizar o dimensionamento da viga, utilizando seus modelos. Clímaco (2009) apresentou em seu trabalho, o dimensionamento desta viga de concreto armado através do método tradicional de projeto. Uma comparação entre os modelos é realizada e seus valores são comentados mais à frente. Os modelos não consideraram armaduras dispostas nos apoios extremos, para uma análise mais aproximada esta armadura também será desativada para este exemplo.

Os parâmetros da viga são descritos abaixo.

- Concreto  $f_{ck}$  de 20MPa;
- Cobrimento das armaduras: 2,5cm;
- $d'$  adotado: 4cm;
- Custo do aço:  $C_a = \text{R\$ } 3,72 / \text{kg}$ ;
- Custo do concreto:  $\text{R\$ } 415,81 / \text{m}^3$ ;
- Custo da forma:  $C_f = \text{R\$ } 82,08 / \text{m}^2$ ;
- Peso próprio considerado, mas não incluso na carga permanente;
- Densidade do aço:  $7850 \text{ kg/m}^3$ ;
- Peso específico do concreto:  $25 \text{ kN/m}^3$ ;
- $\Delta_{p,max}$  de 2.
- Corte de barras: 2 a 2;
- Detalhe de pilares não especificados.

Figura 37. Representação da viga biapoada



Fonte: FTOOL

Os parâmetros do AG utilizados no processo de otimização foram propostos por Brito (2013) e encontram-se ilustrados na Tabela 3, onde se indica o número de execuções do exemplo e a taxa de sucesso indica o número de vezes que o mesmo resultado foi obtido.

Tabela 3 Valores dos parâmetros do AG – 1º exemplo

Variáveis	Valores
População	1500
Número máximo de gerações	1000
Mutação	15%
Número de otimizações	10
Taxa de sucesso	100%

Fonte: Elaborado pelo autor

Apesar dos valores utilizados, a convergência média foi dada na 6ª geração, indicando que os valores da população e do número máximo de gerações poderia ser diminuída.

O modelo proposto é aplicado, em geral, com quatro variações em função da consideração das ancoragens e das armaduras, conforme Tabela 4.

Tabela 4. Simbologia para exemplo – Viga biapoada.

Exemplo	anc	A's
MPC01	Não (anc=0)	Sim
MPC11	Sim (anc=1)	Sim
MPC00	Não (anc=0)	Não
MPC10	Sim (anc=1)	Não

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.1.1. Resultados obtidos no 1º Nível

Os valores do primeiro nível são mostrados na Tabela 5. Os valores de Clímaco (2010), Brito (2013) e Oliveira (2014) são valores finais. Os resultados para as armaduras são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 5. Variáveis de projeto obtidos no nível 1 – exemplo 1

Variáveis	Clímaco (2010)	Brito (2013)	Oliveira (2014)	Modelo proposto			
				MPC01	MPC11	MPC00	MPC10
Base ( $b_w$ ) (cm)	20	15	15	15	15	15	15
Altura (h) (cm)	60	60	60	55	60	60	60
Razão $A'_s/A_s$	-	-	-	0,1	0,05	0	0
Beta x	0,24	0,51	0,44	0,63	0,44	0,47	0,47
Custo Total (R\$)	1.120,53	1.072,33	1.047,93	1.024,11	1.216,58	1.032,47	1.217,50
Variação % *		4,3%	6,5%	8,6%	-8,6%	7,9%	-8,7%

\* Relativo a Clímaco

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 6 Variáveis dependentes obtidos no nível 1 – exemplo 1

Variáveis	Clímaco (2010)	Brito (2013)	Oliveira (2014)	Modelo proposto			
				MPC01	MPC11	MPC00	MPC10
$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	6,00	9,50	8,30	11,87	8,69	8,82	8,82
$A'_s$ (cm <sup>2</sup> )	-	-	-	1,19	0,43	0,00	0,00
	29φ5c20	20φ5c30	20φ5c30	1φ5c27	20φ5c30	20φ5c30	20φ5c30
Estribos	-	-	-	20φ5c30	-	-	-
	-	-	-	1φ5c27	-	-	-
$A_{s,pele}$	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

No modelo proposto as restrições mais críticas foram a da flecha e o limite do domínio 4 (peça superarmada). A solução de Clímaco(2010) não considerou a flecha, cuja restrição está sendo violada, as restrições são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 Restrições obtidas no nível 1- 1º exemplo

Variáveis	Clímaco (2010)	Brito (2013)	Oliveira (2014)	Modelo proposto			
				MPC01	MPC11	MPC00	MPC10
Critério de Navier-Bernoulli	-0,8000	-0,8000	-0,8000	-0,7250	-0,7000	-0,7000	-0,7000
Deslocamento	<b>0,0967</b>	<b>-0,0039</b>	<b>-0,0033</b>	<b>-0,0138</b>	<b>-0,0004</b>	<b>-0,0039</b>	<b>-0,0039</b>
Esmagamento biela T1	-0,8490	-0,7249	-0,8063	-0,7051	-0,7288	-0,7288	-0,7288
Esmagamento biela T2	-0,8490	-0,7249	-0,8063	-0,7051	-0,7288	-0,7288	-0,7288
Mínima área de aço na seção	-0,5726	-0,6905	-0,8115	-0,8957	-0,8447	-0,8470	-0,8470
Máxima área de aço na seção	-	-	-	-0,6043	-0,7465	-0,7550	-0,7550
ELU	<b>0,0000</b>	-0,3306	<b>-0,2608</b>	-0,4060	-0,3094	-0,3046	-0,3046
Domínio 4	-0,6189	<b>-0,1820</b>	-0,2998	<b>-0,0054</b>	<b>-0,2998</b>	<b>-0,2520</b>	<b>-0,2520</b>
Estribos	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000

Valores em destaque: restrições mais críticas

Fonte: Elaborado pelo autor

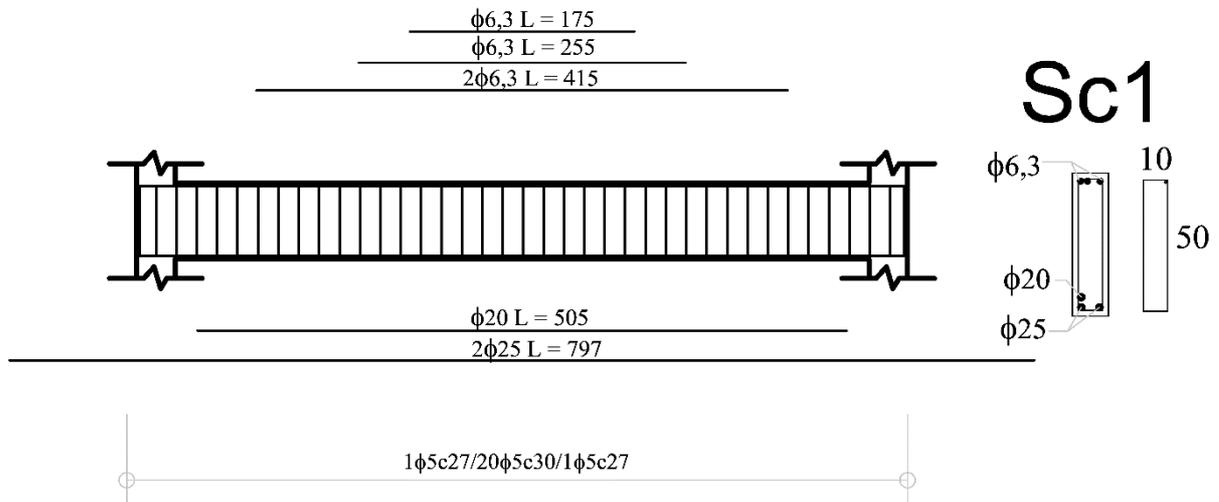
### 6.1.2. Resultados obtidos no 2º nível

As áreas de aço e a distribuição das barras nas seções e ao longo da viga são expressos nas tabelas: Tabela 8, Tabela 9, Tabela 10 e Tabela 11, onde são mostrados os detalhes da armadura obtida no 1º nível ( $A_{s,nec}$ ), a área de aço obtida no 2º nível ( $A_{s,real}$ ), a solução dividida por camadas de aço, o excesso que é a porcentagem sobressalente de  $A_{s,real}$  em relação ao  $A_{s,nec}$  e por fim, o corte de barras. Nas figuras: Figura 38, Figura 39 e Figura 40 são mostrados os detalhes. Vale frisar que a Figura 40 representa as soluções referentes a armadura simples (MPC0 e MPC10).

Tabela 8. Resultados para a otimização no nível 2– anc = 0 (MPC01).

Seção	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s,real}$ (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	11,87	13,15	2 $\phi$ 25 1 $\phi$ 20	9,74%	Corte 1: 2 $\phi$ 25 L = 7973 Corte 2: 1 $\phi$ 20 L = 5051
Dupla V1	1,19	1,26	3 $\phi$ 6,3 1 $\phi$ 6,3	5,80%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 4132 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 2539 Corte 3: 1 $\phi$ 6.3 L = 1743

Fonte: Elaborado pelo autor

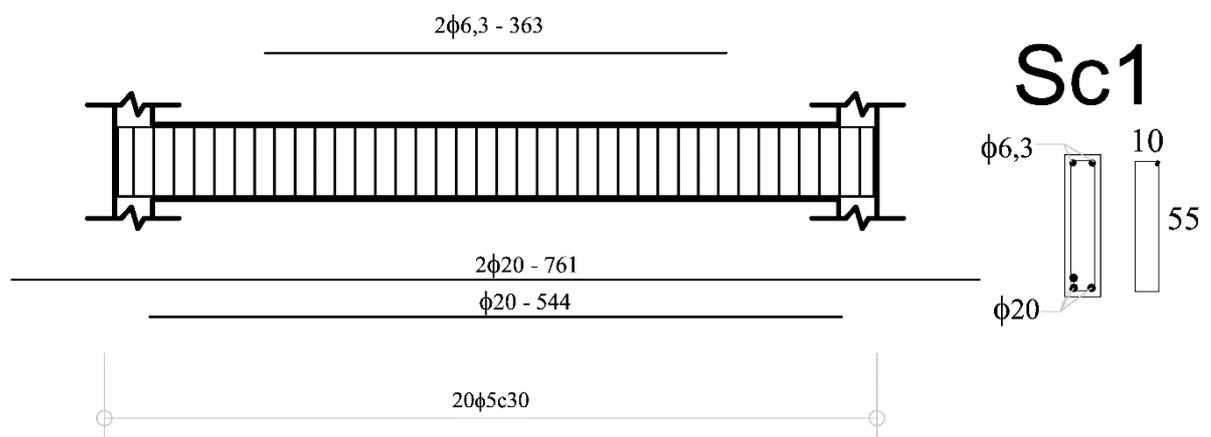
Figura 38. Representação viga bi apoiada -  $A's=1$ ,  $anc=0$  (MPC01)

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 9 Resultados para a otimização no nível 2-  $anc = 1$  (MPC11)

Seção	$As,nec$ (cm <sup>2</sup> )	$As,real$ (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	8,69	9,45	2φ20 1φ20	8,02%	Corte 1: 2 φ 20 L = 7609 Corte 2: 1 φ 20 L = 5434
Dupla V1	0,43	0,63	2φ6,3	31,01%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 3626

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 39. Representação da viga bi apoiada -  $A's=1$ ,  $anc=1$  (MPC11).

