



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:  
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**SAVANNA CRISTINA MEDEIROS D'AGUIAR**

**ESTABILIDADE DE COLUNAS DE MATERIAL COMPÓSITO REFORÇADO POR  
FIBRAS**

**FORTALEZA**

**2017**

SAVANNA CRISTINA MEDEIROS D'AGUIAR

ESTABILIDADE DE COLUNAS DE MATERIAL COMPÓSITO REFORÇADO POR  
FIBRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. D. Sc. Evandro Parente Junior.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

D1e D'Aguiar, Savanna Cristina Medeiros.  
Estabilidade de Colunas de Material Compósito Reforçado por Fibras / Savanna Cristina Medeiros  
D'Aguiar. – 2017.  
121 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2017.  
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

1. Colunas. 2. Materiais Compósitos. 3. Estabilidade. 4. Método dos Elementos Finitos. I. Título.  
CDD 624.1

---

SAVANNA CRISTINA MEDEIROS D'AGUIAR

ESTABILIDADE DE COLUNAS DE MATERIAL COMPÓSITO REFORÇADO POR  
FIBRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.  
Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 28/08/2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. D. Sc. Evandro Parente Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. Antônio Macário Cartaxo de Melo (Membro Interno)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. Daniel Carlos Taissum Cardoso (Membro Externo)  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

À Deus.

Aos meus pais, Ana Santana e Sérgio Henrique.

## AGRADECIMENTOS

À Deus, primeiramente, por estar ao meu lado em todos os momentos tornando tudo possível com o seu amor, graça, misericórdia, força e proteção incondicional.

Aos meus pais, Ana Santana e Sergio Henrique pelo amor, dedicação e apoio. Agradeço por estarem sempre ao meu lado e por me ensinarem a buscar o melhor e não desistir dos meus sonhos.

À minha avó e segunda mãe, Domerina Dantas, por estar comigo em todas as conquistas e me apoiar em todos os novos desafios, me acompanhando e cuidando tão bem de mim.

À minha família por todo apoio e dedicação ao longo da minha caminhada.

À Djanino Fernandes, pelo amor, companheirismo e apoio durante todos os anos que estive ao meu lado. Obrigada por me inspirar a sempre persistir independente do desafio.

Ao professor Evandro Parente Júnior, pela orientação, dedicação, incentivo e confiança. Sou muito grata pelos conhecimentos transmitidos e por me guiar com muita competência e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Antônio Macário Cartaxo de Melo, Tereza Denyse de Araújo e João Batista Marques Souza Júnior do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da UFC. Agradeço por toda contribuição intelectual ao longo desta trajetória.

Aos professores Daniel Carlos Taissum Cardoso e Antônio Macário Cartaxo de Melo, por fazerem parte da banca examinadora.

Ao professor e amigo, Marcílio Nunes Freire, agradeço pela amizade, incentivo e apoio ao longo da minha caminhada acadêmica.

Aos colegas de mestrado pelo companheirismo ao longo desta caminhada.

Aos meus amigos, Michelle Araújo, Jorge França, Ada Catarina, Ruan Landolfo, Sumaya Luna, Cristiane Fernandes, Francisco Filho e Taylane Maschio. Agradeço pelo companheirismo, apoio incondicional e, principalmente, pela amizade e carinho que vocês sempre tiveram comigo.

À Pedro Sanderson por contribuir ao longo do desenvolvimento do trabalho e aos colegas e funcionários do laboratório pela amizade e atenção dispensada.

À FUNCAP pelo suporte financeiro e a Universidade Federal do Ceará, em especial, o DEECC e o LMCV pela infraestrutura disponível.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta neste trabalho.

## RESUMO

O uso de materiais compósitos na indústria da construção civil tem se destacado nos últimos anos em virtude de sua alta rigidez e resistência, baixa densidade, flexibilidade de fabricação, dentre outras vantagens sobre os materiais tradicionais. Por outro lado, o comportamento mecânico destas estruturas é mais complexo que o de estruturas metálicas, sobretudo devido à ortotropia. Esta complexidade aumenta quando se consideram colunas laminadas - compostas de várias lâminas - com diferentes materiais e orientações das fibras. Assim, o presente trabalho visa realizar um estudo teórico e computacional do comportamento, desempenho e resistência de colunas laminadas e pultrudadas de material compósito reforçado por fibras. Para isto, foram propostos modelos de análise, a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando os efeitos das não linearidades física e geométrica. O colapso das colunas foi avaliado segundo a abordagem da Falha da Primeira Lâmina (FPF), utilizando diferentes critérios de falha, e o comportamento não linear físico foi simulado a partir de um modelo de dano contínuo. Adicionalmente, verificou-se a aplicabilidade de expressões disponíveis na literatura para determinação da capacidade de carga destas estruturas, incluindo a interação entre as flambagens local e global. A validação dos modelos de análise foi feita com base em resultados numéricos e experimentais de outras pesquisas, obtendo-se uma boa concordância. Com base nas análises realizadas constatou-se a influência do esquema de laminação e da espessura no comportamento de colunas laminadas e confirmou-se a eficiência da abordagem baseada na FPF e a viabilidade de algumas expressões propostas na literatura para predição da capacidade de carga de colunas de material compósito reforçados por fibras. De modo geral, os resultados obtidos evidenciaram a utilização de análises computacionais como forma de contribuir nos estudos de estabilidade e resistência de colunas de material compósito.

**Palavras-chave:** Colunas. Materiais Compósitos. Estabilidade. Método dos Elementos Finitos.

## ABSTRACT

The use of composite materials in the construction industry has excelled in recent years, as a result of their high rigidity and resistance, low density, flexible manufacturing, among other advantages over traditional materials. On the other hand, the mechanical behavior of these structures is more complex than the metal structures, mainly because of the orthotropy. This complexity increases when it has been considered laminated columns - composed of several laminae, with different materials and fiber orientation. Therefore, the present work aims to perform a theoretical and computational study of the behavior, performance and resistance of laminated and pultruded columns of fiber reinforced composite material. For this, analysis models were proposed, using the Finite Element Method (FEM), considering the effects of physical and geometric nonlinearities. Column collapse was evaluated using the First Ply Failure (FPF) approach, using different failure criteria, and the nonlinear physical behavior was simulated from a continuous damage model. Additionally, it was checked the applicability of expressions available in the literature to determine the loading capacity of these structures, including the interaction between local and global buckling. A validation of the models of analysis was made on the basis of numerical and experimental results of other researches, obtaining a good agreement. Based on the analysis, the influence of the lamination scheme and thickness on the behavior of laminated columns was confirmed, and the efficiency based of the FPF approach was confirmed, as well as the feasibility of some expressions proposed in the literature to predict the load capacity of columns of fiber reinforced composite material. In general, the results that were obtained evidenced the use of computational analysis as a way to contribute to the studies of stability and resistance of columns of composite material.

**Keywords:** Columns. Composite materials. Stability. Finite Element Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação dos sistemas de materiais compósitos.....	18
Figura 2 – Tipos de Compósitos .....	18
Figura 3 – Esquema do processo de enrolamento de filamentos.....	20
Figura 4 – Esquema da Moldagem por transferência de resina.....	20
Figura 5 – Moldagem em autoclave .....	21
Figura 6 – Esquema do processo de pultrusão.....	22
Figura 7 – Esquema de laminação comumente adotado.....	23
Figura 8 – Rotação entre os eixos principais da lâmina e os eixos x-y .....	26
Figura 9 – Geometrias não deformadas e deformadas de uma borda de uma placa sob as hipóteses de Kirchhoff.....	28
Figura 10 – Sistema de coordenadas e numeração de camadas usados para uma placa laminada.....	30
Figura 11 – Geometrias não deformadas e deformadas de um trecho de uma placa sob as hipóteses de Reissner-Mindlin .....	33
Figura 12 – Parâmetros de resistência em uma lâmina.....	36
Figura 13 – Tipos de degradação pós-falha em compósitos laminados .....	40
Figura 14 – Tensão Equivalente versus Deslocamento Equivalente .....	43
Figura 15 – Seções transversais de perfis tipicamente utilizados.....	45
Figura 16 – Sistema de coordenadas local, numeração de nó e segmento para (a) seção fechada e (b) seção aberta.....	51
Figura 17 – Esforços resultantes por unidade de comprimento em um laminado.....	52
Figura 18 – Seção transversal do segmento i.....	54
Figura 19 – Fator de comprimento efetivo (K) para diferentes condições de contorno .....	61
Figura 20 – Modo de instabilidade local de perfil de seção I: (a) vista longitudinal (b) vista transversal.....	62
Figura 21 – Curvas adimensionais com dados experimentais de compressão em colunas ....	69
Figura 22 – Comparativo realizado por Puente, Insausti e Azkune (2006).....	70
Figura 23 – Equação de interação proposta por Barbero e Tomblin (1994) adotando diferentes parâmetros de ajuste de curva .....	71
Figura 24 – Geometria das colunas e esquemas de laminação adotados (mm).....	73
Figura 25 – Condições de contorno utilizadas no modelo proposto.....	73
Figura 26 – Modos de flambagem obtidos a partir do modelo proposto.....	75

Figura 27 – Modos de flambagem obtidos experimentalmente.....	75
Figura 28 – Comparação dos caminhos de equilíbrio pós-críticos para as colunas analisadas.....	77
Figura 29 – Efeito das imperfeições iniciais no comportamento da coluna L3.....	78
Figura 30 – Curvas $P_{cr,local}$ versus $n$ para as colunas L1e L2 .....	79
Figura 31 – Modos de flambagem da coluna L1 com $n$ lâminas.....	80
Figura 32 – Modos de flambagem da coluna L2 com $n$ lâminas.....	80
Figura 33 – Curvas carga-deslocamento lateral para colunas L1 .....	81
Figura 34 – Curvas carga-deslocamento lateral para colunas L2 .....	81
Figura 35 – Modo de falha do material das colunas L1 para diferentes critérios de falha .....	83
Figura 36 – Modo de falha do material das colunas L2 para diferentes critérios de falha .....	83
Figura 37 – $P_{cr,local}$ versus $\eta$ utilizando a equação de Cardoso (2014) para a coluna L1 [0/-45/45/90] <sub>s</sub> .....	87
Figura 38 – $P_{cr,local}$ versus $\eta$ utilizando as equações de Kollár (2003) para a coluna L1 [0/-45/45/90] <sub>s</sub> .....	87
Figura 39 – Comparativo $P_{cr,local}$ versus $\eta$ para a coluna L2 [0/90/0/90] <sub>s</sub> .....	88
Figura 40 – Geometria da coluna pultrudada analisada.....	89
Figura 41 – Modelo de casca proposto (S8R) .....	90
Figura 42 – Vinculação entre duas partes do modelo utilizando a restrição tie .....	91
Figura 43 – Primeiro modo de flambagem da coluna analisada.....	92
Figura 44 – Curvas carga-deslocamento lateral com diferentes coeficientes de viscosidade	93
Figura 45 – Curvas de carga-deslocamento lateral.....	94
Figura 46 – Curvas de carga-encurtamento axial .....	95
Figura 47 – Identificação do ponto de início do processo de falha progressiva.....	96
Figura 48 – Condições de contorno para colunas biapoizadas.....	97
Figura 49 – Primeiro modo de flambagem ( $L = 70$ cm).....	98
Figura 50 – Comparativo $P_{cr,local}$ versus $\eta$ para a coluna pultrudada de seção I .....	99
Figura 51 – Carga crítica normalizada versus esbeltez da coluna .....	101
Figura 52 – Primeiro modo de flambagem das colunas analisadas .....	102
Figura 53 – Curvas não lineares obtidas para as colunas analisadas .....	104
Figura 54 – Efeito da amplitude da imperfeição .....	107