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 10. Resultados para a otimização no nível 2 –  $anc = 0$ ,  $A'_s = 0$  (MPC00 e MPC10).

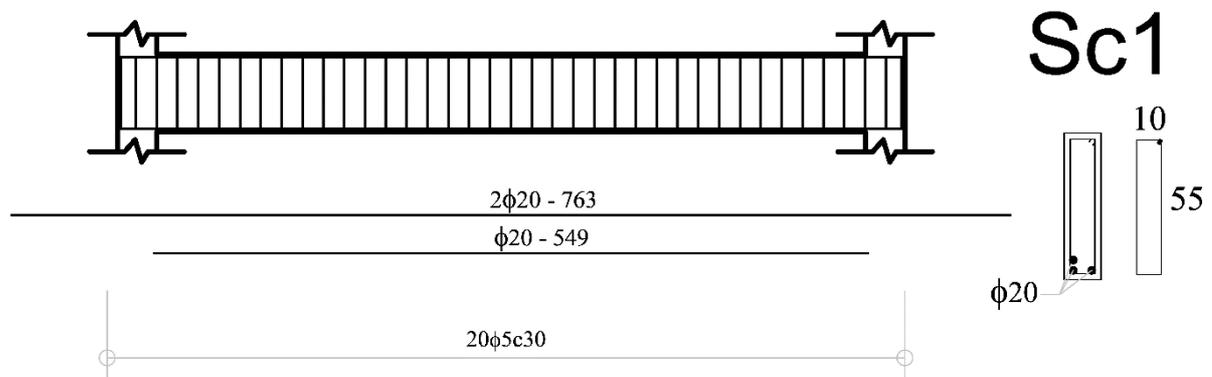
Seção	As,nec (cm <sup>2</sup> )	As,real (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	8,82	9,45	2 $\phi$ 20 1 $\phi$ 20	6,66%	Corte 1: 2 $\phi$ 20 L = 7633 Corte 2: 1 $\phi$ 20 L = 5490

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 11. Resultados para a otimização no nível 2 –  $anc = 1$ ,  $A'_s = 0$  (MPC00 e MPC10).

Seção	As,nec (cm <sup>2</sup> )	As,real (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	8,82	9,45	2 $\phi$ 20 1 $\phi$ 20	6,66%	Corte 1: 2 $\phi$ 20 L = 7633 Corte 2: 1 $\phi$ 20 L = 5490

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 40. Representação da viga bi apoiada -  $A'_s=0$ ,  $anc=1$  /  $A'_s=0$ ,  $anc=1$  (MPC00 e MPC10).

Fonte: Elaborado pelo autor

A comparação entre os custos finais é apresentada na Tabela. 12. Nota-se que o resultado obtido para MP01, no primeiro nível o menor custo, sofreu uma aumento devido ao acréscimo de aço e passou a ser o resultado com o pior desempenho dentre os do modelo proposto. Os custos obtidos por Brito (2013) e Oliveira(2014) aparentemente são menores, entretanto, assim como Clímaco (2010), estes não levam em consideração os comprimentos de ancoragem das barras de aço, para uma comparação mais fidedigna seria necessário incrementar ao valor obtido pelos autores o comprimento de ancoragem necessário.

Tabela. 12 Design final da viga – Viga bi apoiada.

Modelo	Custos (R\$)	% redução *
Clímaco (2010)	R\$ 1.120,53	0,00%
Brito (2013)	R\$ 1.072,33	-4,30%
Oliveira (2014)	R\$ 1.047,93	-6,48%
MPC01	R\$ 1.124,57	0,36%
MPC11	R\$ 1.099,33	-1,89%
MPC00	R\$ 1.093,69	-2,40%

MPC10

R\$ 1.093,69

-2,40%

\* Relativos a Clímaco

Fonte: Elaborado pelo autor

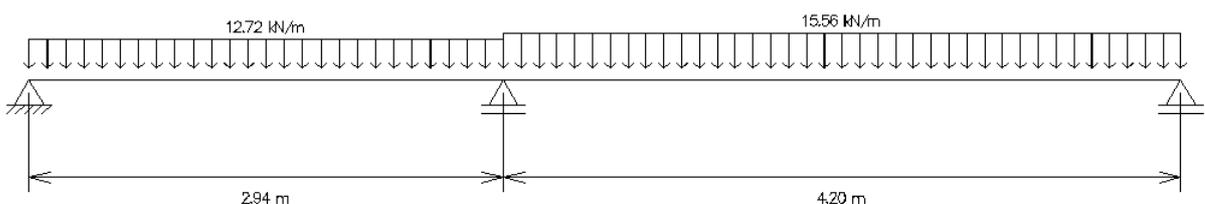
## 6.2. Vigas com dois vãos

Araújo (2010) dimensionou um edifício de concreto armado e dentre os diversos elementos calculados pelo autor, uma viga de dois vãos é detalhada e verificada. O segundo exemplo deste trabalho compara as soluções obtidas por Araújo (2010) e o modelo de 2 níveis utilizando os custos obtidos através da tabela da SEINFRA – CE. Em seu memorial de cálculo, Araújo (2010) utiliza outra norma para o cálculo das armaduras nos apoios extremos, em função desta peculiaridade, optou-se por desativar também as armaduras das extremidades.

Os parâmetros utilizados são apresentados abaixo.

- Concreto  $f_{ck}$  de 25MPa;
- Cobrimento das armaduras: 2,5cm;
- $d'$  adotado: 4cm;
- Custo do concreto: R\$ 415,81 /m<sup>3</sup>;
- Custo do aço:  $C_a$ = R\$ 3,72 /kg;
- Custo da forma:  $C_f$ = R\$ 82,08 /m<sup>2</sup>;
- Peso próprio incluso na carga total;
- Densidade do aço: 7850 kg/m<sup>3</sup>;
- Peso específico do concreto: 25kN/m<sup>3</sup>;
- $\Delta_{p,max}$  de 2.
- Corte de barras: 2 a 2;
- Pilares de (50x20), (50x20) e (50x20), respectivamente da esquerda para a direita na viga.

Figura 41. Representação viga com dois vãos



Fonte: FTOOL

O modelo proposto é aplicado a duas situações, onde se varia a condição de estimativa de ancoragem para o primeiro nível, conforme Tabela 13. Os parâmetros utilizados no AG são ilustrados na Tabela 14.

Tabela 13. Simbologia para exemplo – Viga com 2 vãos

<b>Exemplo</b>	<b>anc</b>	<b>A's</b>
MPA01	Não (anc=0)	Sim
MPA11	Sim (anc=1)	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 14 Valores dos parâmetros do AG – viga dois vãos

<b>Variáveis</b>	<b>Modelo proposto</b>
População	750
Número Max de gerações	500
Número médio de gerações	90
Mutação	15%
Número de otimizações	10
Taxa de sucesso	100%

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.2.1. Resultados obtidos no 1º nível

Os valores obtidos no primeiro nível de otimização são mostrados na Tabela 15 e os resultados obtidos para as armaduras são mostrados na Tabela 16.

Tabela 15. Resultados do primeiro nível – viga dois vãos.

	<b>Variáveis</b>	<b>Araújo (2010)</b>	<b>Modelo proposto</b>	
			<b>MPA01</b>	<b>MPA11</b>
<b>Vão 1</b>	Base (bw) (cm)	12	12	12
	Altura (h) (cm)	60,0	25	25
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	0,059	0,20	0,20
<b>Vão 2</b>	Base (bw) (cm)	12	12	12
	Altura (h) (cm)	60,0	35	40
	Razão As/A's		0	0
	Beta x	0,18	0,53	0,28
<b>Ap2</b>	Base (bw) (cm)	12	12	12
	Altura (h) (cm)	60,0	25	25
	Razão As/A's		0,15	0,05
	Beta x		0,44	0,44
<b>Custo</b>	Custo Total (R\$)	763,49	642,25	711,22

Variáveis	Araújo (2010)	Modelo proposto	
		MPA01	MPA11
% Variação	0,0%	-15,9%	-6,8%

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 16. Detalhes de armaduras – viga dois vãos.

Variáveis	Araújo (2010)	Modelo Proposto		
		MPA01	MPA11	
<b>Vão 1</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	0,72	1,41	1,41
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,00	0,00
	Cisalhamento (Asw)	14φ5c21	26φ5c12	26φ5c12
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-
	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	2,17	5,45	3,32
<b>Vão 2</b>	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,00	0,00
	Cisalhamento (Asw)	20φ5c21	25φ5c18	21φ5c21
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-
	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )		0,00	0,00
<b>Ap 1</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	2,53	3,64	3,26
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,55	0,16
<b>Ap 2</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00
<b>Ap 3</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Para o primeiro nível, as restrições ativas foram o deslocamento, o critério de resistência e a ductilidade da seção. O critério de resistência para o vão V2 apresenta uma certa folga, isso se deve ao fato de que a deformação é quem limitou as dimensões da seção e área de aço. No caso do vão V1 ocorre o oposto, a resistência é a limitante.

Tabela 17. Tabela de restrições – Viga com dois vãos.

Variáveis	MPA01	MPA11
Critério de Navier-Bernoulli V1	-0,7449	-0,7449
Critério de Navier-Bernoulli V2	-0,7500	-0,7143
Restrição de deslocamento V1	-0,8680	-0,7241
Restrição de deslocamento V2	<b>-0,0176</b>	<b>-0,0136</b>
Rompimento da biela de concreto sec 1 V1	-0,8511	-0,8436
Rompimento da biela de concreto sec 2 V2	-0,6701	-0,6776
Rompimento da biela de concreto sec 1 V1	-0,6737	-0,7221
Rompimento da biela de concreto sec 2 V2	-0,7595	-0,7899
Mínima área de aço na seção V1	-0,6803	-0,6803
Mínima área de aço na seção V2	-0,8845	-0,7830
Mínima área de aço na seção AP 1	-0,8033	-0,8174
Mínima área de aço na seção AP 2	-0,8765	-0,8620
Mínima área de aço na seção AP 3	-0,8134	-0,9045
Máxima área de aço na seção V1	-0,8827	-0,8827
Máxima área de aço na seção V2	-0,6753	-0,8272
Máxima área de aço na seção AP1	-0,7712	-0,7433
Máxima área de aço na seção AP2	-0,6509	-0,7148
Máxima área de aço na seção AP3	-0,7990	-0,4502
Verificação ELU V1	<b>-0,0847</b>	<b>-0,0847</b>
Verificação ELU V2	-0,4045	-0,2294
Verificação ELU AP1	-0,3895	-0,4266
Verificação ELU AP2	<b>-0,0210</b>	<b>-0,0015</b>
Verificação ELU AP3	-0,4339	-0,8101
Domínio 4 V1	-0,6817	-0,6817
Domínio 4 V2	-0,1645	-0,5624
Domínio 4 AP1	-0,4828	-0,4430
Domínio 4 AP2	-0,2998	-0,2998
Domínio 4 AP3	-0,4828	-0,4032
Ductilidade da seção AP1	-0,2778	-0,2222
Ductilidade da seção AP2	<b>-0,0222</b>	<b>-0,0222</b>
Ductilidade da seção AP3	-0,2778	-0,1667
Viabilidade de estribos V1	-1,0000	-1,0000
Viabilidade de estribos V2	-1,0000	-1,0000