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Carga de flambagem para placas longas ortotrópicas e simétricas .....	64
Tabela 2 – Funções $f(y)$ adotadas por Cardoso (2014).....	66
Tabela 3 – Coeficientes de flambagem referente a cada seção (CARDOSO, 2014). .....	67
Tabela 4 – Coeficientes críticos de flambagem referente a cada seção (CARDOSO, 2014).....	67
Tabela 5 – Propriedades elásticas e mecânicas da lâmina .....	72
Tabela 6 – Cargas Críticas para diferentes laminações.....	74
Tabela 7 – Cargas Críticas para as colunas L1 e L2 com diferentes espessuras.....	79
Tabela 8 – Comparação do $P_{FPF}$ em relação a $P_{cr}$ para diferentes critérios de falha .....	82
Tabela 9 – Propriedades equivalentes determinadas utilizando duas abordagens distintas..	84
Tabela 10 – Carga crítica determinada utilizando a Abordagem de Rigidez. ....	85
Tabela 11 – Carga crítica determinada utilizando a Abordagem de Flexibilidade .....	85
Tabela 12 – Propriedades elásticas do GFRP .....	90
Tabela 13 – Propriedades mecânicas do GFRP .....	90
Tabela 14 – Comparativo entre as cargas críticas de flambagem da coluna analisada.....	92
Tabela 15 – Energias de fratura associadas ao material utilizado.....	93
Tabela 16 – Comparativo dos principais resultados referente as análises não lineares .....	95
Tabela 17 – Carga crítica de flambagem para colunas com $L < 90$ cm .....	98
Tabela 18 – Comparativo para carga crítica de flambagem local .....	98
Tabela 19 – Cargas críticas de flambagem obtidas a partir do modelo proposto.....	102
Tabela 20 – Carga referente à falha da primeira lâmina e carga de ruptura.....	103

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos.....</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do texto.....</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAIS COMPÓSITOS .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Processos de fabricação.....</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Compósitos Laminados.....</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Relações Constitutivas .....</b>	<b>23</b>
<b>2.4</b>	<b>Teoria Clássica da Laminação .....</b>	<b>27</b>
<b>2.5</b>	<b>Teoria de Laminação de Primeira Ordem .....</b>	<b>32</b>
<b>2.6</b>	<b>Critérios de Falha.....</b>	<b>34</b>
<b>2.6.1</b>	<i>Critério de Máxima Tensão.....</i>	<i>36</i>
<b>2.6.2</b>	<i>Critério de Tsai-Wu .....</i>	<i>37</i>
<b>2.6.3</b>	<i>Hashin.....</i>	<i>38</i>
<b>2.7</b>	<b>Degradação do Material e Falha Progressiva.....</b>	<b>39</b>
<b>3</b>	<b>COLUNAS DE MATERIAL COMPÓSITO.....</b>	<b>44</b>
<b>3.1</b>	<b>Propriedades Elásticas Equivalentes .....</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Teoria de Vigas Laminadas de Massa e Barbero.....</b>	<b>50</b>
<b>3.2.1</b>	<i>Seção transversal.....</i>	<i>50</i>
<b>3.2.2</b>	<i>Rigidez reduzida.....</i>	<i>51</i>
<b>3.2.3</b>	<i>Eixo neutro de flexão do segmento.....</i>	<i>54</i>
<b>3.2.4</b>	<i>Eixo neutro de torção do segmento.....</i>	<i>55</i>
<b>3.2.5</b>	<i>Rigidez axial.....</i>	<i>56</i>
<b>3.2.6</b>	<i>Centroide mecânico .....</i>	<i>57</i>
<b>3.2.7</b>	<i>Rigidez à flexão.....</i>	<i>58</i>
<b>3.3</b>	<b>Flambagem Global .....</b>	<b>59</b>
<b>3.3.1</b>	<i>Instabilidade global por flexão .....</i>	<i>60</i>
<b>3.4</b>	<b>Flambagem Local .....</b>	<b>61</b>
<b>3.5</b>	<b>Interação entre a Flambagem Global e Local.....</b>	<b>68</b>
<b>4</b>	<b>ESTUDOS DE CASOS .....</b>	<b>72</b>
<b>4.1</b>	<b>Flambagem e comportamento pós-crítico de colunas laminadas de seção C .....</b>	<b>72</b>
<b>4.1.1</b>	<i>Validação do modelo .....</i>	<i>74</i>
<b>4.1.2</b>	<i>Influência da espessura.....</i>	<i>78</i>

<b>4.1.3</b>	<b><i>Aplicação de expressões disponíveis na literatura para determinação de <math>P_{cr,local}</math>...</i></b>	<b>84</b>
<b>4.2</b>	<b><i>Flambagem e comportamento pós-crítico de colunas pultrudadas de seção I</i></b>	<b>89</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>Validação do modelo</i></b>	<b>91</b>
<b>4.2.2</b>	<b><i>Aplicação do modelo</i></b>	<b>96</b>
<b>4.2.2.1</b>	<b><i>Análise de flambagem local</i></b>	<b>97</b>
<b>4.2.2.2</b>	<b><i>Interação entre o modo local e global, pós-flambagem e falha do material</i></b>	<b>100</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>108</b>
<b>5.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b>	<b>109</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>111</b>

## 1 INTRODUÇÃO

São inúmeros os estudos que dão ênfase à utilização de novos materiais e processos em diversas áreas da engenharia, pois com a evolução tecnológica as propriedades exigidas, muitas vezes, são superiores às aquelas obtidas com materiais convencionais.

Neste contexto, os materiais compósitos se destacam sobre os materiais tradicionais por possuírem vantagens, tais como elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso e flexibilidade de fabricação. Além disso, outras vantagens que motivam algumas aplicações incluem a transparência eletromagnética, resistência ao desgaste, melhoria na resistência à fadiga, isolamento térmico/acústico e baixa expansão térmica (BARBERO, 2011). Assim, a utilização destes materiais nas engenharias aeroespacial, automotiva, naval, mecânica e civil, tem crescido significativamente nas últimas décadas.

Os materiais compósitos podem ser classificados em categorias que dependem do tipo, da geometria e da orientação do reforço (DANIEL & ISHAI, 2006). O presente trabalho tem como foco o estudo de colunas laminadas e pultrudadas de material compósito formadas a partir da combinação de fibras incorporadas em uma matriz polimérica.

De acordo com Barbero e DeVivo (1999), colunas e vigas de compósitos de polímeros reforçados com fibras podem ser usadas em uma variedade de estruturas, tais como edifícios, galpões de armazenamento de sal, superestruturas de pontes, dentre outros. Em contrapartida, existem diversos problemas relacionados a sua utilização que ainda precisam ser elucidados, o que justifica a realização de pesquisas acerca do comportamento destas estruturas. Segundo Akbulut, Gundogdu e Sengül (2010), dentre os problemas relacionados à utilização de colunas de material compósito, a previsão de cargas de flambagem é uma questão que requer atenção.

Barbero e Tomblin (1994) propuseram equações de projetos para colunas de material compósito reforçado com fibras considerando a interação entre a flambagem local e global, observada durante testes experimentais. Puente, Insausti e Azkune (2006) realizaram um estudo experimental sobre as características de flambagem de colunas pultrudadas e desenvolveram um método de projeto que atendeu bem todos os casos analisados.

Kollár (2003) apresentou em seu trabalho expressões explícitas para a análise de flambagem local de colunas e vigas de materiais compósitos de polímeros reforçados com fibras, compreendendo seções transversais abertas e fechadas. Cardoso (2014) propôs equações de forma fechada para determinar a tensão crítica de flambagem local para seções pultrudadas típicas de polímeros reforçados com fibra de vidro sujeitas à compressão concêntrica.

No que tange à análise de flambagem de colunas de material compósito reforçadas com fibra, numerosos estudos podem ser encontrados na literatura (BARBERO & DEVIVO, 1999; BARBERO, 2000; PECCE & COSENZA, 2000; KOLLÁR, 2001, 2002a, 2002b, 2014; MOTTRAM, BROWN & ANDERSON, 2003; MOTTRAM, 2004; QIAO & SHAN, 2005; CARDOSO, HARRIES & BATISTA, 2014, 2015).

A concepção e construção de uma estrutura usando materiais compósitos normalmente envolvem testes numerosos e dispendiosos. Dessa forma, uma das principais preocupações da indústria está em substituir alguns destes testes por simulações numéricas (VIOLEAU, LADEVÈZE & LUBINEAU, 2009).

Nos últimos anos, vários trabalhos acerca de materiais compósitos têm realizado comparações entre resultados experimentais e os obtidos com base em aproximações numéricas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF), com a utilização de *softwares* que são capazes de simular o comportamento destas estruturas (TURVEY & ZHANG, 2006; DEBSKI, KUBIAK & TETER, 2013a, 2013b; NUNES, SILVESTRE & CORREIA, 2016a, 2016b; KUBIAK & MANIA, 2016).

Outra vertente de estudo refere-se à aplicação de critérios de falha para determinação da carga de ruptura do material. Sabe-se ainda, que análises mais aprimoradas considerando a não linearidade física a partir da falha progressiva do material têm sido abordadas em diversos trabalhos (SLEIGHT, 1999; KNIGHT, 2006; LAPCZYK & HURTADO, 2007, DONADON *et al.*, 2008; NUNES, SILVESTRE & CORREIA, 2016a, 2016b)

Apesar das pesquisas já realizadas sobre o comportamento mecânico, estabilidade e avaliação do processo de falha de colunas de materiais compósitos reforçados por fibra, ainda existem muitos aspectos relacionados ao comportamento destes materiais que precisam ser estudados e discutidos para viabilizar a difusão destes materiais na construção civil.

Dessa forma, neste trabalho, propõe-se estudar o comportamento estrutural de colunas laminadas e pultrudadas de material compósito reforçado por fibras utilizando o MEF, buscando-se contribuir na compreensão dos fenômenos envolvidos na falha destas estruturas. Para isto, o estudo será dividido em duas etapas: análises em colunas laminadas de perfil C e análises em colunas pultrudadas de perfil I.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é investigar o comportamento, desempenho e resistência de colunas de material compósito reforçado por fibras, enfatizando os fenômenos de instabilidade, por meio de análises numéricas utilizando o *software* comercial ABAQUS (SIMULIA, 2012).

Dessa forma, como objetivos decorrentes do principal têm-se:

- a) Propor modelos computacionais capazes de representar o comportamento de colunas laminadas e pultrudadas de perfil C e I, respectivamente, e realizar a validação destes modelos com base em resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura;
- b) Determinar as cargas críticas de flambagem e avaliar os modos de falha e o comportamento pós-flambagem, investigando a influência da geometria e do comprimento dos elementos na estabilidade de colunas laminadas e pultrudadas;
- c) Analisar o colapso das colunas de acordo com a abordagem baseada na Falha da Primeira Lâmina (FPF) utilizando diferentes critérios de falha;
- d) Estudar a influência da espessura e do esquema de laminação no comportamento e resistência das colunas laminadas de perfil C;
- e) Utilizar o modelo de falha progressiva para determinar o comportamento pós-crítico e a capacidade de carga de colunas de material compósito e verificar a influência da não linearidade física nos resultados obtidos para colunas pultrudadas de perfil I;
- f) Avaliar a interação entre a flambagem local e global em colunas pultrudadas de perfil I;
- g) Com base nas análises realizadas para colunas laminadas e pultrudadas, verificar a aplicabilidade de algumas expressões disponíveis na literatura.

## 1.2 Organização do texto

O presente trabalho foi dividido em cinco capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos e teorias acerca dos materiais compósitos, enfatizando o comportamento mecânico dos compósitos laminados. Assim, o modelo mecânico de uma lâmina é apresentado e duas teorias de laminação são descritas, a Teoria Clássica da Laminação e a Teoria de

Laminação de Primeira Ordem. Em seguida, são apresentadas as metodologias de análise utilizadas na predição da falha dos compósitos, destacando os critérios de falha comumente adotados e as categorias gerais que caracterizam a degradação das propriedades do material.

No Capítulo 3, o comportamento de colunas de material compósito é abordado. Dessa forma, primeiramente, faz-se uma breve introdução sobre o tema. Na sequência, duas abordagens para determinação das propriedades elásticas equivalentes para compósitos laminados são descritas e a teoria de vigas laminadas de Massa e Barbero é apresentada. Neste capítulo também é realizada uma breve discussão sobre fenômenos de instabilidade de perfis. Assim, os modos de flambagem global e local, bem como a interação entre eles, são descritos e algumas expressões disponíveis na literatura para a determinação da carga crítica de flambagem são mostradas.

No Capítulo 4 são apresentados os estudos de casos. Assim sendo, os modelos computacionais propostos, utilizando o Método de Elementos Finitos, para simular o comportamento de colunas laminadas e pultrudadas de material compósito reforçado com fibras são descritos e validados. Além disso, são feitas verificações a partir da teoria descrita nos capítulos anteriores com a utilização de algumas expressões apresentadas. Para isto, colunas de perfil C laminadas e de perfil I pultrudadas foram avaliadas e os resultados obtidos foram discutidos.

Por último, no Capítulo 5, tendo como base o estudo realizado, são apresentadas as conclusões e comentários finais, além de sugestões para trabalhos futuros.

## 2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Os materiais compósitos são constituídos a partir da combinação de dois ou mais materiais distintos, de modo a formar um novo material com propriedades melhoradas (BARBERO, 2011). Estes materiais são caracterizados por possuírem, na maioria das vezes, desempenho superior ao dos componentes constituintes. Além disso, apresentam uma maior flexibilidade de fabricação, sendo possível a adequação de suas propriedades de acordo com os requisitos de cada projeto (CHAWLA, 2013).

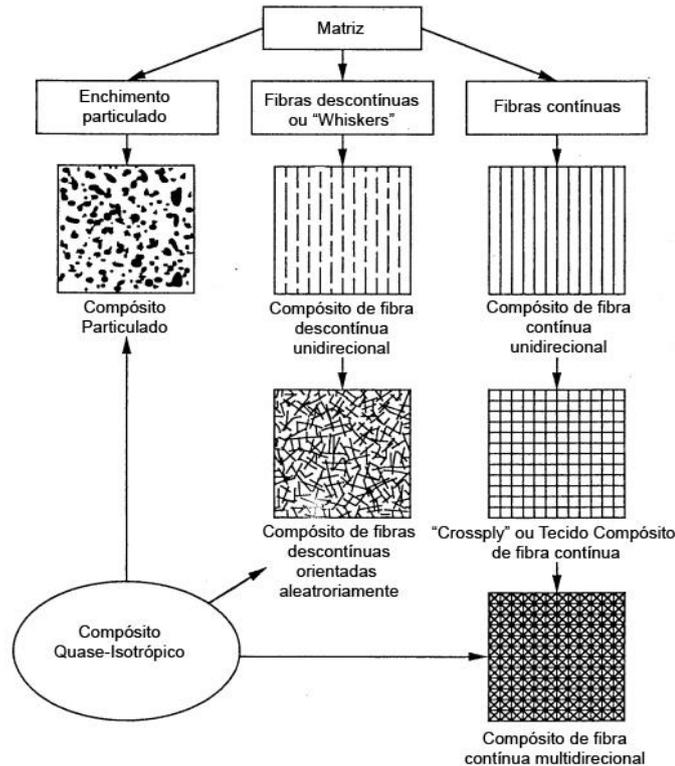
A origem exata dos materiais compósitos é desconhecida, porém, ao longo da história, há referências a algumas formas de compósitos. Por exemplo, os israelitas utilizaram palhas para fortalecer tijolos de barro. Já os antigos egípcios usaram madeira compensada, quando perceberam que a madeira poderia ser reagrupada de forma a atingir maior resistência à expansão térmica e ao inchamento causado pela absorção de umidade (JONES, 1999).

A partir da década de 1960, os materiais compósitos de alto desempenho começaram a ser introduzidos na indústria aeroespacial (REZENDE & BOTELHO, 2000). De acordo com Jones (1999), em meados da década de 1990, resinas reforçadas com fibras tornaram-se importantes em aplicações sensíveis ao peso, como aeronaves e veículos espaciais, visto que possuem resistência específica e rigidez específica elevada.

Neste contexto pode-se dizer que são inúmeras as aplicações para este tipo de material e, segundo Daniel e Ishai (2006), estas incluem tubos subterrâneos, barcos, veículos terrestres, estruturas de aeronaves e aeroespaciais, componentes automotivos, equipamentos esportivos, produtos biomédicos, e muitos outros produtos concebidos visando ter alto desempenho mecânico e/ou baixo peso.

Ainda de acordo com Daniel e Ishai (2006), um compósito estrutural é formado por duas ou mais fases em uma escala macroscópica, no qual uma das fases é normalmente descontínua, mais rígida e mais resistente (reforço), enquanto a fase menos rígida e mais fraca e contínua (matriz). Os autores ressaltam ainda que os materiais compósitos podem ser classificados em três grandes categorias, de acordo com o tipo, geometria e orientação da fase de reforço, tal como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Classificação dos sistemas de materiais compósitos

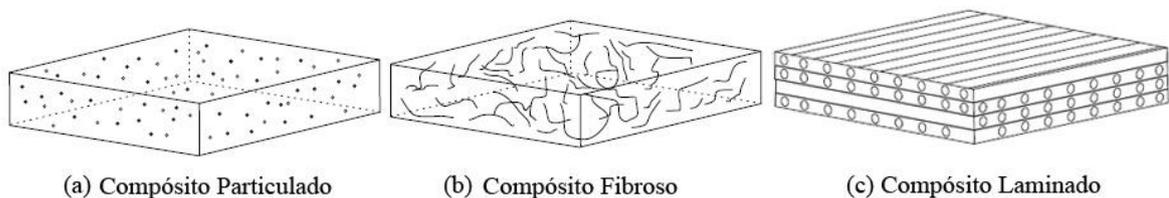


Fonte: Daniel e Ishai (2006).

Os materiais da matriz podem ser polímeros, metais ou cerâmicos. Entretanto, as matrizes poliméricas são as mais comuns, dada a facilidade de fabricação de peças complexas, com baixos custos de produção (BARBERO, 2011).

De uma forma mais geral, os compósitos podem ser caracterizados em três tipos principais: Compósitos Particulados, Compósitos Fibrosos e Compósitos Laminados (Figura 2).

Figura 2 – Tipos de Compósitos



Fonte: Adaptado de Belo (2006).

Os compósitos particulados, comumente isotrópicos, consistem em partículas imersas aleatoriamente em uma matriz. Exemplos típicos destes compósitos incluem a utilização de partículas de alumínio em borracha, partículas de carboneto de silício em alumínio e cascalho, areia e cimento para obtenção do concreto (KAW, 2006).

As fibras são comumente utilizadas no compósito em virtude da sua leveza, rigidez

e resistência, e isso se dá devido à orientação preferencial de moléculas ao longo da direção das fibras e por causa do número reduzido de defeitos presentes em uma fibra em oposição ao material a granel (BARBERO, 2011).

Entretanto, apesar da fibra desempenhar o principal papel no comportamento do material compósito, outros constituintes, tais como a matriz, interface fibra/matriz e os revestimentos de fibras (quando utilizados) também são importantes, uma vez que influenciam a eficácia com que as propriedades das fibras são utilizadas. Dessa forma, cada componente tem várias funções relevantes e estas dependem das aplicações pretendidas para o material compósito (RAUCH, SUTTON & MCCREIGHT, 1968).

Os compósitos fibrosos consistem em fibras longas imersas em uma matriz, sendo a orientação e o volume de fibras fatores determinantes na resistência destes materiais. Os compósitos de fibras contínuas são considerados mais eficientes do ponto de vista da rigidez e resistência. As fibras contínuas podem ser todas paralelas (compósito unidirecional de fibra contínua), podem ser orientadas em ângulos retos entre si (compósito de fibra contínua de tecido) ou podem ser orientadas ao longo de várias direções (compósito de fibra contínua multidirecional). Neste último caso, de acordo com o número de direções e de distribuição das fibras, o compósito pode ser caracterizado como um material quase-isotrópico (DANIEL & ISHAI, 2006).

## **2.1 Processos de fabricação**

O processo de fabricação é uma das etapas relevantes na aplicação de materiais compósitos e muitos métodos foram desenvolvidos, dentre eles pode-se citar o enrolamento de filamentos, a moldagem por transferência de resina, a moldagem por autoclave e a pultrusão (DANIEL & ISHAI, 2006).

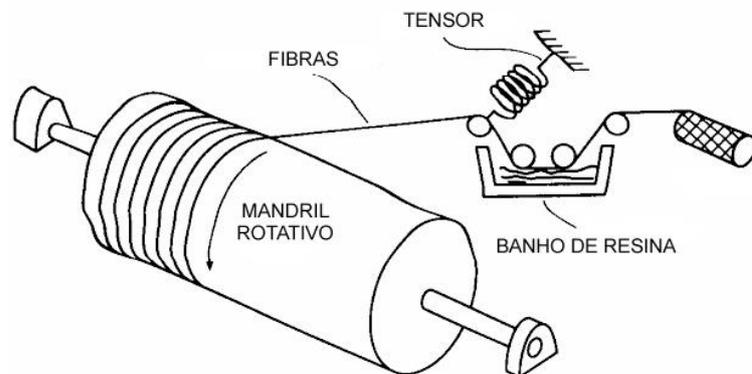
Segundo Pierin (2005), os métodos de fabricação dos materiais compósitos evoluíram de processos manuais para automatizados e, atualmente, possuem diversas vantagens ligadas à precisão, controle de qualidade e rapidez na produção. Em decorrência, a utilização destes materiais tem se tornado cada vez mais ampla e diversificada.

A escolha do processo de fabricação depende dos materiais constituintes do compósito, sendo o componente de matriz uma variável muito importante (GIBSON, 1994). Para Agarwal, Broutman e Chandrashekhara (2006), essa escolha é fortemente influenciada pelas características físicas e químicas da matriz, tais como temperaturas de fusão ou de cura, viscosidade e reatividade com as fibras.

Além dos fatores citados acima, Jones (1999) afirma que a escolha do processo de fabricação está associada com tamanho e forma da peça, custo e familiaridade com técnicas especiais.