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.2.2. Resultados obtidos no 2º nível

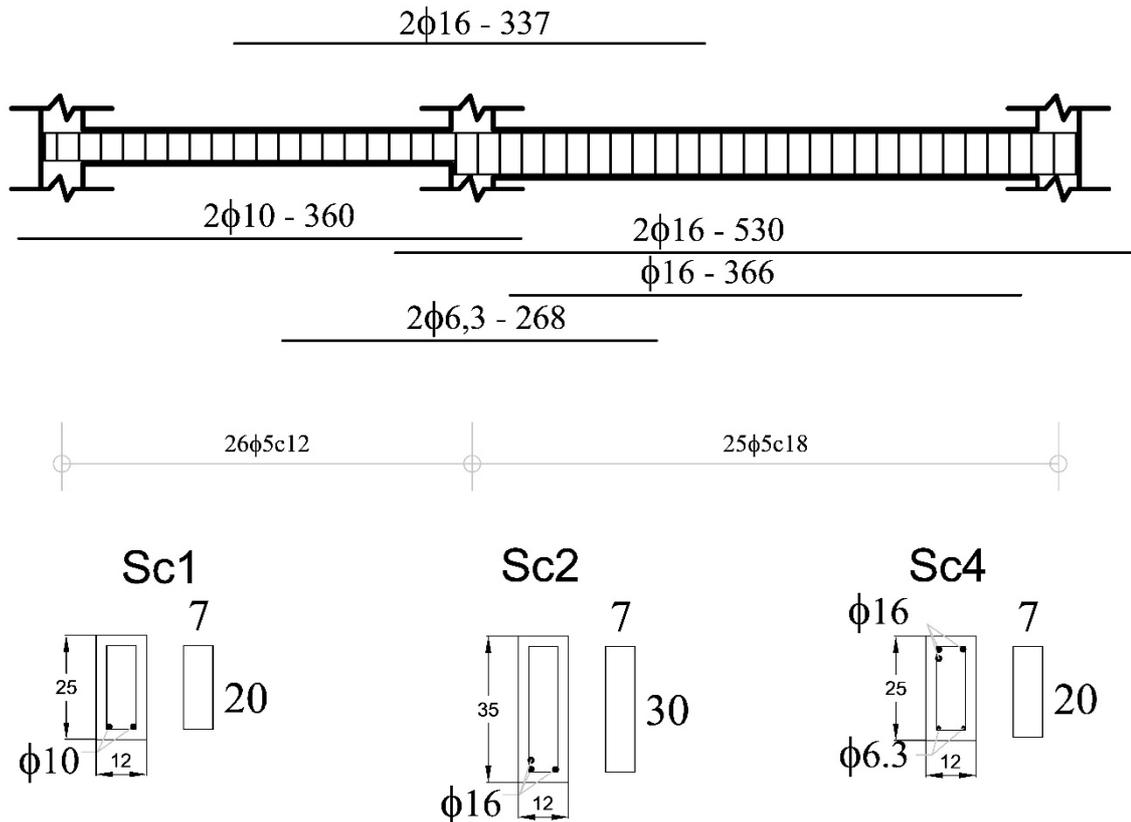
Os resultados obtidos no segundo nível de otimização são descritos nas tabelas Tabela 18 e Tabela 19. As figuras: Figura 42 e Figura 43 são mostrados os detalhes.

Tabela 18. Resultados para a otimização no nível 2– viga com dois vãos – anc=0

Seção	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s,real}$ (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	1,41	1,60	2 $\phi$ 10	12,03%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 360
Vão 2	5,45	6,00	2 $\phi$ 16 1 $\phi$ 16	9,09%	Corte 1: 2 $\phi$ 16 L = 530 Corte 2: 1 $\phi$ 16 L = 366
Ap 2	3,64	4,00	2 $\phi$ 16	8,92%	Corte 1: 2 $\phi$ 16 L = 337
Dupla Ap 2	0,55	0,63	2 $\phi$ 6,3	13,26%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 268

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 42. Segundo nível de otimização – Viga dois vãos, anc=0.



Fonte: Elaborado pelo autor

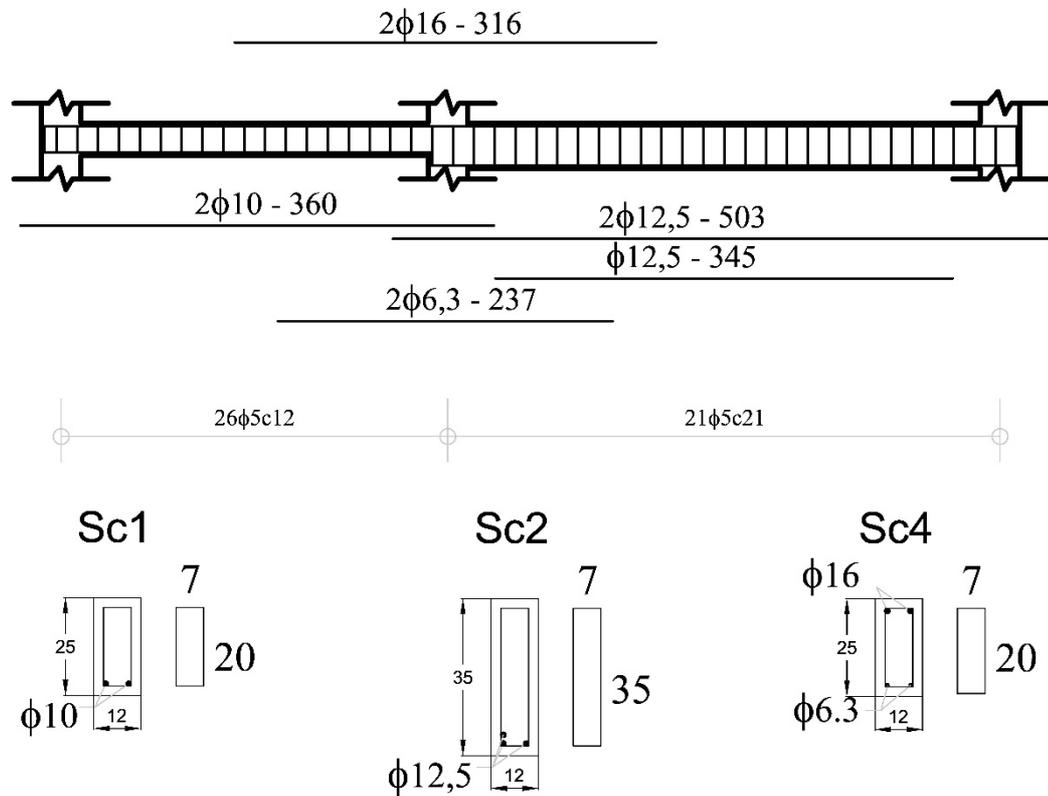
Tabela 19. Resultados para a otimização no nível 2– viga com dois vãos – anc=0

Seção	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	1,41	2 $\phi$ 10	12,03%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 360
Vão 2	3,32	2 $\phi$ 12,5 1 $\phi$ 12,5	11,52%	Corte 1: 2 $\phi$ 12.5 L = 503 Corte 2: 1 $\phi$ 12.5 L = 345
Ap 2	3,26	2 $\phi$ 16	18,51%	Corte 1: 2 $\phi$ 16 L = 316

Dupla Ap 2	0,63	2 $\phi$ 6,3	74,13%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 237
---------------	------	--------------	--------	-------------------------------

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 43. Segundo nível de otimização – Viga dois vãos, anc=1.



Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.2.3. Comparação entre resultados finais

Os custos obtidos para o processo de otimização são mostrados na Tabela 20. A diferença entre os custos obtidos é pequena, entretanto, o modelo que considera a ancoragem possui um valor menor.

Tabela 20. Custos finais das vigas – Viga com dois vãos.

Modelo	Custos (R\$)	Variação%
Araújo (2010)	763,49	0,0%
MPA01	706,26	-7,5%
MPA11	713,26	-6,5%

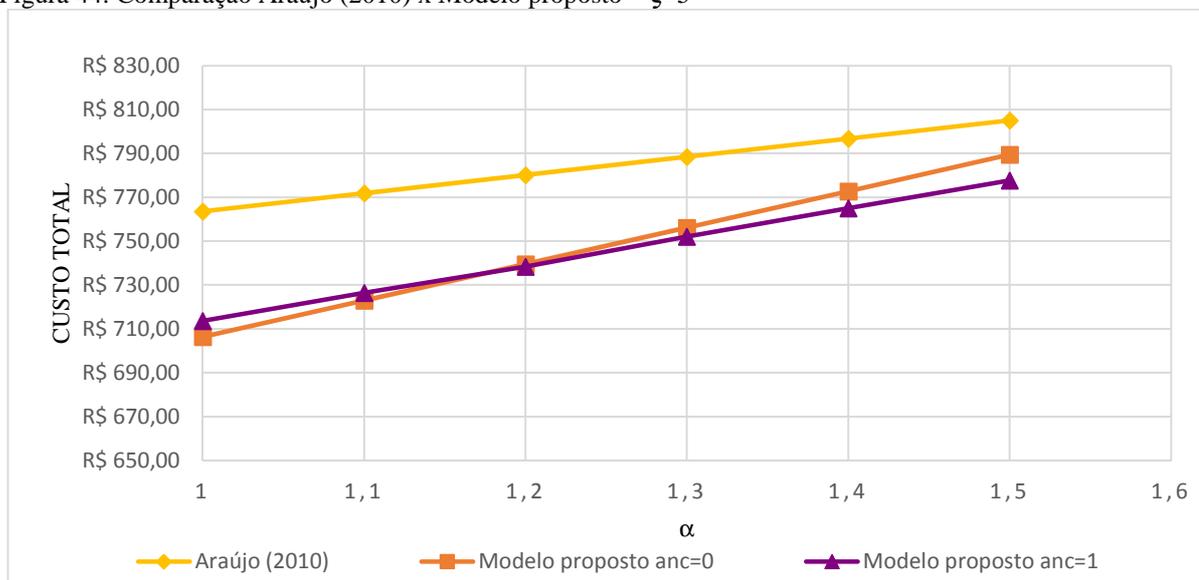
Fonte: Elaborado pelo autor

#### 6.2.4. Análise de sensibilidade

A sensibilidade foi testada elevando-se um dos custos em incrementos de  $\alpha = 10\%$  e os demais custos foram mantidos constantes. O fator  $\zeta$  variou inicialmente em incrementos de 5 e depois em incrementos de 1.

Por ser uma solução, cujo método de cálculo independe dos custos optou-se pela comparação da solução de Araújo (2010) com os resultados obtidos.

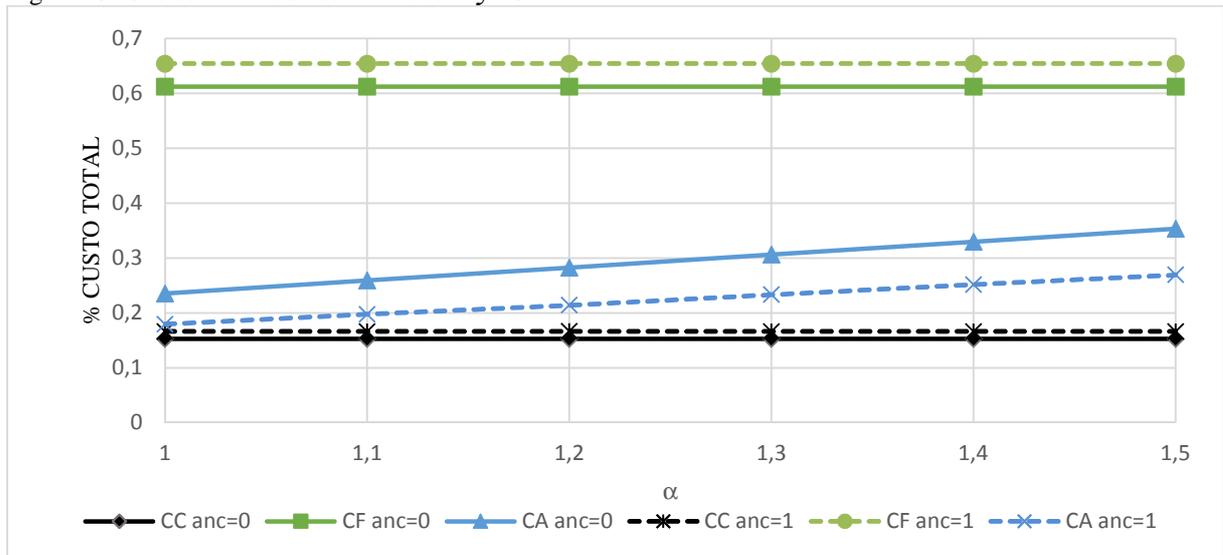
Figura 44. Comparação Araújo (2010) x Modelo proposto –  $\zeta=5$



Fonte: Elaborado pelo autor

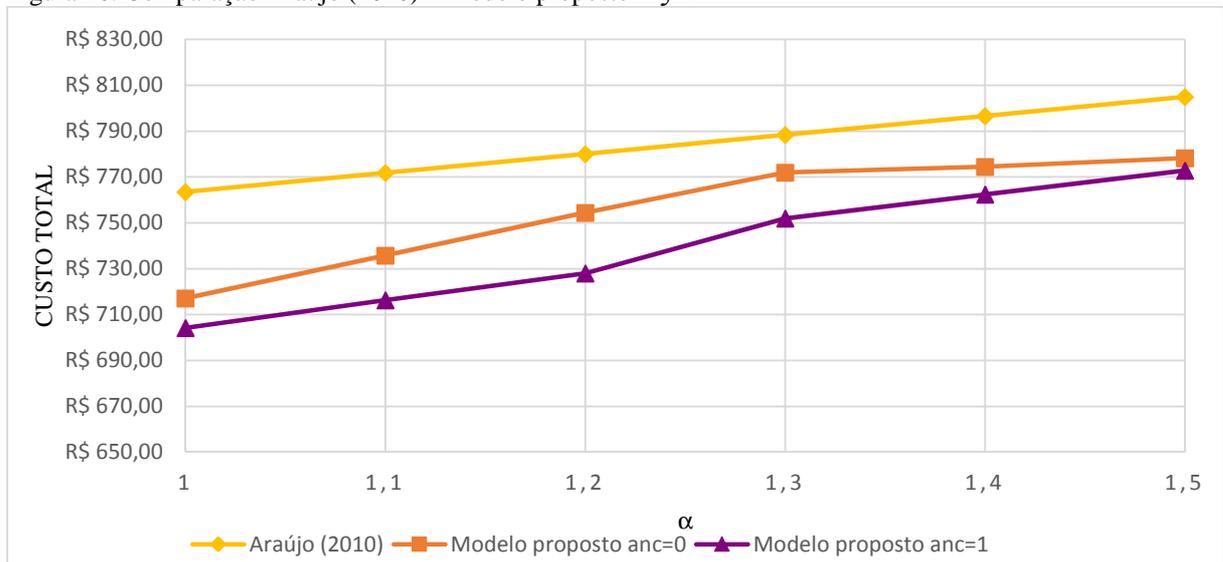
Os valores obtidos na Figura 44 mostram a mesma solução para valores de  $anc=0$  e  $anc=1$ , os custos totais variam em uma linha reta pois o custo do aço varia linearmente, dessa forma, não existiu nenhuma modificação nas dimensões da seção, ou do volume total de aço.

A Figura 45 apresenta os custos dos materiais em relação ao custo total da viga pelo fator de multiplicação do aço.

Figura 45. Custos relativos dos materiais –  $\zeta = 5$ .

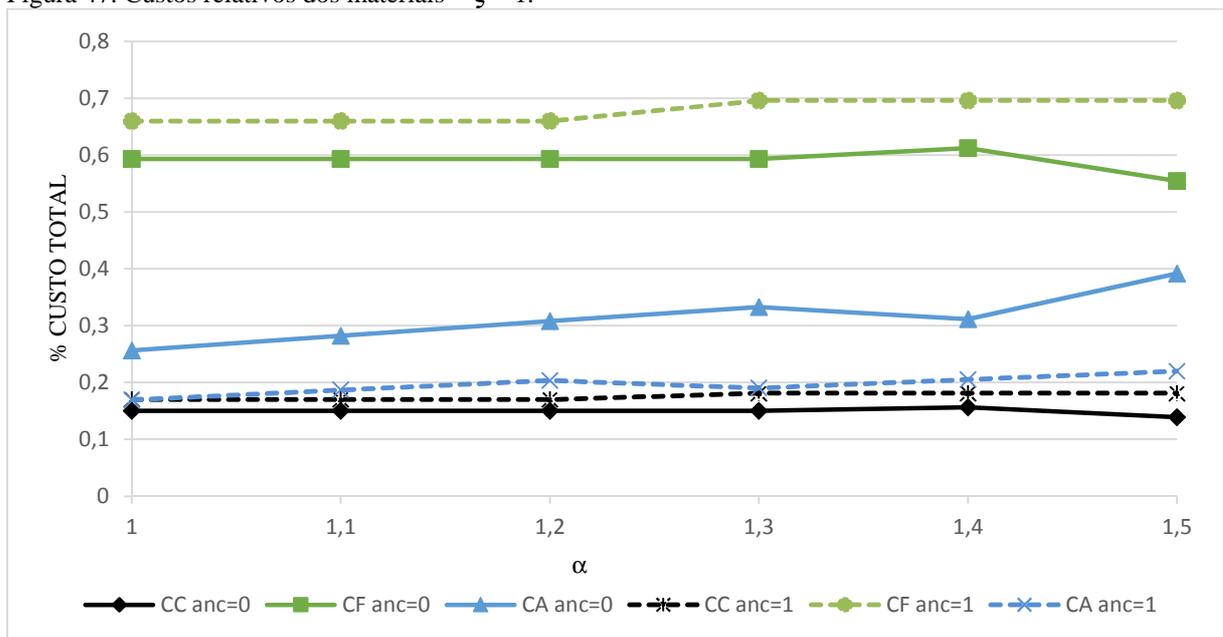
Fonte: Elaborado pelo autor

A mesma análise foi realizada para valores de  $\zeta = 1$ , os resultados apresentaram comportamentos diferenciados em relação aos casos  $\zeta=5$ .

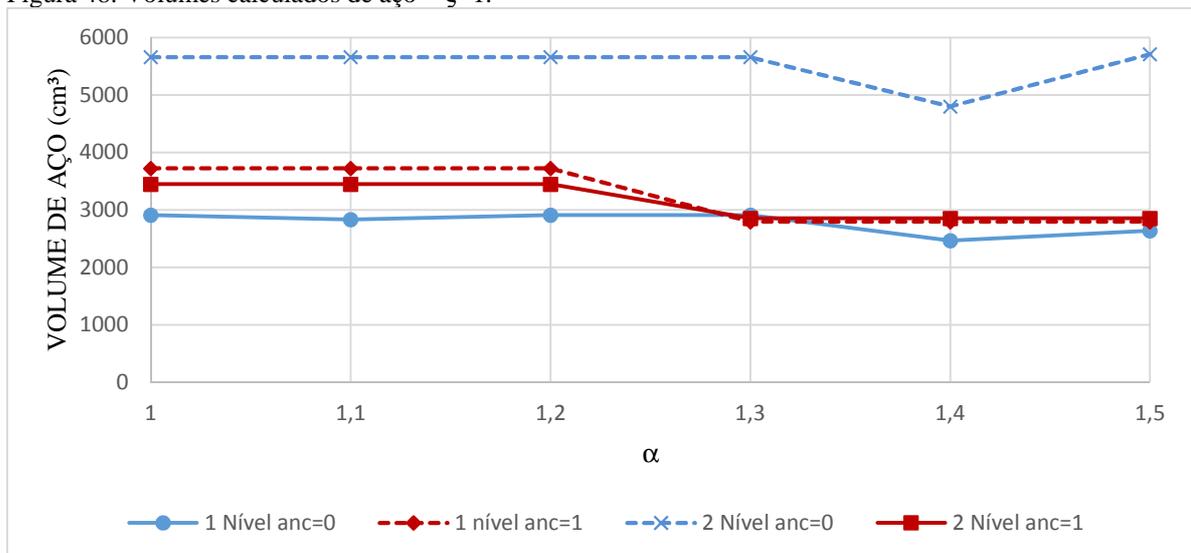
Figura 46. Comparação Araújo (2010) x Modelo proposto –  $\zeta=1$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

Mudanças de seção ocorrem nos dois modelos (Figura 46), nos pontos em que  $\alpha = 1,3$  e  $\alpha = 1,4$  nota-se que ocorre mudança de declividade das duas retas. Os custos relativos dos materiais são demonstrados na Figura 47. A Figura 48 ilustra os volumes de aço calculados.

Figura 47. Custos relativos dos materiais –  $\zeta = 1$ .

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 48. Volumes calculados de aço –  $\zeta = 1$ .

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.3. Sacoman et al (1987)

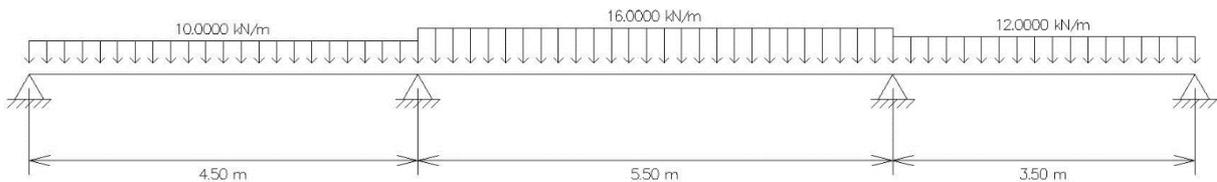
Sacoman (1987) definiu o valor da largura da viga como uma variável de entrada do modelo e é por imposição igual a 15 cm. A lista abaixo indica os parâmetros utilizados para a otimização da viga.