O processo de enrolamento de filamentos (*Filament Winding*) é recomendado para fabricação de peças cilíndricas e esféricas. Segundo Sousa (2007), as fibras inicialmente são impregnadas em um banho de resina e, em seguida, são enroladas continuamente em um mandril rotativo normalmente automatizado (Figura 3). O autor ressalta também que, após a execução de certo número de camadas, inicia-se o processo de cura em um forno ou à temperatura ambiente, acompanhado da remoção do mandril.

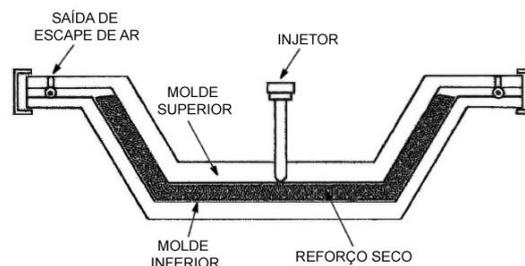
Figura 3 – Esquema do processo de enrolamento de filamentos



Fonte: Adaptado de Gibson (1994).

Na moldagem por transferência de resina (*Resin Transfer Moulding - RTM*), o material de reforço e a resina são introduzidos separadamente, assim sendo, o processo requer a introdução do reforço de fibra seco em um molde, seguido da injeção da resina líquida em um segundo molde para impregnar as fibras e preencher a cavidade do molde (AGARWAL, BROUTMAN & CHANDRASHEKHARA, 2006). De acordo com os autores, quando o molde está cheio, o fornecimento de resina é interrompido, as entradas e saídas deste são seladas e inicia-se o processo de cura. A Figura 4 ilustra esquematicamente o processo.

Figura 4 – Esquema da Moldagem por transferência de resina

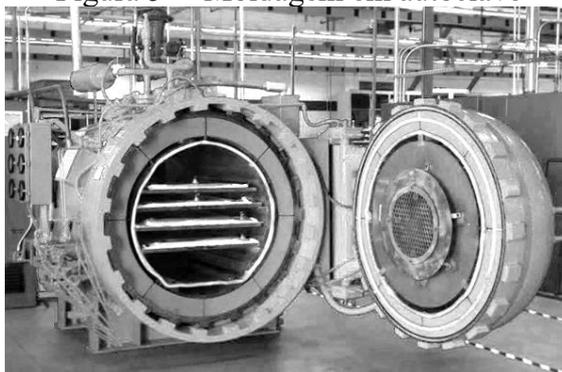


Fonte: Adaptado de Agarwal, Broutman e Chandrashekhara (2006).

Lopes (2009) cita algumas vantagens da moldagem por transferência de resina e dentre elas estão a possibilidade de produzir um compósito com elevado teor de fibra, número de vazios reduzido e elevada qualidade superficial em ambos os lados da peça, bem como reduzida porosidade, espessura uniforme e capacidade de automação parcial. Contudo, o autor destaca também algumas desvantagens, tais como elevado custo de investimento, dificuldade em prever o fluxo de enchimento e em projetar moldes e ferramentas auxiliares, elevado número de peças rejeitadas, limitação dimensional, etc.

Outro processo comumente utilizado na produção dos materiais compósitos é a moldagem em autoclave (Figura 5). Segundo Lopes (2009), a moldagem em autoclave consiste em consolidar um componente pré-impregnado a partir da aplicação simultânea de temperatura, pressão e vácuo. O autor ressalta que este processo possibilita a produção de peças de grandes dimensões e geometria complexa, com elevada qualidade e excelentes propriedades mecânicas.

Figura 5 – Moldagem em autoclave

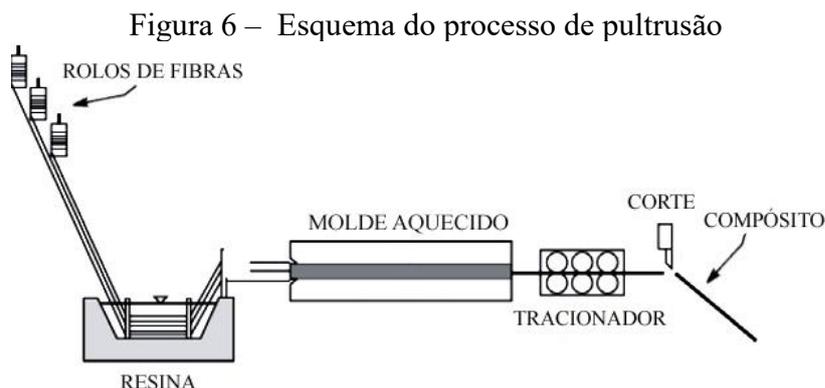


Fonte: Adaptado de ACP Composite.

Segundo Gibson (1994), este processo é tido como padrão da indústria aeroespacial para fabricação com fitas pré-impregnadas (*prepreg*). Para o autor a autoclave é simplesmente uma câmara de pressão aquecida dentro da qual um molde é adicionado e então submetido à temperatura e pressão requeridas para cura.

De acordo com Nagahama (2003), o desenvolvimento dos processos de fabricação dos materiais compósitos reforçados por fibras, em especial a pultrusão, adequou a produção de perfis estruturais para as mais diversas aplicações. O autor define a pultrusão como o processo de moldagem que tem como objetivo produzir peças estruturais longas e retas, com seção transversal constante, que podem ser as mais variadas possíveis.

Na pultrusão, o material de reforço é impregnado de resina e puxado por meio de uma matriz metálica, na qual a resina é curada a temperaturas elevadas (CARDOSO, 2014). A Figura 6 ilustra esquematicamente o processo.



Fonte: Adaptado de Santiago *et al.* (2003).

Os perfis pultrudados produzidos para aplicação em estruturas de edifícios e pontes tais como vigas, colunas e membros de treliça, na maioria das vezes, possuem geometrias similares às dos perfis metálicos (BANK, 2006). Estes perfis possuem propriedades interessantes de durabilidade e leveza, entretanto, estes benefícios estão associados a um comportamento estrutural completamente distinto daquele apresentado pelos perfis de aço, usados tradicionalmente (PECCE & COSENZA, 2000).

As espessuras das paredes dos perfis pultrudados, devido ao processo de fabricação, são da ordem de 5 mm, o que por sua vez ocasiona um conjunto de fenômenos que geralmente afetam as seções mais esbeltas, tais como (i) flambagem local dos perfis submetidos à compressão, isto é, instabilidade das placas, já que estes perfis são formados pela união de trechos planos ou (ii) fenômenos decorrentes da baixa rigidez e complexa deformabilidade sob torção, como por exemplo, o empenamento (PIERIN, 2005). Estes fenômenos serão descritos e discutidos no decorrer do presente trabalho.

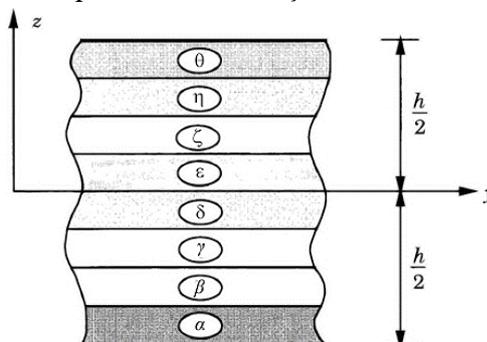
## 2.2 Compósitos Laminados

Os compósitos laminados são constituídos por duas ou mais lâminas, cada qual podendo ter espessuras e materiais distintos. De acordo com Daniel e Ishai (2006), os compósitos laminados que contêm camadas com dois ou mais tipos diferentes de materiais são chamados de compósitos híbridos. Os autores destacam também que em alguns casos pode ser vantajoso misturar tipos diferentes de fibras dentro da mesma camada unidirecional.

A configuração do laminado, que indica o número de camadas, tipo e orientação das lâminas em relação a um eixo de referência, é chamada esquema de laminação. Assumindo que todas as lâminas sejam constituídas do mesmo material e tenham mesma espessura, o esquema de laminação pode ser representado por  $[\alpha/\beta/\gamma/.../\theta]$ , sendo  $\alpha$  o ângulo de orientação

das fibras da primeira camada,  $\beta$  da segunda camada e assim respectivamente, como mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Esquema de laminação comumente adotado



Fonte: Adaptado de Reddy (2004).

Um compósito laminado reforçado com fibras consiste em um conjunto de fibras imersas na matriz, sendo assim, o esquema de laminação e as propriedades de cada lâmina fornecem uma maior flexibilidade para adaptar a rigidez e resistência do laminado, de forma que estas correspondam as exigências do projeto (REDDY, 2004).

É importante ressaltar que qualquer ponto no interior do compósito pertence a uma de suas três regiões – fibra, matriz ou interface fibra-matriz –, podendo o material possuir diferentes mecanismos de falha, os quais irão depender da existência de pontos críticos (HA, JIN & HUANG, 2008).

Os materiais compósitos podem ser analisados considerando o comportamento micromecânico e macromecânico. A análise micromecânica considera a interação dos constituintes a nível microscópico e é comumente utilizada na determinação das propriedades dos materiais compósitos, ou seja, das constantes de engenharia do material.

Em contrapartida, na análise macromecânica, assume-se a homogeneidade do material compósito, desprezando a interação a nível microscópico e considerando propriedades aparentes médias. Esta abordagem é recomendada no estudo do comportamento elástico ou viscoelástico de laminados ou de estruturas compósitas, nas quais se assume a continuidade de material (DANIEL & ISHAI, 2006).

### 2.3 Relações Constitutivas

Na abordagem macromecânica, o compósito reforçado por fibras é considerado como um material homogêneo e ortotrópico. Normalmente, considera-se que estes compósitos apresentam comportamento linear elástico antes da falha. Assim, as componentes de tensão e

deformação podem ser relacionadas através da lei de Hooke generalizada, dada por (JONES, 1999):

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (1)$$

e

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (2)$$

onde  $\sigma_i$  são as tensões normais,  $\varepsilon_i$  as deformações normais,  $C_{ij}$  representa os componentes da matriz constitutiva do material e  $S_{ij}$  a matriz de flexibilidade (*compliance*) do material.

Normalmente, existem 21 constantes elásticas independentes para um material anisotrópico. Para materiais ortotrópicos, caracterizados por possuírem três planos mutuamente ortogonais de simetria, o número de parâmetros do material é reduzido a 9 (REDDY, 2004).

No sistema local de cada lâmina ou sistema do material  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1$  é a direção das fibras,  $x_2$  é a direção perpendicular às fibras no plano da lâmina e  $x_3$  é a direção perpendicular à lâmina.

Considerando que as espessuras das lâminas são muito finas, admite-se um estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ ). Sendo assim, as relações entre as deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) e tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) no sistema material, apresentada por diversos autores podem ser escritas como (JONES, 1999):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

sendo  $\mathbf{S}$  a matriz de flexibilidade do material, cujos coeficientes são dados por:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (4)$$

em que  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade nas direções principais,  $\nu_{ij}$  é o coeficiente de Poisson na direção  $i$  devido à aplicação de uma carga na direção  $j$  e  $G_{12}$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento no plano 1-2.