- Concreto  $f_{ck}$  igual a 15MPa;
- Cobrimento das armaduras: 1,5cm;

- $d'$  adotado: 3cm;
- Custo do aço: 18,5 u.m./kgf;
- Custo do concreto: 0,00212 u.m./cm<sup>3</sup>;
- Custo da forma: 0,0045 u.m./cm<sup>2</sup>;
- Acréscimo do peso próprio desativado;
- Densidade do aço e do concreto: 7850 kg/m<sup>3</sup> e 25kN/m<sup>3</sup>;
- $\Delta_{p,max}$  de 2.
- Corte de barras: 2 a 2;
- Sem pilares.

onde u.m. representa a unidade monetária. A viga a ser otimizada, encontra-se ilustrada na Figura 49.

Figura 49. Ilustração da viga otimizada no primeiro exemplo



Fonte: FTOOL

### 6.3.1. Aplicação do modelo - 1º nível

A viga de Sacoman et al (1987) foi analisada em 6 situações distintas, inicialmente considerou-se apenas armaduras simples e o valor de  $\zeta = 1$  para os casos: anc=0 e anc=1. Os dois exemplos seguintes consideraram a possibilidade de utilização da armadura dupla e foram executados para  $\zeta = 1$ , anc=0 e anc=1. As duas últimas execuções foram dadas em  $\zeta = 5$ , anc=0 e anc=1. A Tabela 21 ilustra os exemplos considerados.

Tabela 21. Simbologia para exemplo – Viga com 3 vãos.

Exemplo	anc	A's	$\zeta$
MPS001	Não	Não	1
MPS101	Sim	Não	1
MPS011	Não	Sim	1
MPS111	Sim	Sim	1
MPS015	Não	Sim	5
MPS115	Sim	Sim	5

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.3.1.1. Aplicação do modelo simplesmente armado

A Tabela 28 apresenta as variáveis de projeto obtidas na otimização da viga através dos dois modelos iniciais. A Tabela 23 ilustra os resultados para as áreas de aço.

Tabela 22. Resultados do primeiro nível – viga com três vãos, armadura simples.

	Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto	
			MPS001	MPS101
<b>Vão 1</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	37,8	38	38
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	0,15	0,18	0,18
<b>Vão 2</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	38,0	39	39
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	0,29	0,30	0,30
<b>Vão 3</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	36,2	38	38
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	0,12	0,13	0,13
<b>Ap 1</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	37,8	38	38
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	-	0,10	0,10
<b>Ap 2</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	37,8	38	38
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	0,43	0,45	0,45
<b>Ap 3</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	36,0	38	38
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	0,43	0,43	0,43
<b>Ap 4</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15
	Altura (h) (cm)	36,0	38	38
	Razão As/A's	-	0	0
	Beta x	-	0,10	0,10
<b>Custo</b>	Custo Total (R\$)	8.007,00	7.865,36	8.644,67
	Variação %	0,0%	-1,8%	8,0%

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 23. Áreas de aço – viga com três vãos, armadura simples.

Variáveis		Sacoman (1987)	Modelo proposto	
			MPS001	MPS101
<b>Vão 1</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	1,40 9,46	1,54	1,54
	Cisalhamento (Asw) (cm <sup>2</sup> /m)	-	22φ5c21	22φ5c21
		-		
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-
<b>Vão 2</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	2,79 11,57	2,71	2,71
	Cisalhamento (Asw) (cm <sup>2</sup> /m)	-	5φ5c17	5φ5c17
		-	20φ5c21	20φ5c21
		-	5φ5c17	5φ5c17
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-
<b>Vão 3</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	1,06 7,37	1,10	1,10
	Cisalhamento (Asw) (cm <sup>2</sup> /m)	-	17φ5c21	17φ5c21
		-		
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-
<b>Ap 1</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	-	0,88	0,88
<b>Ap 2</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	4,05 / 4,02	3,96	3,96
<b>Ap 3</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	3,55 / 3,85	3,74	3,74
<b>Ap 4</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	-	0,88	0,88

Fonte: Elaborado pelo autor

As restrições obtidas no problema são mostrados na Tabela 24, as restrições ativas foram as mínimas áreas de aço em uma seção, e os estado limite último.

Tabela 24. Tabela de restrições – Viga com três vãos, armadura simples.

Variáveis	Sacomani (1987)	MPS001	MPS101
Critério de Navier-Bernoulli	*	-0,7467	-0,7467
Critério de Navier-Bernoulli	*	-0,7873	-0,7873
Critério de Navier-Bernoulli	*	-0,6743	-0,6743
Rompimento da biela de concreto sec 1		-0,8562	-0,8562
Rompimento da biela de concreto sec 2		-0,7025	-0,7025
Rompimento da biela de concreto sec 1		-0,5764	-0,5764
Rompimento da biela de concreto sec 2		-0,5846	-0,5846
Rompimento da biela de concreto sec 1		-0,7019	-0,7019
Rompimento da biela de concreto sec 2		-0,8862	-0,8862
Mínima área de aço na seção	*	-0,4446	-0,4446
Mínima área de aço na seção	*	-0,6768	-0,6768
Mínima área de aço na seção	*	-0,2225	-0,2225
Mínima área de aço na seção	*	<b>-0,0281</b>	<b>-0,0281</b>
Mínima área de aço na seção	*	-0,7840	-0,7840
Mínima área de aço na seção	*	-0,7713	-0,7713
Mínima área de aço na seção	*	<b>-0,0281</b>	<b>-0,0281</b>
Máxima área de aço na seção	*	-0,9325	-0,9325
Máxima área de aço na seção	*	-0,8840	-0,8840
Máxima área de aço na seção	*	-0,9518	-0,9518
Máxima área de aço na seção	*	-0,9614	-0,9614
Máxima área de aço na seção	*	-0,8264	-0,8264
Máxima área de aço na seção	*	-0,8360	-0,8360
Máxima área de aço na seção	*	-0,9614	-0,9614
Verificação ELU V1		-0,0851	-0,0851
Verificação ELU V2		<b>-0,0103</b>	<b>-0,0103</b>
Verificação ELU V3		-0,0898	-0,0898
Verificação ELU Ap 1		-1,0000	-1,0000
Verificação ELU Ap 2		<b>-0,0008</b>	<b>-0,0008</b>
Verificação ELU Ap 3		<b>-0,0250</b>	<b>-0,0250</b>
Verificação ELU Ap 4		-1,0000	-1,0000
Domínio 4		-0,7215	-0,7215
Domínio 4		-0,5226	-0,5226
Domínio 4		-0,8011	-0,8011
Domínio 4		-0,8409	-0,8409
Domínio 4		-0,2839	-0,2839
Domínio 4		-0,3236	-0,3236
Domínio 4		-0,8409	-0,8409
Ductilidade da seção	*	-0,7778	-0,7778
Ductilidade da seção	*	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>
Ductilidade da seção	*	-0,0556	<b>-0,0556</b>

Variáveis	Sacoman (1987)	MPS001	MPS101
Ductilidade da seção	*	-0,7778	-0,7778
Viabilidade de estribos		-1,0000	-1,0000
Viabilidade de estribos		-1,0000	-1,0000
Viabilidade de estribos		-1,0000	-1,0000

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados obtidos no segundo nível, são apresentados na Tabela 25 e na Tabela 26.

Tabela 25. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura simples –  $\zeta = 1$ ,  $\text{anc}=0$  (MPS001)

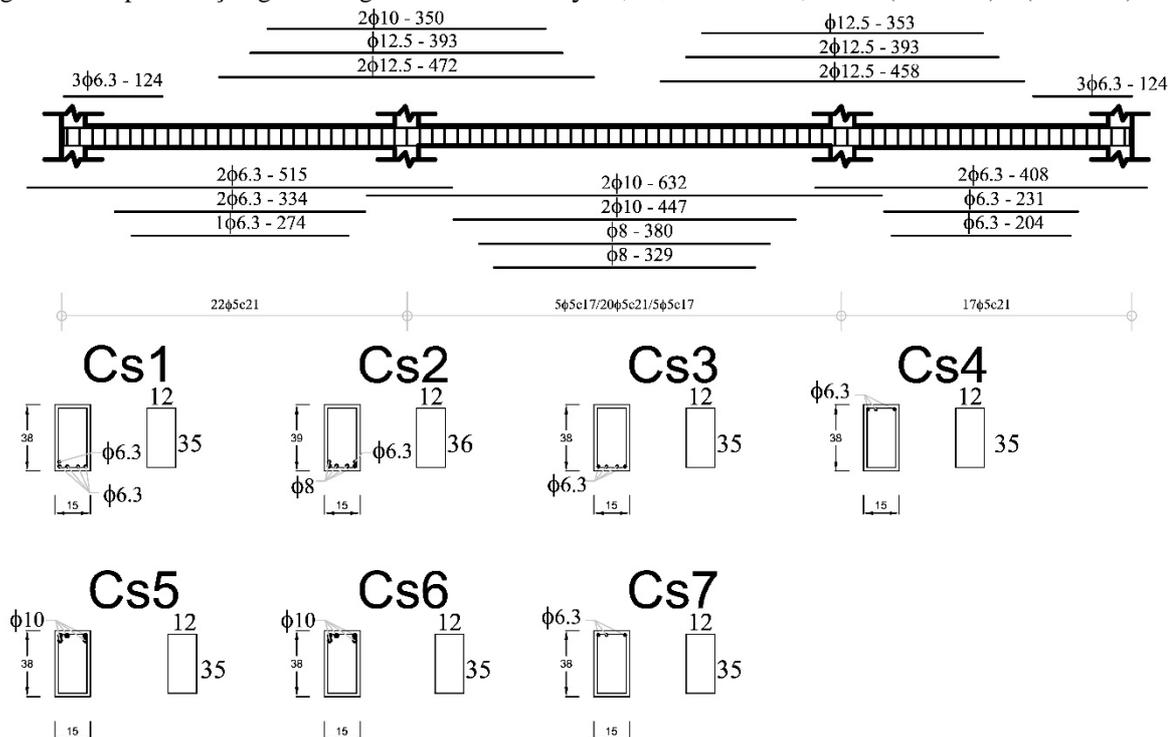
Seção	As,nec (cm <sup>2</sup> )	As,real (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	1,54	1,58	4 $\phi$ 6,3 1 $\phi$ 6,3	2,25%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 515 Corte 2: 2 $\phi$ 6.3 L = 334 Corte 3: 1 $\phi$ 6.3 L = 274
Vão 2	2,71	2,82	4 $\phi$ 8 1 $\phi$ 8+1 $\phi$ 6,3	3,56%	Corte 1: 2 $\phi$ 8 L = 632 Corte 2: 2 $\phi$ 8 L = 447 Corte 3: 1 $\phi$ 8 L = 380 Corte 4: 1 $\phi$ 6.3 L = 329
Vão 3	1,10	1,26	4 $\phi$ 6,3	12,72%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 408 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 231 Corte 3: 1 $\phi$ 6.3 L = 204
Ap 1	0,88	0,95	3 $\phi$ 6,3	6,90%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 124 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 124
Ap 2	3,96	4,00	3 $\phi$ 10 2 $\phi$ 10	1,03%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 472 Corte 2: 1 $\phi$ 10 L = 393 Corte 3: 2 $\phi$ 10 L = 353
Ap 3	3,74	4,00	3 $\phi$ 10 2 $\phi$ 10	6,53%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 458 Corte 2: 1 $\phi$ 10 L = 379 Corte 3: 2 $\phi$ 10 L = 340
Ap 4	0,88	0,95	3 $\phi$ 6,3	6,90%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 124 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 124

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 26. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura simples –  $\zeta = 1$ , anc=1(MPS101).

Seção	As,nec (cm <sup>2</sup> )	As,real (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	1,54	1,58	4 $\phi$ 6,3 1 $\phi$ 6,3	2,25%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 515 Corte 2: 2 $\phi$ 6.3 L = 334 Corte 3: 1 $\phi$ 6.3 L = 274
Vão 2	2,71	2,82	4 $\phi$ 8 1 $\phi$ 8+1 $\phi$ 6,3	3,56%	Corte 1: 2 $\phi$ 8 L = 632 Corte 2: 2 $\phi$ 8 L = 447 Corte 3: 1 $\phi$ 8 L = 380 Corte 4: 1 $\phi$ 6.3 L = 329
Vão 3	1,10	1,26	4 $\phi$ 6,3	12,72%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 408 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 231 Corte 3: 1 $\phi$ 6.3 L = 204
Ap 1	0,88	0,95	3 $\phi$ 6,3	6,90%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 124 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 124
Ap 2	3,96	4,00	3 $\phi$ 10 2 $\phi$ 10	1,03%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 472 Corte 2: 1 $\phi$ 10 L = 393 Corte 3: 2 $\phi$ 10 L = 353
Ap 3	3,74	4,00	3 $\phi$ 10 2 $\phi$ 10	6,53%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 458 Corte 2: 1 $\phi$ 10 L = 379 Corte 3: 2 $\phi$ 10 L = 340
Ap 4	0,88	0,95	3 $\phi$ 6,3	6,90%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 124 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 124

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 50. Representação gráfica viga com três vãos –  $\zeta = 1$ ,  $A'_s = 0$  e anc=0, anc=1 (MPS001) e (MPS101).

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 27 apresenta os custos finais associados a construção do projeto.

Tabela 27. Custos finais da viga – Viga com três vãos, armadura simples.

Variável	Custos (u.m.)	% Variação
Sacoman (1987)	8303,00	0
MPS001	8206,68	-1,16
MPS101	8206,68	-1,16

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.3.1.2. Aplicação do modelo duplamente armado

Os casos referentes a MPS011, MPS111, MPS015, MPS115 são apresentados na Tabela 28.

Tabela 28. Resultados do primeiro nível – viga com três vãos

Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto				
		MPS011	MPS111	MPS015	MPS115	
<b>Vão 1</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	37,8	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0	0,1	0,1	0,1
	Beta x	0,15	0,35	0,25	0,25	0,25
<b>Vão 2</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	38,0	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0,15	0,15	0,15	0,15
	Beta x	0,29	0,60	0,48	0,48	0,48
<b>Vão 3</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	36,2	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0	0	0	0
	Beta x	0,12	0,25	0,20	0,20	0,20
<b>Ap 1</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	37,8	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0	0	0	0
	Beta x	-	0,13	0,10	0,10	0,10
<b>Ap 2</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	37,8	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0,5	0,4	0,4	0,4
	Beta x	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44
<b>Ap 3</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	36,0	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0,45	0,35	0,35	0,35

Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto				
		MPS011	MPS111	MPS015	MPS115	
Beta x	0,43	0,44	0,45	0,45	0,45	
<b>Ap 4</b>	Base (bw) (cm)	15	15	15	15	
	Altura (h) (cm)	36,0	28	30	30	
	Razão As/A's	-	0	0	0	
	Beta x	-	0,13	0,10	0,10	
<b>Custo</b>	Custo Total (R\$)	8.007,00	6.525,19	7.813,47	6.752,04	7.813,47
	% Variação	0,0%	-18,5%	-2,4%	-15,7%	-2,4%

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 29 contém as variáveis de projeto dependentes obtidas.

Tabela 29. Variáveis dependentes – viga com três vãos

Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto				
		MPS011	MPS111	MPS015	MPS115	
<b>Vão 1</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	1,40	2,20	1,89	1,89	1,89
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,00	0,19	0,19	0,19
		9,46	-	-	-	-
	Estribos (Asw) (cm <sup>2</sup> /m)	-	25φ5c15	25φ5c16	25φ5c16	25φ5c16
		-	6φ5c15	4φ5c16	4φ5c16	4φ5c16
		-				
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-	-	-
	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	2,79	4,44	3,79	3,79	3,79
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,67	0,57	0,57	0,57
		11,57	-	-	-	-
<b>Vão 2</b>	Estribos (Asw) (cm <sup>2</sup> /m)	-	16φ5c9	13φ5c10	13φ5c10	13φ5c10
		-	19φ5c15	19φ5c16	19φ5c16	19φ5c16
		-	15φ5c9	13φ5c10	13φ5c10	13φ5c10
	Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-	-	-
	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	1,06	1,57	1,36	1,36	1,36
<b>Vão 3</b>	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,00	0,00	0,00	0,00
		7,37	-	-	-	-
	Estribos (Asw) (cm <sup>2</sup> /m)	-	5φ5c15	4φ5c16	4φ5c16	4φ5c16
		-	19φ5c15	19φ5c16	19φ5c16	19φ5c16
		-				
Armadura de pele (As,skin) (cm)	-	-	-	-	-	
<b>Ap 1</b>	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	-	0,79	0,68	0,68	0,68
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,00	0,00	0,00	0,00

	Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto			
			MPS011	MPS111	MPS015	MPS115
Ap 2	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	4,05 / 4,02	5,34	4,98	4,98	4,98
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	2,67	1,99	1,99	1,99
Ap 3	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	3,55 / 3,85	5,03	4,70	4,70	4,70
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	2,26	1,64	1,64	1,64
Ap 4	Tracionada (As) (cm <sup>2</sup> )	-	0,79	0,68	0,68	0,68
	Comprimida (A's) (cm <sup>2</sup> )	-	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 30 apresenta as restrições do problema. Na qual, observa-se que o algoritmo buscou minimizar as áreas de aço atuantes nos apoios Ap1 e Ap4 (extremos). A resistência é limitante em todos os vãos, isso provavelmente ocorre devido à ausência da restrição de deslocamento.

Tabela 30 Restrições do problema

Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto			
		MPS011	MPS111	MPS015	MPS115
Critério de Navier-Bernoulli V1	*	-0,8133	-0,8000	-0,8000	-0,8000
Critério de Navier-Bernoulli V2	*	-0,8473	-0,8364	-0,8364	-0,8364
Critério de Navier-Bernoulli V3	*	-0,7600	-0,7429	-0,7429	-0,7429
Esmagamento da biela T1		-0,7995	-0,8143	-0,8143	-0,8143
Esmagamento da biela T2		-0,5827	-0,6136	-0,6136	-0,6136
Esmagamento da biela T1		-0,3903	-0,4355	-0,4355	-0,4355
Esmagamento da biela T2		-0,4015	-0,4459	-0,4459	-0,4459
Esmagamento da biela T1		-0,5812	-0,6122	-0,6122	-0,6122
Esmagamento da biela T2		-0,8422	-0,8539	-0,8539	-0,8539
Mínima área de aço V1	*	-0,7136	-0,6419	-0,6419	-0,6419
Mínima área de aço V2	*	-0,8580	-0,8220	-0,8220	-0,8220
Mínima área de aço V3	*	-0,5990	-0,5027	-0,5027	-0,5027
Mínima área de aço Ap1	*	-0,1980	<b>-0,0054</b>	<b>-0,0054</b>	<b>-0,0054</b>
Mínima área de aço Ap2	*	-0,8821	-0,8644	-0,8644	-0,8644
Mínima área de aço Ap3	*	-0,8747	-0,8563	-0,8563	-0,8563
Mínima área de aço Ap4	*	-0,1980	<b>-0,0054</b>	<b>-0,0054</b>	<b>-0,0054</b>
Máxima área de aço V1	*	-0,8691	-0,8848	-0,8848	-0,8848
Máxima área de aço V2	*	-0,6964	-0,7577	-0,7577	-0,7577
Máxima área de aço V3	*	-0,9065	-0,9246	-0,9246	-0,9246
Máxima área de aço Ap1	*	-0,9532	-0,9623	-0,9623	-0,9623
Máxima área de aço Ap2		-0,5231	-0,6129	-0,6129	-0,6129
Máxima área de aço Ap3		-0,5661	-0,6476	-0,6476	-0,6476

Variáveis	Sacoman (1987)	Modelo proposto			
		MPS011	MPS111	MPS015	MPS115
Máxima área de aço Ap4		-0,9532	-0,9623	-0,9623	-0,9623
Verificação ELU V1		<b>-0,0304</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>
Verificação ELU V2		<b>-0,0291</b>	<b>-0,0042</b>	<b>-0,0042</b>	<b>-0,0042</b>
Verificação ELU V3		-0,0584	<b>-0,0129</b>	<b>-0,0129</b>	<b>-0,0129</b>
Verificação ELU Ap1		-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
Verificação ELU Ap2		<b>-0,0099</b>	<b>-0,0073</b>	<b>-0,0073</b>	<b>-0,0073</b>
Verificação ELU Ap3		<b>-0,0069</b>	<b>-0,0073</b>	<b>-0,0073</b>	<b>-0,0073</b>
Verificação ELU Ap4		-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
Domínio 4 V1		-0,4430	-0,6021	-0,6021	-0,6021
Domínio 4 V2		<b>-0,0451</b>	-0,2441	-0,2441	-0,2441
Domínio 4 V3		-0,6021	-0,6817	-0,6817	-0,6817
Domínio 4 Ap1		-0,8011	-0,8409	-0,8409	-0,8409
Domínio 4 Ap2	*	-0,323643	-0,2998	-0,2998	-0,2998
Domínio 4 Ap3	*	-0,299771	-0,2839	-0,2839	-0,2839
Domínio 4 Ap4	*	-0,801071	-0,8409	-0,8409	-0,8409
Ductilidade da seção Ap1	*	-0,722222	-0,7778	-0,7778	-0,7778
Ductilidade da seção Ap2		-0,0556	-0,0222	-0,0222	-0,0222
Ductilidade da seção Ap3		<b>-0,0222</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>
Ductilidade da seção Ap4		-0,7222	-0,7778	-0,7778	-0,7778
Viabilidade de estribos V1		-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
Viabilidade de estribos V2		-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
Viabilidade de estribos V3		-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000

\* Valores não incluídos no modelo.

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados obtidos com o segundo nível são ilustrados na Tabela 31 e Tabela 32.