Dada a simetria da matriz de flexibilidade, os coeficientes de Poisson ( $\nu_{ij}$ ) deverão satisfazer a seguinte relação (JONES, 1999):

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1,2,3 \quad (5)$$

Invertendo a Equação (3) obtém-se a relação tensão-deformação no sistema material:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (6)$$

onde:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (7)$$

Geralmente, os eixos principais da lâmina (1,2) não coincidem com os eixos da carga de referência ( $x, y$ ), dessa forma, para que os componentes de tensão e deformação sejam expressos em termos dos eixos de carregamento ( $x, y$ ) faz-se necessário realizar algumas transformações (DANIEL & ISHAI, 2006).

De acordo com Cook *et al.* (2002), as tensões e deformações podem ser transformadas através das seguintes relações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

e

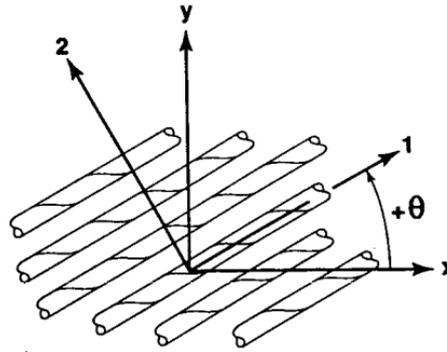
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (9)$$

sendo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de rotação entre os eixo  $x$  e o eixo principal da lâmina (Figura 8).

Figura 8 – Rotação entre os eixos principais da lâmina e os eixos  $x$ - $y$



Fonte: Jones (1999).

Realizando algumas substituições envolvendo as Equações (3), (4), (6), (8) e (9), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Os coeficientes da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  são obtidos através do produto matricial triplo  $\mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T}$  e podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

É importante ressaltar que as componentes de deformação ( $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{23}$ ), referentes ao efeito do cisalhamento fora do plano, devem ser consideradas no caso de lâminas espessas. Deste modo, a relação constitutiva no sistema local é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (14)$$

onde  $Q_{44}$  e  $Q_{55}$  são  $G_{13}$  e  $G_{23}$ , respectivamente.

De forma similar ao mostrado anteriormente, faz-se necessário a transformação da relação constitutiva para o sistema global a partir de uma matriz de transformação. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_s \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

sendo,

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

Portanto, realizando algumas substituições envolvendo as Equações (14), (15) e (16), obtém-se a relação tensão-deformação no sistema de coordenadas global:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{Q}}_s \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s \quad (18)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2\theta + Q_{55} \sin^2\theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin\theta \cos\theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2\theta + Q_{55} \cos^2\theta \end{aligned} \quad (19)$$

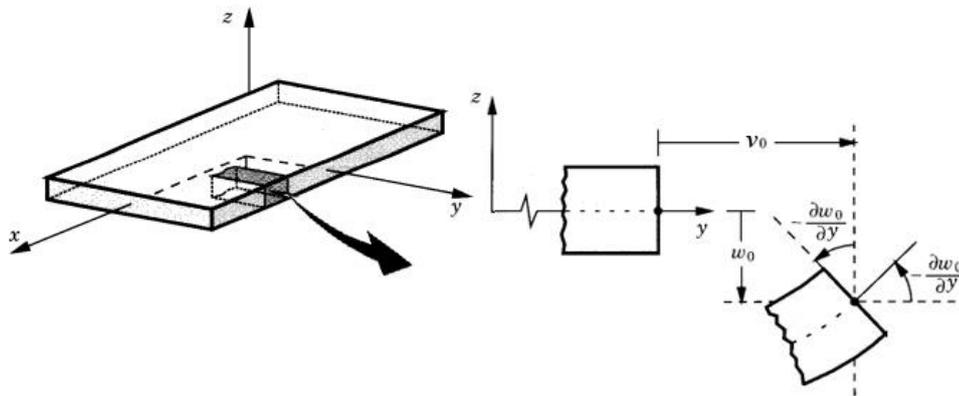
## 2.4 Teoria Clássica da Laminação

Em geral, as placas laminadas são analisadas utilizando teorias de lâminas equivalentes. Nestas teorias, o laminado heterogêneo é substituído por uma lâmina única estaticamente equivalente cuja rigidez é uma média ponderada das rigidezes das lâminas

(REDDY, 1993). Ainda de acordo com Reddy (1993), as principais vantagens destas teorias são a simplicidade e o baixo custo computacional devido ao número relativamente pequeno de variáveis utilizadas para descrever o comportamento dos laminados, contudo, estes modelos são muitas vezes inadequados para determinar o campo de tensão tridimensional no nível da lâmina, visto que as componentes de deformação transversal são contínuas através de interfaces entre materiais diferentes.

A teoria mais simples de placas laminadas considerando a abordagem da teoria de lâmina equivalente é a Teoria Clássica da Laminação (TCL) ou Teoria Clássica das Placas Laminadas (TCPL), considerada uma extensão da Teoria de Placa de Kirchhoff para compósitos laminados. Nela assume-se que o deslocamento transversal é independente da coordenada transversal (espessura da placa) e que as deformações  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são desprezíveis (REDDY, 2004; JONES, 1999).

Figura 9 – Geometrias não deformadas e deformadas de uma borda de uma placa sob as hipóteses de Kirchhoff



Fonte: Adaptado de Reddy (2004).

Como pode ser visto na Figura 9 e com base na hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, o campo dos deslocamentos  $(u, v, w)$  para qualquer ponto pode ser determinado tal como se segue (REDDY, 2004):

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

em que  $u_0, v_0, w_0$  são os deslocamentos de um ponto médio nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente.

Segundo Jones (1999), as deformações do laminado foram reduzidas a  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  em virtude das hipóteses de Kirchhoff. Dessa forma, as deformações são definidas em termos dos deslocamentos como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m - z \boldsymbol{\kappa} \quad (21)$$

onde a primeira parcela corresponde às componentes de membrana ( $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ ), referentes às deformações da superfície média do laminado, e a segunda parcela corresponde às deformações de flexão, ou seja, às curvaturas da superfície média da placa ( $\boldsymbol{\kappa}$ ).

Em relação às forças e momentos resultantes atuantes sobre um laminado, pode-se dizer que são obtidos através integração das tensões em cada camada ou lâmina ao longo da espessura do laminado (JONES, 1999):

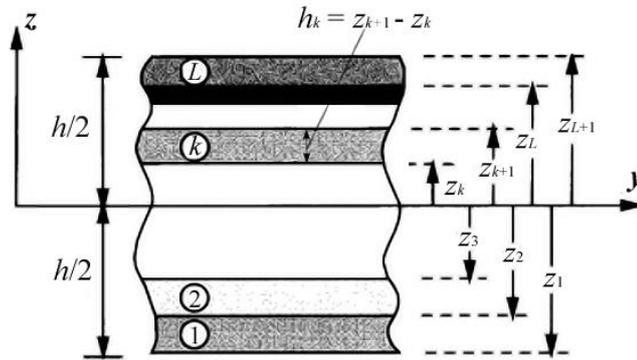
$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \int_{z_{k+1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (22)$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \int_{z_{k+1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} z \\ z \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z^2 \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (23)$$

Nas equações acima,  $n$  representa o número de lâminas, a origem do eixo  $z$  é a superfície média do laminado e  $h$  é sua espessura total, como apresentado na Figura 10.

Figura 10 – Sistema de coordenadas e numeração de camadas usadas para uma placa laminada



Fonte: Adaptado Reddy (2004).

É importante ressaltar que enquanto as deformações variam linearmente através da espessura, as componentes de tensão podem variar de forma descontínua de uma camada para outra, pois dependem da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  que não é constante (DANIEL & ISHAI, 2006).

Assim, a relação constitutiva em termos de tensões e deformações generalizadas do laminado, conforme Reddy (2004), Daniel e Ishai (2006) e Barbero (2011), pode ser determinada de acordo com a expressão:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

sendo,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1} - z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (25)$$

onde  $A_{ij}$  representa a rigidez extensiva,  $D_{ij}$  a rigidez a flexão e  $B_{ij}$  os termos de acoplamento membrana-flexão. Desta forma, os termos da matriz  $\mathbf{ABD}$  dependem da espessura da lâmina, da orientação das fibras, da sequência de empilhamento e das propriedades do material.

Os compósitos laminados podem ser classificados quanto à simetria e quanto aos

ângulos de orientação das fibras, sendo subdivididos em vários tipos que estão diretamente ligados à configuração do laminado e às propriedades do material de cada lâmina. A seguir são apresentados de forma sucinta os tipos de laminados e suas especificações quanto à rigidez extensional, à flexão e aos termos de acoplamento membrana-flexão.

- a) Laminados Simétricos: São aqueles que apresentam material, espessura e ângulo de orientação das fibras simétricos em relação a superfície média, sendo representado, por exemplo, como  $[0^\circ/30^\circ]_s$ , onde a letra 's' indica a simetria, ou seja, a laminação apresentada seria igual a  $[0/30^\circ/30^\circ/0^\circ]$ . Nestes casos a matriz de acoplamento membrana-flexão é nula ( $\mathbf{B} = 0$ ), tornando a análise mais simples devido ao desacoplamento membrana-flexão (KAW, 2006).
- b) Laminados antissimétricos: São aqueles apresentam material e espessura simétricos, porém possuem ângulos de orientação das fibras antissimétricos em relação a superfície média. Como exemplo tem-se a laminação  $[45/35/-35/-45]$ . Para os laminados antissimétricos, os termos de acoplamento da matriz de rigidez extensional ( $A_{16}$  e  $A_{26}$ ), assim como alguns termos de acoplamento da matriz de rigidez à flexão ( $D_{16}$  e  $D_{26}$ ) são nulos (KAW, 2006).
- c) Laminados Balanceados: São aqueles que para cada camada do laminado existe outra camada com mesmo material e espessura, porém com a orientação das fibras oposta, por exemplo, o laminado simétrico  $[+35/-35/0/0/-35/+35]_s$  também é balanceado (REDDY, 2006). Para este tipo de laminado alguns termos da matriz que representa a rigidez de membrana do laminado são desprezados ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ), enquanto que os laminados balanceados simétricos tem  $\mathbf{B} = 0$ , mas  $D_{16} \neq 0$  e  $D_{26} \neq 0$  (BARBERO, 2011).
- d) Laminados *cross-ply*: Apresentam ângulos de laminação com orientação  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Por exemplo,  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$  é *cross-ply*. Para este tipo de laminado alguns termos são nulos ( $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ ), e no caso de laminados *cross-ply* simétricos, além dos termos citados serem desprezados, a matriz  $\mathbf{B}$  é nula e nenhum acoplamento ocorre entre os termos de força e momento (KAW, 2006).
- e) Laminados *angle-ply*: Apresentam lâminas de mesmo material e espessura, com ângulos de orientação das fibras nas direções  $+\theta$  e  $-\theta$ . Como exemplo pode-se citar o laminado  $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]$ . Quando simétricos os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  não são nulos, no entanto sua magnitude diminui com o aumento do número

de camadas para a mesma espessura total do laminado (DANIEL; ISHAI, 2006).

## 2.5 Teoria de Laminação de Primeira Ordem

Na Teoria Clássica da Laminação, as hipóteses adotadas desprezam o cisalhamento transversal, contudo, quando a razão entre a espessura e as dimensões representativas da placa é maior que 1/20 recomendam-se teorias que consideram as deformações por cisalhamento (LIEW, ZHAO & FERREIRA, 2011). Neste contexto, diversas teorias foram desenvolvidas visando considerar o efeito do cisalhamento transversal, e dentre elas pode-se citar a Teoria de Reissner-Mindlin.

Na Teoria de Reissner-Mindlin os efeitos de cisalhamento transversal são considerados de forma aproximada, sendo o deslocamento  $w$  constante ao longo da espessura. Para isso assume-se que uma reta normal ao plano médio da placa permanece reta, mas não necessariamente normal, após a deformação, conforme a Figura 11.

Sendo assim, o campo dos deslocamentos  $(u, v, w)$  para qualquer ponto é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (26)$$

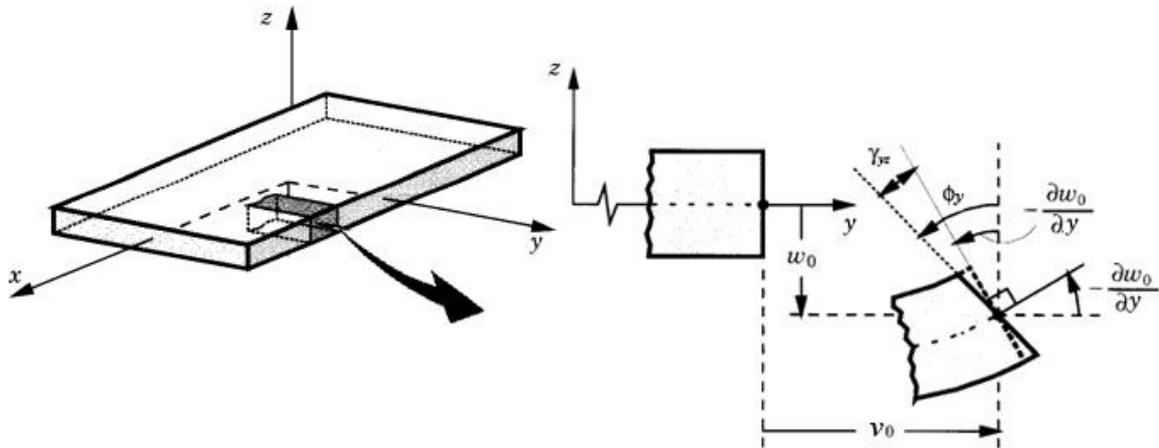
onde  $u_0, v_0, w_0$  são os deslocamentos de um ponto da superfície da placa nas direções  $x, y$  e  $z$ , e  $\phi_x, \phi_y$  são as rotações da reta normal em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente (Figura 6).

As componentes de deformações em qualquer ponto da placa são dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

onde  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  e  $\gamma_{xy}^0$  são as deformações de membrana e  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_{xy}$  representam as mudanças nas curvaturas que são próximas, mas não exatamente iguais às curvaturas geométricas da superfície média.

Figura 11 – Geometrias não deformadas e deformadas de um trecho de uma placa sob as hipóteses de Reissner-Mindlin



Fonte: Adaptado de Reddy (2004).

As deformações ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ ) apresentam um comportamento linear ao longo da espessura, enquanto que as deformações devido ao cisalhamento transversal ( $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$ ) são consideradas constantes (REDDY, 2004). O autor ressalta também que o estado constante das deformações de cisalhamento transversal é uma aproximação do campo de tensão verdadeiro, uma vez que apresenta no mínimo uma distribuição quadrática ao longo da espessura do laminado.

De modo análogo à Teoria Clássica de Laminação, as forças e momentos resultantes atuantes sobre um laminado são obtidos a partir de integração das tensões ao longo da espessura da placa:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (28)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (29)$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (30)$$

Em decorrência da aproximação entre o estado de tensão real e o estado de tensão constante, predita anteriormente, o cálculo da força de cisalhamento transversal ( $V_{xz}$ ,  $V_{yz}$ ) deve ser corrigido multiplicando-se as integrais da Equação (30) por um fator de correção de cisalhamento  $K$ , comumente igual a 5/6 (REDDY, 2004).

Deste modo, a relação constitutiva em termos de tensões e deformações generalizadas do laminado conforme a Teoria da Primeira Ordem é dada por:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{44} & G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1} - z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \\ G_{ij} &= \sum_{k=1}^N K (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad (32)$$

## 2.6 Critérios de Falha

Como definido anteriormente, os materiais compósitos são constituídos por dois componentes – fibra e matriz – cuja rigidez e resistência são extremamente diferentes. Assim, pode-se dizer que a presença destes componentes, considerados macroscopicamente homogêneos, é responsável pelo alto desempenho dos compósitos, contudo, torna esses materiais inerentemente anisotrópicos, caracterizados por diversos modos de falha

(PIETROPAOLI, 2012).

Sleight (1999) cita que os compósitos laminados podem falhar por ruptura de fibras, trincamento da matriz ou pela delaminação de camadas, e ressalta que o modo de falha depende do carregamento, da sequência de empilhamento e da geometria do compósito.

Os critérios de falha fornecem envoltórias de ruptura que predizem a falha de uma lâmina. Daniel e Ishai (2006) classificam as teorias de falha em três grupos:

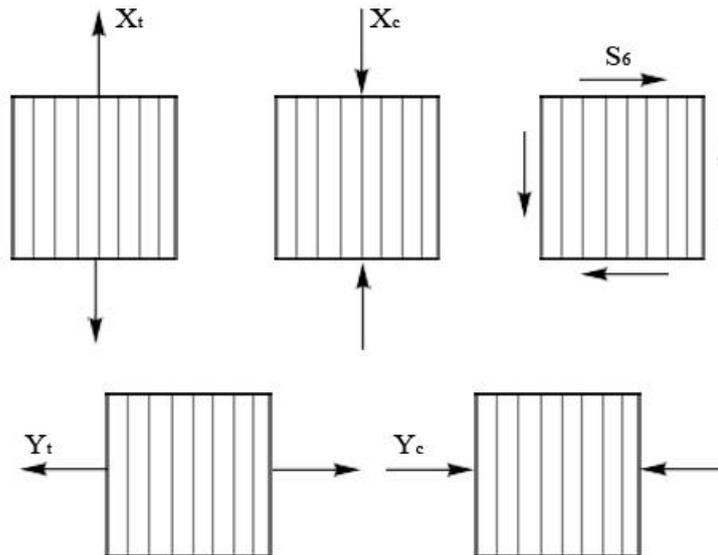
- a) Teorias não interativas: Os modos de falha são previstos por meio da comparação entre os componentes individuais de tensão ou deformação e os valores de resistência correspondentes ou deformações finais. Como exemplo, têm-se os Critérios de Máxima Tensão e Máxima Deformação.
- b) Teorias interativas: Os componentes de tensão são incluídos em uma única expressão. Nestes métodos, a falha geral é prevista sem referência aos determinados modos de falha. Podem-se citar as Teorias de Tsai-Hill e Tsai-Wu.
- c) Teorias parcialmente interativas ou baseadas no modo de falha: Critérios diferentes são dados para as falhas da fibra e matriz. Dentre estes critérios, têm-se as Teorias de Hashin-Rotem e Puck.

A escolha de um critério de falha para compósitos é considerada complexa, visto que este deve representar de forma consistente os fenômenos físicos envolvidos e ser capaz de estabelecer uma superfície suave no espaço de tensões sem necessitar de muitos experimentos (TITA, CARVALHO & SANTOS, 2002).

Muitas teorias de falha foram desenvolvidas para os materiais compósitos. París (2001) realizou um estudo acerca dos critérios de falha de materiais compósitos fibrosos e apresentou uma revisão de publicações relacionadas com o tema, incluindo 53 referências. Além disso, pode-se citar ainda diversos estudos acerca da temática, como por exemplo, Dávila, Camanho e Rose (2005), Nali e Carrera (2012), Banat e Mania (2016), dentre outros.

Todas as teorias podem ser expressas em termos dos parâmetros que caracterizam a resistência em relação aos eixos principais do material (DANIEL & ISHAI, 2006). Para análises bidimensionais são necessários 5 parâmetros ( $X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$  e  $Y_c$  e  $S_6$ ), ilustrados na Figura 12.

Figura 12 – Parâmetros de resistência em uma lâmina



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 2.6.1 Critério de Máxima Tensão

O Critério de Máxima Tensão compara cada componente de tensão com o valor de resistência máxima correspondente (KNIGHT, 2006). Ou seja, este critério prediz a falha de uma lâmina quando pelo menos uma componente de tensão em um ponto do compósito excede o valor correspondente de resistência, que é obtido experimentalmente (BARBERO, 2011). Sendo assim, tem-se a envoltória de ruptura para o caso bidimensional:

$$\sigma_1 \begin{cases} X_t & \text{quando } \sigma_1 > 0 \\ X_c & \text{quando } \sigma_1 < 0 \end{cases} \quad \sigma_2 \begin{cases} Y_t & \text{quando } \sigma_2 > 0 \\ Y_c & \text{quando } \sigma_2 < 0 \end{cases} \quad |\tau_{12}| = S_6 \quad (33)$$

De acordo com Jones (1999), se qualquer uma das condições, mostradas acima, não for satisfeita, supõe-se a falha do material, visto que o mecanismo de falha está relacionado com as resistências  $X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$  e  $Y_c$  e  $S_6$ , respectivamente.

Além da envoltória de falha também é importante determinar um Fator de Segurança ( $S_f$ ) nas análises referente a falha do material. O fator de segurança para um dado estado de tensão é um multiplicador que é aplicado a todas as componentes de tensão para produzir um estado crítico ou de falha (DANIEL & ISHAI; 2006). Para o critério de Máxima Tensão tem-se o seguinte fator:

$$S_f = \min \left( \frac{X_t}{\sigma_1}, -\frac{X_c}{\sigma_1}, \frac{Y_t}{\sigma_2}, -\frac{Y_c}{\sigma_2}, \frac{S_6}{|\tau_{12}|} \right) \quad (34)$$

### 2.6.2 Critério de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu não possui uma base física, uma vez que foi formulado de modo a se ajustar aos resultados obtidos experimentalmente (NALI & CARRERA, 2012). Este pode ser definido como um critério de falha interativo em que todos os componentes de tensão ( $\sigma$ ) são usados simultaneamente para determinar se ocorreu ou não uma falha material de um ponto (KNIGHT, 2006). Sendo assim, de acordo com Tsai e Wu (1972), tem-se:

$$f(\sigma_k) = f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (35)$$

sendo  $f_i$  os termos lineares e  $f_{ij}$  os termos quadráticos, com  $i, j, k = 1, \dots, 6$ .

Para o caso de uma lâmina ortotrópica em estado de tensão plano a Equação (35) pode ser reduzida:

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \tau_6 + f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \tau_6^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (36)$$

sendo,

$$f_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad f_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \quad f_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \quad f_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad f_6 = 0 \quad f_{66} = \frac{1}{S_6^2} \quad (37)$$

Os termos lineares da expressão descrita acima permitem a distinção entre a resistência à tração e à compressão (DANIEL & ISHAI, 2006).

A complexidade do método está na determinação do fator  $f_{12}$ , obtido experimentalmente através de ensaios biaxiais (ANGÉLICO, 2009). No entanto, na maioria dos casos uma aproximação é suficiente. Alguns trabalhos utilizam a seguinte aproximação (REDDY, MOORTHY & REDDY, 1995; NALI & CARRERA, 2012):

$$f_{12} = \beta \sqrt{f_{11} f_{22}} \quad (38)$$

onde  $\beta$  é o termo de interação normalizado. De acordo com Kuraishi, Tsai e Liu (2002) este termo varia entre 0 e -0,5 para a maioria dos materiais. Ao considerar  $\beta = -0,5$  pode-se dizer

que se tem um critério de von Mises generalizado, visto que a aplicação das Equações (36), (37) e (38) a materiais isotrópicos resulta no critério falha de von Mises, comumente utilizado para metais.