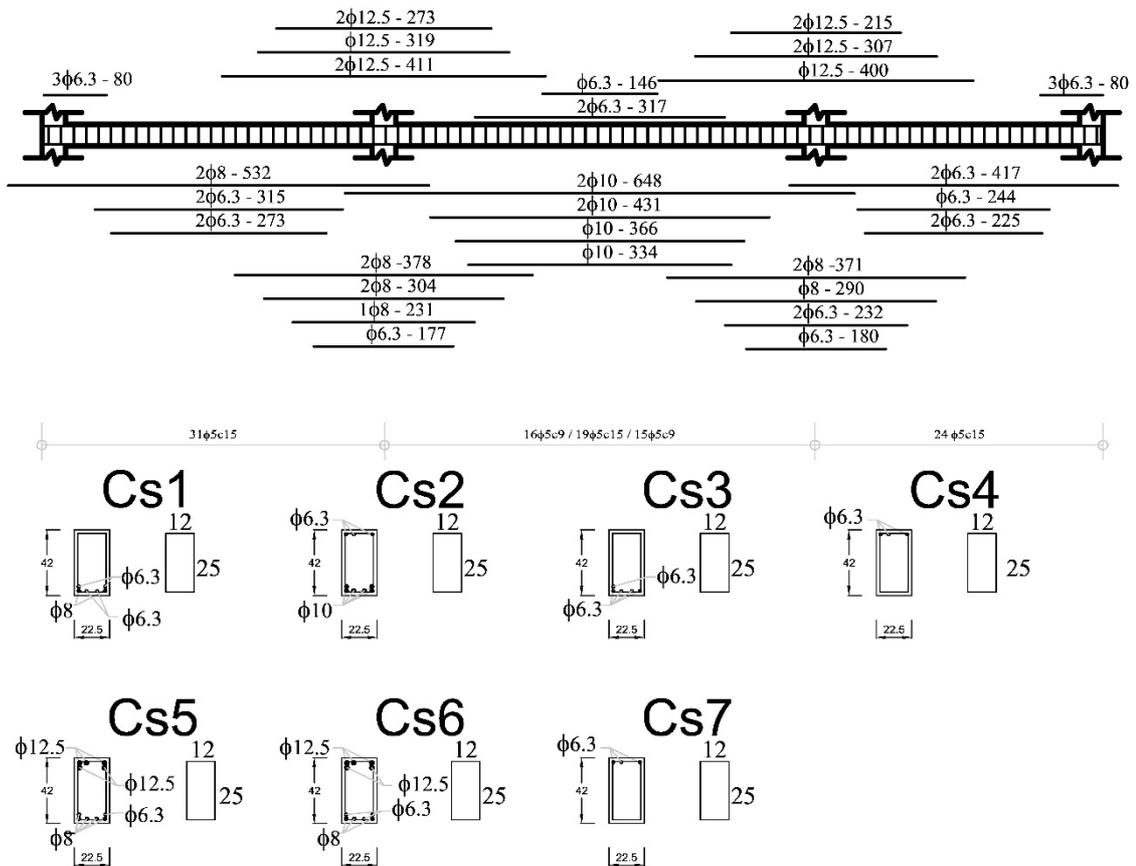
As figuras: Figura 51 e Figura 52 representam graficamente a viga após o segundo nível.

Tabela 31. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura dupla –  $\zeta = 1$ ,  $\text{anc}=0$  (MPS011).

Seção	As,nec (cm <sup>2</sup> )	As,real (cm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design (mm)
Vão 1	2,20	2,26	2 $\phi$ 8+2 $\phi$ 6,3 2 $\phi$ 6,3	2,68%	Corte 1: 2 $\phi$ 8 L = 5325 Corte 2: 2 $\phi$ 6.3 L = 3149 Corte 3: 2 $\phi$ 6.3 L = 2730
Vão 2	4,44	4,80	4 $\phi$ 10 2 $\phi$ 10	7,59%	Corte 1: 2 $\phi$ 10 L = 6479 Corte 2: 2 $\phi$ 10 L = 4314 Corte 3: 1 $\phi$ 10 L = 3662 Corte 4: 1 $\phi$ 10 L = 3337
Vão 3	1,57	1,58	4 $\phi$ 6,3 1 $\phi$ 6,3	0,26%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 4166 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 2438 Corte 3: 2 $\phi$ 6.3 L = 2246

Ap 1	0,79	0,95	3 $\phi$ 6,3	16,88%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 797 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 797
Ap 2	5,34	6,25	3 $\phi$ 12,5 2 $\phi$ 12,5	14,54%	Corte 1: 2 $\phi$ 12.5 L = 4107 Corte 2: 1 $\phi$ 12.5 L = 3186 Corte 3: 2 $\phi$ 12.5 L = 2725
Ap 3	5,03	6,25	3 $\phi$ 12,5 2 $\phi$ 12,5	19,57%	Corte 1: 2 $\phi$ 12.5 L = 3994 Corte 2: 2 $\phi$ 12.5 L = 3073 Corte 3: 1 $\phi$ 12.5 L = 2151
Ap 4	0,79	0,95	3 $\phi$ 6,3	16,88%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 796 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 796
Dupla Vão 1	0,00	0,00	-	-	-
Dupla Vão 2	0,67	0,95	3 $\phi$ 6,3	29,59%	Corte 1: 2 $\phi$ 6.3 L = 317 Corte 2: 1 $\phi$ 6.3 L = 146
Dupla Vão 3	0,00	0,00	-	-	-
Dupla Ap 1	0,00	0,00	-	-	-
Dupla Ap 2	2,67	2,82	4 $\phi$ 8 1 $\phi$ 8+1 $\phi$ 6,3	5,13%	Corte 1: 2 $\phi$ 8 L = 378 Corte 2: 2 $\phi$ 8 L = 304 Corte 3: 1 $\phi$ 8 L = 231 Corte 4: 1 $\phi$ 6.3 L = 177
Dupla Ap 3	2,26	2,45	3 $\phi$ 8+1 $\phi$ 6,3 2 $\phi$ 6,3	7,48%	Corte 1: 2 $\phi$ 8 L = 371 Corte 2: 1 $\phi$ 8 L = 290 Corte 3: 2 $\phi$ 6.3 L = 232 Corte 4: 1 $\phi$ 6.3 L = 180
Dupla Ap 4	0,00	0,00	-	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 51. Representação gráfica viga com três vãos –  $\zeta = 1$ , anc=0(MPS011).

A tabela 32 representa os valores obtidos no 2º nível de otimização.

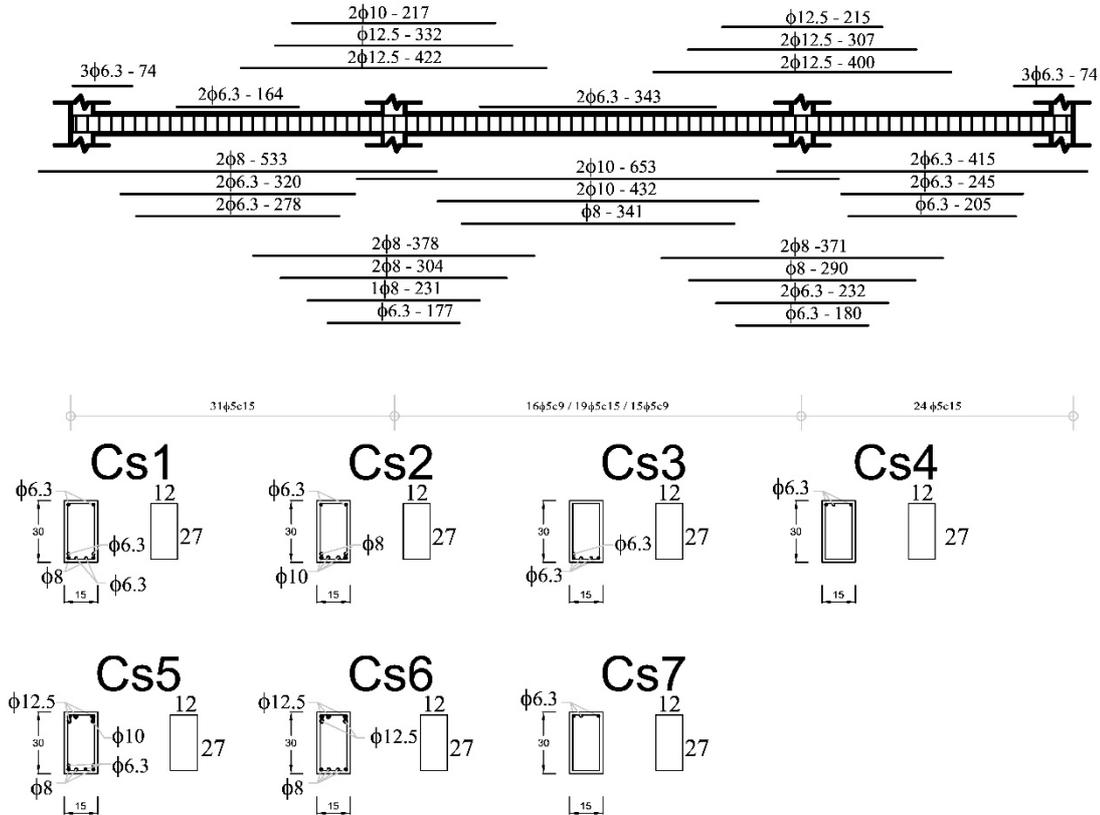
Tabela 32. Segundo nível de otimização – Viga três vãos, armadura dupla –  $\zeta = 1$ , anc=1 /  $\zeta = 5$ , anc=0 e anc=1(MPS111, MPS015, MPS115).

Seção	As,nec (mm <sup>2</sup> )	As,real (mm <sup>2</sup> )	Solução	Excesso%	Design
Vão 1	1,89	1,89	4φ6,3 2φ6,3	0,26%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 517 Corte 2: 2 φ 6.3 L = 337 Corte 3: 1 φ 6.3 L = 288 Corte 4: 1 φ 6.3 L = 264
Vão 2	3,79	3,90	3φ10+1φ8 2φ8	2,76%	Corte 1: 2 φ 10 L = 653 Corte 2: 1 φ 10 L = 430 Corte 3: 2 φ 8 L = 371 Corte 4: 1 φ 8 L = 324
Vão 3	1,36	1,58	4φ6,3 1φ6,3	13,82%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 408 Corte 2: 2 φ 6.3 L = 232 Corte 3: 1 φ 6.3 L = 187
Ap 1	0,68	0,95	3φ6,3	28,18%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 75 Corte 2: 1 φ 6.3 L = 75

<b>Seção</b>	<b>As,nec (mm<sup>2</sup>)</b>	<b>As,real (mm<sup>2</sup>)</b>	<b>Solução</b>	<b>Excesso%</b>	<b>Design</b>
Ap 2	4,98	6,25	3φ12,5 2φ12,5	20,37%	Corte 1: 2 φ 12.5 L = 408 Corte 2: 2 φ 12.5 L = 309 Corte 3: 1 φ 12.5 L = 211
Ap 3	4,70	6,25	3φ12,5 2φ12,5	24,82%	Corte 1: 2 φ 12.5 L = 398 Corte 2: 2 φ 12.5 L = 299 Corte 3: 1 φ 12.5 L = 212
Ap 4	0,68	0,95	3φ6,3	28,18%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 75 Corte 2: 1 φ 6.3 L = 75
Dupla Vão 1	0,19	0,63	2φ6,3	70,08%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 164
Dupla Vão 2	0,57	0,63	2φ6,3	9,70%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 339
Dupla Ap 2	1,99	2,00	4φ8	0,46%	Corte 1: 2 φ 8 L = 387 Corte 2: 1 φ 8 L = 288 Corte 3: 1 φ 8 L = 239
Dupla Ap 3	1,64	1,89	4φ6,3 2φ6,3	12,99%	Corte 1: 2 φ 6.3 L = 356 Corte 2: 1 φ 6.3 L = 285 Corte 3: 2 φ 6.3 L = 250 Corte 4: 1 φ 6.3 L = 179

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 52. Representação gráfica viga com três vãos –  $\zeta = 1$ , anc=1 /  $\zeta = 5$ , anc=0 e anc=1(MPS111, MPS015, MPS115).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 33 apresenta os custos finais para a viga de concreto armado.