Dada à sua natureza quadrática, o Fator de Segurança ( $S_f$ ) para o critério de Tsai-Wu pode ser obtido determinando-se a raiz da equação de segundo grau escrita como (DANIEL & ISHAI, 2006):

$$aS_f^2 + bS_f - 1 = 0 \quad (39)$$

onde:

$$a = f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (40)$$

$$b = f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 \quad (41)$$

### 2.6.3 Hashin

O critério de Hashin pode ser descrito como uma combinação de quatro condições interativas e não interativas, a fim de distinguir a falha da matriz e da fibra, causada por esforços de tração ou compressão (NALI & CARRERA, 2012). Este critério foi proposto por Hashin e Rotem (1973), no entanto foi modificado posteriormente por Hashin (1980).

Os modos de falha incluídos no Critério de Hashin são apresentados nas expressões que se segue (HASHIN, 1981; KNIGHT, 2006; PIETROPAOLI, 2012):

Falha na matriz à tração ( $\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0$ ):

$$\left( \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y_t} \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2} \geq 1 \quad (42)$$

Falha da matriz à compressão ( $\sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0$ ):

$$\frac{1}{Y_c} \left[ \left( \frac{Y_c}{2S_{23}} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_{23}^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_{23}^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_{23}^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \geq 1 \quad (43)$$

Falha da fibra à tração ( $\sigma_{11} > 0$ ):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_t}\right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \geq 1 \quad (44)$$

Falha da fibra à compressão ( $\sigma_{11} < 0$ ):

$$\left(\frac{|\sigma_{11}|}{X_c}\right) \geq 1 \quad (45)$$

Falha por cisalhamento na interface fibra-matriz:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad (46)$$

No que concerne ao Fator de Segurança ( $S_f$ ) para o critério de Hashin pode-se dizer que este é determinado de forma similar aos critérios anteriormente apresentados, no entanto, é necessário analisar todos os modos de falhas descritos nas expressões acima e adotar o menor valor de  $S_f$  obtido.

## 2.7 Degradação do Material e Falha Progressiva

Na análise referente à falha de um laminado, duas metodologias podem ser adotadas. A primeira consiste em considerar que a falha do laminado ocorre quando alguma de suas lâminas falha, é conhecida como Falha da Primeira Lâmina (*First Ply Failure*). Contudo, essa abordagem é conservadora e do ponto de vista econômico pode ser considerada inviável. Os critérios de falha apresentados na seção anterior determinam a falha de uma lâmina, que resulta em uma diminuição do desempenho do laminado em decorrência da perda de rigidez na lâmina, contudo, não predizem a evolução do dano.

A segunda metodologia de análise é conhecida como falha progressiva. Pietropaoli (2012) destaca as etapas básicas de uma análise de falha progressiva de forma sintetizada, as quais incluem a determinação da distribuição de tensões, a aplicação de critérios de falha e a degradação das propriedades do material para cada camada. Deve-se salientar que estas etapas são repetidas até que a falha final do compósito laminado aconteça.

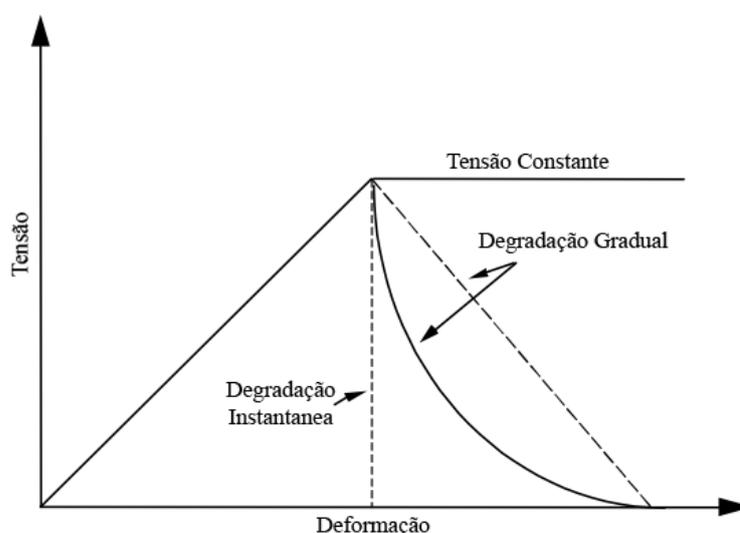
Análises baseadas na falha progressiva dos materiais compósitos têm sido foco de estudo ao longo dos anos e inúmeros trabalhos já foram realizados, dentre eles pode-se citar

Chang e Chang (1987), Reddy e Reddy (1993), Kuraishi, Tsai e Liu (2002), Lapczyk e Hurtado (2007), Akhras e Li (2007), Pietropaoli (2012), Riccio *et al.* (2017) e Puck e Schümann (1998; 2000).

Segundo Riccio *et al.* (2017), a principal dificuldade na realização destas análises está relacionada com a fase de degradação do material e com a consequente definição da rigidez residual do elemento danificado, pois como a falha ocorre progressivamente, a energia de deformação de todas as camadas deve ser redistribuída e isto induz uma modificação da tensão dentro do material (PIETROPAOLI, 2012).

A degradação das propriedades do material das lâminas que falharam pode ser realizada utilizando diversas abordagens (SLEIGHT, 1999; GARNICH & AKULA, 2009). Existem três categorias gerais que caracterizam a degradação das propriedades do material, dentre elas: degradação instantânea, degradação gradual e tensão constante (MURRAY & SCHWER, 1990 *apud* SLEIGHT, 1999). A Figura 13 ilustra os tipos de degradações mencionados.

Figura 13 – Tipos de degradação pós-falha em compósitos laminados



Fonte: Adaptado de Sleight (1999).

Sleight (1999) afirma que na degradação instantânea, as propriedades do material são degradadas instantaneamente para zero (ou para um valor pequeno para evitar problemas numéricos) de acordo com o modo de falha. Por outro lado, o autor ressalta que no caso da degradação gradual, as propriedades são degradadas gradativamente até chegar a zero, enquanto que na tensão constante, as propriedades dos materiais são degradadas de modo que o material não pode suportar uma carga adicional, ou seja, a lâmina que falhou irá suportar apenas uma carga igual àquela que ocasionou sua falha.

Os modelos de degradação instantânea tratam a degradação do material de uma forma simplificada, uma vez que apenas levam em conta o estado não danificado e um estado completamente degradado em um ponto material (GARNICH & AKULA, 2009).

Reddy e Reddy (1993) propuseram um modelo no qual as propriedades degradadas são assumidas como sendo um múltiplo constante das propriedades originais do material danificado. Os autores utilizaram dois métodos de redução da rigidez para estudar a influência desta nas cargas e tensões de falha, a saber, método independente e método iterativo. No método independente assume-se que cada tensão contribui somente para a degradação da propriedade de rigidez correspondente, enquanto que no método iterativo o acoplamento é assumido entre as propriedades de rigidez normal e de cisalhamento.

Os modelos de degradação gradual descrevem a progressão e o acúmulo dos danos com precisão, mas são computacionalmente mais caros que os modelos de degradação instantânea (GARNICH & AKULA, 2009). Reddy, Moorthy e Reddy (1995), apresentam um algoritmo de falha progressiva, no qual as propriedades de rigidez do elemento danificado são reduzidas gradualmente.

A maioria das análises de falhas progressivas utilizam critérios de falha que explicitamente identificam o modo de falha, o que por sua vez proporciona uma base mais racional para a degradação das propriedades (GARNICH & AKULA, 2009).

É interessante citar também as metodologias baseadas na Mecânica do Dano Contínuo e sua aplicação à modelagem de danos por impacto (DONADON *et al.*, 2008; YOKOYAMA, DONADON & ALMEIDA, 2010). No entanto, deve-se salientar que estas abordagens requerem o conhecimento de muitos parâmetros experimentais que geralmente não são fornecidos pelos fabricantes (PIETROPAOLI, 2012).

Lapczyk e Hurtado (2007) propuseram um modelo de dano para prever o início da falha e a resposta pós-falha para materiais frágeis reforçados por fibra, no qual a evolução do dano baseia-se na energia de fratura dissipada durante o processo de dano e o aumento de uma variável de dano é governado por um deslocamento equivalente apropriadamente definido para cada modo de falha. Esta lei de evolução é uma generalização da aproximação proposta por Camanho e Dávilla (2002).

No presente trabalho será utilizado o *software* ABAQUS (SIMULIA, 2012) para realizar análises comparativas com base nas duas metodologias de análises mencionadas. Em relação à metodologia de falha progressiva, o *software* utiliza o modelo proposto por Lapczyk e Hurtado (2007).

Segundo Lapczyk e Hurtado (2007), a redução dos coeficientes de rigidez é

controlada por variáveis de dano que podem assumir valores entre zero (estado não danificado) e um (totalmente danificado para o modo correspondente a esta variável de dano).

No modelo supracitado os critérios de iniciação baseiam-se no critério de Hashin (1980) e a degradação das propriedades mecânicas se dá a partir da adaptação do modelo proposto por Matzenmiller *et al.* (1995).

De acordo com os autores, relação entre a tensão efetiva,  $\hat{\sigma}$ , e a tensão nominal,  $\sigma$ , é dada por:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{M}\sigma \quad (47)$$

onde  $\mathbf{M}$  é o operador de dano obtido a partir de:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-d_s} \end{bmatrix} \quad (48)$$

em que  $d_f$ ,  $d_m$  e  $d_s$  são as variáveis de dano para os modos de falha da fibra, matriz e cisalhamento, respectivamente. Estas variáveis de dano são dadas por (SIMULIA, 2012):

$$d_f = \begin{cases} d_f^t & \text{se } \hat{\sigma}_{11} \geq 0 \\ d_f^c & \text{se } \hat{\sigma}_{11} < 0 \end{cases} \quad (49)$$

$$d_m = \begin{cases} d_m^t & \text{se } \hat{\sigma}_{22} \geq 0 \\ d_m^c & \text{se } \hat{\sigma}_{22} < 0 \end{cases} \quad (50)$$

$$d_s = 1 - (1 - d_f^t)(1 - d_f^c)(1 - d_m^t)(1 - d_m^c) \quad (51)$$

em que *t* e *c* denota, respectivamente, tração e compressão e  $\hat{\sigma}_{11}$  e  $\hat{\sigma}_{22}$  são os componentes de tensor de tensão efetiva.