Tabela 33. Custos finais da viga – Viga com três vãos, armadura dupla.

Modelo	Custos (u.m.)	%
Sacoman (1987)	8303,00	0,00%
MPS011	7119,30	-14,26%
MPS111	7296,64	-12,12%
MPS015	7296,64	-12,12%
MPS115	7296,64	-12,12%

Fonte: Elaborado pelo autor

## 7. CONCLUSÕES

Uma otimização utilizando uma estratégia em dois níveis foi apresentada para vigas de concreto armado. No primeiro nível, o objetivo é minimizar os custos da viga de CA variando as dimensões da seção, a posição da linha neutra e a relação entre as áreas de aço comprimida e tracionada nas seções críticas. Neste nível, os valores ótimos obtidos para as dimensões da seção e a armadura de cisalhamento são os finais. No segundo nível, busca-se o volume mínimo de aço que satisfaz as áreas de aço necessárias (contínuas) obtidas no primeiro nível. No primeiro nível, restrições relativas a resistência, deslocamento, limites mínimos e máximos são apresentados seguindo as indicações da norma NBR 6118/2007. No segundo nível, restrições relativas ao arranjo das barras de aço e às armaduras necessárias na viga são consideradas.

Os resultados obtidos mostraram uma boa performance do modelo proposto. Mesmo o modelo considerando as dimensões e detalhes das armaduras em níveis diferentes, o acoplamento por meio de uma estimativa bem aproximada do volume de aço garante a qualidade da resposta final.

O modelo poderá ser melhorado considerando-se os ganchos nas extremidades das barras e a utilização da armadura tracionada do vão como um complemento a armadura comprimida do apoio.

A consideração da estimativa de ancoragem para o primeiro nível não teve um efeito tão significativo, possibilitando assim a utilização dos dois modelos ( $anc=0$  e  $anc=1$ ).

No primeiro nível de otimização as restrições ativas foram o deslocamento, resistência e ductilidade da seção, tal fato demonstra que para o método de projeto tradicional baseados em resistência o projeto inicial tem que ser alterado para atender as exigências do estado limite de serviço.

O algoritmo genético se mostrou muito eficiente em ambos níveis, conseguindo atingir respostas satisfatórias com uma taxa de sucesso bem alta. Infere-se que este modelo se tornará mais atraente para utilização em estruturas mais complexas, pois possui um número menor de variáveis de projeto agilizando a convergência. Em um modelo que leva em consideração a topologia das barras, a convergência pode ser um pouco mais demorada em virtude de um maior espaço de projeto.

### **7.1. Sugestões para trabalhos futuros**

Este trabalho abordou a otimização de vigas de concreto armado, tratando seu comportamento frente a cargas distribuídas, em trabalhos futuros alguns aspectos podem ser tratados de formas diferentes.

- a) Múltiplos casos de carga e suas envoltórias poderiam ser considerados;
- b) O detalhamento das barras de aço para armadura comprimida poderia aproveitar o comprimento excedente das armaduras tracionadas provenientes do vão. A dobra das barras poderia ser considerada;
- c) O caso de pilares poderia ser incluindo criando um modelo para otimização de pórticos espaciais de concreto armado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6118:2007 Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Calculo e detalhamento.** (2007)
- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6118:2014 Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Calculo e detalhamento.** (2014)
- ADAMU, A.; KARIHALOO, B. Minimum Cost Design of RC Beams Using DCOC Part I: beams with freely-varying cross-sections. **Structural Optimization.** v.7. 1994.
- ADELI, H.; SARMA, K. **Cost Optimization of Structures - Fuzzy Logic, Genetic Algorithms, and Parallel Computing.** West Sussex: John Wiley & Sons, Ltda. 2006.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado.** 2010. Volume 1. Rio Grande: Editora Dunas.
- BALAGURU, P. N. Cost Optimum Design of Doubly Reinforced Concrete Beams. 1980. **Building and Environment.** v.15. 1980.
- BALLING, R. J.; YAO, X. Optimization of reinforced concrete frames. **Journal of structural Engineering.** v.123. 1997.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering,** v. 59, p. 703–736, 2004.
- BCA - British Cement Association. **Concrete through the ages.** 1-37. 1999.
- BENNATON, J. F. (s.d.). **Laboratório de Processamento de Sinais.** Acesso em 04 de Fevereiro de 2013, disponível em Site do laboratorio de processamento de sinais da USP: [http://www.lps.usp.br/neo/jocelyn/que\\_e\\_otimizar.html](http://www.lps.usp.br/neo/jocelyn/que_e_otimizar.html)
- BRITO, D.C.G. **Otimização de vigas biapoizadas de concreto armado.** Monografia. Universidade Federal do Ceará. UFC. 2013.
- CARVALHO, J. D. Sobre as origens e desenvolvimento do concreto. **Revista Tecnológica,** v.17. 2008
- CHAER, A. V. (s.d.). Notas de aula online. Fonte: Site da UCG: [http://professor.ucg.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/c31\\_cisalhamento.pdf](http://professor.ucg.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/3922/material/c31_cisalhamento.pdf)
- CHAKRABARTY, K. Models for optimal design of reinforced concrete beams. **Computers & Structures.** v.42. 1992.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEREIDO FILHO, J. R. **Calculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118: 2003** (3ª ed.). São Carlos: EdUFSCar. 2009.

CLÍMACO, J. C. **Estruturas de concreto armado: fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação** (1 edição ed.). Brasília: Editora Universidade de Brasília: FINATEC. 2005

COELLO, C. C.; HERNANDEZ, F. S.; FARRERA, F. A. Optimal design of reinforced concrete beams using genetic algorithms. **Expert systems with Applications**, v.12. 1997.

DE JONG, K. A. **Evolutionary Computation: A Unified Approach**. Cambridge, MIT. 2006  
CHONG, E.K.P.; ZAK S. H. **An introduction to optimization**. John Willey & Sons, inc. New York NY. USA. 2001.

FEDGHOUCHE, F.; TILIOUINE, B. Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimate loads using Eurocode 2. **Engineering Structures**. v.42. 2012.

FRIEL, L. L. Optimum Singly Reinforced Concrete Sections. **ACI Journal**, v.71. 1974.

FUSCO, P.B. **Técnica de armar as estruturas de concreto**. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p

GHALI, A.; FAVRE R.; ELBANDRY M., 2002. **Concrete structures stresses and deformations**. Spon Press. Taylor & Francis. NY. EUA.

GOVINDARAJ, V.; RAMASAMY, J. V. Optimum detailed design of reinforced concrete continuous beams using genetic algorithm. **Computers and Structures**. v.84. 2005

GROSKO, A. P.; GORSKI, J. R.; DIAS, J. S. Algoritmo Genético: Revisão Histórica e Exemplificação. **CBIS 2006 - X Congresso Brasileiro de Informática em Saúde**. 2006.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975.

IBRACON – Instituto Brasileiro do Concreto 2009. Concreto: As origens e a evolução do material construtivo mais usado pelo homem. **Concreto & construções**. ano: XXXVII. nº 53. pags.14-19. 2009

JONES, T. **Evolutionary algorithms and heuristic search**. Unpublished doctoral dissertation, University of New Mexico, Albuquerque, NM. 1995

KANAGASUDARAM, S.; KARIHALOO, B. L. Minimum cost design of reinforced concrete structures. **Structural Optimization**. pg 173-184. v.2. 1990.

KOUMOSIS, V. K., Arsenis, S. J., & Vasiloglou, V. B. (1995). Detailed design of reinforced concrete buildings using logic programming. **Advances in Engineering Software**. p. 161 – 176. v.25. 1995

LEITE, M. **Projeto das armaduras de vigas em concreto armado**. Centro Editorial e Didático, UFBA, Salvador, Brasil. 1989

LIMA, M. L. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. Escola politécnica de São Paulo. Dissertação de mestrado. São Paulo. 2011

MELO, A. M. **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado**. Tese de doutorado. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: COPPE. 2000.

NINA, T. C.; EL DEBS, A. L. **Otimização de seções transversais de concreto armado: Aplicação a pórticos planos**. Dissertação de mestrado. São Carlos, São Paulo, Brasil: EDUFSCar. 2006.

OLIVEIRA, L.F. Multilevel strategy for optimization of reinforced concrete beams using genetic algorithms. **XXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural**. Montevideo. Uruguay. 2014.

PROMON ENGENHARIA. **Tabelas para dimensionamento de concreto armado: segundo a NB-1/76**. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 269p. 1976.

RAO, S. S. Minimum Cost Design of Concrete Beams with a Reliability-Based Constraint. **Building Science**. v.8. pg 33-38. 1973.

RIBEIRO, A. B. **Análise crítica sobre o dimensionamento ao cisalhamento em vigas de concreto armado segundo a NBR 6118 (2003)**. Dissertação de mestrado. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil: UFMG. 2005.

ROCHA, I.B.C.M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Ceará UFC. 2013.

ROCHA,a, I.B.C.M.; E. Parente Jr.; A.M.C. Melo, 2013. A hybrid shared/distributed memory parallel genetic algorithm for optimization of laminate composites. **Composite Structures**. v. 107. pg 288-297. 2013.

SACOMAN, M.A.R.; CHUERI, L.H.M.; BOTTURA, H.M.; FERRO N.C.P. otimização de vigas de concreto armado através de programação não linear. **VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre métodos computacionais para engenharia – CILAMCE**. 1987.

SARMA, K.; ADELI, H. Cost optimization of concrete structures. **Journal of Structural Engineering**. v.124. pg. 570 - 578. 1998.

SILVA, E. E. **Otimização de estruturas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. Dissertação de mestrado. São Paulo, São Paulo: Escola politécnica de São Paulo. 2001.

SNYMAN, J. **Practical mathematical optimization: an introduction to basic optimization theory and classical and new gradient-based algorithms**. Springer Science. New York. NY. USA. 2005

SOARES, R. C.; EL DEBS, A. L. **Otimização de seções transversais de concreto armado sujeito a flexão - Aplicação a pavimentos**. Dissertação de mestrado. São Carlos, São Paulo, Brasil: UFsCAR. 1997.

THOMPSON, M.P., HAMANN, J.D., SESSIONS J. Selection and Penalty Strategies for Genetic Algorithms Designed to Solve Spatial Forest Planning Problems. **International Journal of Forestry Research**. v.2009. Hindawi Publishing Corporation. Oregon. 2009.

VIANNA, L. C.; EL DEBS, A. L. **Otimização de seções transversais de concreto armado: Aplicação a pórticos**. Dissertação de mestrado. São Carlos, São Paulo, Brasil: UFSCar. 2003

YANG, X. S. **Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications**. Willey. John Willey & sons. Hoboken, New Jersey. 2010.