A matriz de flexibilidade danificada é dada em função das variáveis de dano e das propriedades elásticas do material (LAPCZYK & HURTADO, 2007):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_f)E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_m)E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_s)G_{12}} \end{bmatrix} \quad (52)$$

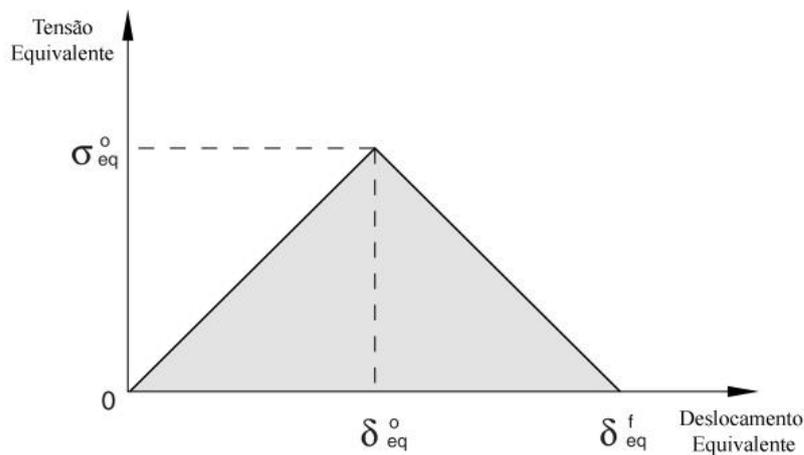
e a matriz de rigidez correspondente é obtida a partir de:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (1-d_f)E_1 & (1-d_f)(1-d_m)\nu_{21}E_1 & 0 \\ (1-d_f)(1-d_m)\nu_{12}E_2 & (1-d_m)E_2 & 0 \\ 0 & 0 & D(1-d_s)G_{12} \end{bmatrix} \quad (53)$$

onde  $D = 1 - (1-d_f)(1-d_m)\nu_{12}\nu_{21}$ .

A variável de dano evoluirá de tal forma que o deslocamento da tensão irá se comportar como mostrado na Figura 14 em cada um dos quatro modos de falha. É possível observar que a inclinação positiva da curva antes da iniciação do dano corresponde ao comportamento linear do material elástico e a inclinação negativa após a iniciação do dano é alcançada pela evolução das respectivas variáveis de dano (SIMULIA, 2012).

Figura 14 – Tensão Equivalente *versus* Deslocamento Equivalente



Fonte: Adaptado de Simulia (2012).

### 3 COLUNAS DE MATERIAL COMPÓSITO

Colunas são elementos estruturais submetidos predominantemente a esforço axial de compressão. As colunas de material compósito possuem paredes finas e a flambagem é uma consideração importante no projeto (BARBERO, DEDE & JONES, 2000). Para colunas longas de material compósito, é esperado que a flambagem global (Euler) ocorra antes de qualquer outra falha de instabilidade. Em contrapartida, para colunas curtas, a flambagem local ocorre primeiro, ocasionando grandes deformações, seguida da flambagem global ou da degradação do material (BARBERO & TOMBLIN, 1992).

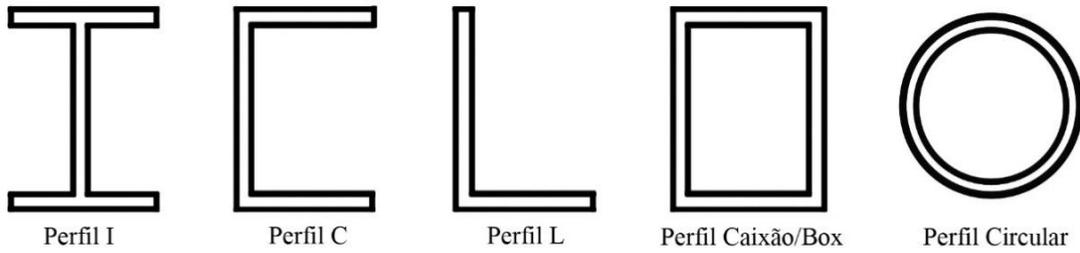
Segundo Barbero e Tomblin (1993), devido ao grande alongamento permitido pelas fibras e resina, os polímeros reforçados com fibra permanecem linearmente elásticos para grandes deflexões e deformações. Dessa forma, as especificações de projeto para evitar fenômenos de flambagem não podem ser as mesmas que as utilizadas para o aço, que geralmente ocorrem no intervalo plástico e com a influência das imperfeições geométricas e mecânicas (PECCE & COSENZA, 2000).

Outra consideração que tem instigado algumas pesquisas que abordam o comportamento de colunas de material compósito é a interação entre as flambagens local e global. De acordo com Barbero, Dede e Jones (2000), a interação de mais de um modo de flambagem pode induzir a um caminho pós-flambagem instável, causando falha prematura. Os autores supracitados verificaram experimentalmente a existência desta interação em colunas pultrudadas de abas largas com comprimento intermediário submetidas à compressão uniaxial.

Vale ressaltar que a interação entre os modos local e global já tem sido analisada experimentalmente há algum tempo. Barbero e Tomblin (1994) adaptaram uma equação de interação existente, desenvolvida por Zahn (1992) para colunas de madeira, visando explicar a interação entre as flambagens local e global observada nas colunas de material compósito reforçado com fibras ensaiadas em seu trabalho.

A Figura 15 apresenta alguns tipos de seções transversais tipicamente utilizadas em aplicações estruturais. No presente trabalho serão realizadas análises comparativas em colunas de perfil I e C.

Figura 15 – Seções transversais de perfis tipicamente utilizados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicialmente, alguns tipos de processos de fabricação serão apresentados, seguidos de uma breve discussão acerca das propriedades elásticas equivalentes para compósitos laminados, incluindo a teoria de vigas laminadas de Massa e Barbero (1998), essenciais no desenvolvimento do presente trabalho. Em seguida, será realizada uma revisão sobre a teoria referente aos fenômenos de instabilidade de perfis, englobando a flambagem global e local, bem como a interação entre elas.

### 3.1 Propriedades Elásticas Equivalentes

As equações referentes à flambagem local de colunas que serão apresentadas a seguir são funções dos parâmetros de rigidez baseados em propriedades elásticas. Nestas análises, o laminado é considerado uma placa homogênea com propriedades elásticas equivalentes ( $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{G}_{12}$ ,  $\bar{\nu}_{12}$  e  $\bar{\nu}_{21}$ ). Estas propriedades representam a rigidez de uma placa fictícia, ortotrópica, que se comporta como o laminado real sob cargas no plano (BARBERO, 2011).

Como já foi visto, as Equações (24) e (31) são denominadas equações de rigidez devido à analogia com a lei de Hooke,  $\sigma = E \varepsilon$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade ou rigidez do material. As deformações da placa são obtidas invertendo as equações supracitadas, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (54)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{44} & h_{45} \\ h_{45} & h_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Para laminados simétricos, todos os termos de acoplamento membrana-flexão são nulos, sendo assim, todos os coeficientes  $\beta_{ij}$  também serão iguais a zero. Neste caso, a Equação (54) pode ser separada em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

Quando o laminado simétrico é balanceado ou *cross-ply* os termos  $\alpha_{16}$  e  $\alpha_{26}$  são pequenos e podem ser desprezados, dessa forma, a Equação (56) é reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Segundo Barbero (2011), se não houver cargas de flexão, todas as curvaturas são nulas, e as deformações são constantes através da espessura, isto é  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_y^0$ ,  $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0$ , e para uma placa ortotrópica homogênea sob cargas no plano, as tensões também são constantes ao longo da espessura:  $\sigma_x = N_x/h$ ,  $\sigma_y = N_y/h$ ,  $\sigma_{xy} = N_{xy}/h$ . Deste modo, o autor afirma que a relação tensão-deformação mostrada na Equação (58) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{N_x}{h} \\ \frac{N_y}{h} \\ \frac{N_{xy}}{h} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

desde que os eixos de ortotropia coincidam com as coordenadas globais ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ).

Portanto, comparando as Equações (58) e (59) e realizando algumas substituições determinam-se as propriedades equivalentes do laminado:

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{h\alpha_{11}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{22}} \quad (60)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{h\alpha_{22}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{11}} \quad (61)$$

$$\bar{G}_{12} = \frac{1}{h\alpha_{66}} = \frac{A_{66}}{h} \quad (62)$$

$$\bar{\nu}_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \quad (63)$$

Este processo é baseado na comparação da rigidez de membrana do laminado (**A**) com a rigidez de membrana de um material ortotrópico equivalente, sendo por isto denominada de Abordagem de Rigidez (AR) para determinação das propriedades elásticas equivalentes.

É importante ressaltar que como o fenômeno de flambagem local está associado à flexão da placa, o módulo à flexão das paredes será utilizado ( $\bar{E}_1$  flexional).

As propriedades equivalentes apresentadas acima são válidas somente para cargas no plano e não devem ser usadas para prever a resposta à flexão (BARBERO, 2011). No entanto, estas propriedades também podem ser obtidas a partir dos termos de rigidez à flexão. Para um laminado simétrico, especialmente ortotrópico, a matriz **D** de rigidez à flexão é dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{\nu_{12}E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{12}h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Segundo Jones (1999), a relação de Poisson menor é determinada através de:

$$v_{21} = \frac{E_2}{E_1} v_{12} \quad (65)$$

Sendo assim, com base na igualdade apresentada na Equação (64) e em algumas operações matemáticas envolvendo substituições, determina-se  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{G}_{12}$ ,  $\bar{v}_{12}$  e  $\bar{v}_{21}$ , respectivamente:

$$\bar{E}_1 = \frac{12(D_{11}D_{22} - D_{12}^2)}{h^3 D_{22}} \quad (66)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{12(D_{11}D_{22} - D_{12}^2)}{h^3 D_{11}} \quad (67)$$

$$\bar{G}_{12} = \frac{12D_{66}}{h^3} \quad (68)$$

$$\bar{v}_{12} = \frac{D_{12}}{D_{22}} \quad (69)$$

$$\bar{v}_{21} = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad (70)$$

É possível observar que as propriedades elásticas equivalentes mostradas acima negligenciam os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$ . Como discutido na Seção 2.4, para laminados *cross-ply* estes termos são nulos, mas isto não ocorre em laminados *angle-ply*. Assim sendo, as expressões apresentadas não proporcionam resultados satisfatórios para estes laminados, principalmente quando forem compostos por poucas lâminas, visto que o aumento destas para a mesma espessura total do laminado tende a diminuir a influência dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$ .

Outra abordagem que pode ser utilizada consiste em obter as propriedades elásticas equivalentes a partir da inversa da matriz  $\mathbf{D}$  de rigidez a flexão (Abordagem de Flexibilidade – AF), escrita como:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{h^3 E_1} & -\frac{12\nu_{12}}{h^3 E_1} & 0 \\ -\frac{12\nu_{12}}{h^3 E_1} & \frac{12}{h^3 E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{h^3 G_{12}} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Dessa forma, a partir da igualdade apresentada acima e de algumas operações matemáticas envolvendo substituições, tem-se:

$$\bar{E}_1 = \frac{12}{h^3 \delta_{11}} \quad (72)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{12}{h^3 \delta_{22}} \quad (73)$$

$$\bar{G}_{12} = \frac{12}{h^3 \delta_{66}} \quad (74)$$

$$\bar{\nu}_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \quad (75)$$

$$\bar{\nu}_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \quad (76)$$

Nota-se que, ao inverter a matriz  $\mathbf{D}$ , os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  serão considerados indiretamente nas relações descritas acima, portanto, essa abordagem tende a apresentar resultados melhores para laminados *angle-ply* que a abordagem anterior baseada em rigidez. Estas propriedades podem ser obtidas a partir da matriz  $\mathbf{A}$  para laminados *angle-ply*, de forma análoga ao apresentado, considerando os termos  $\alpha_{16}$  e  $\alpha_{26}$  na Equação (58).

Por fim, é interessante ressaltar que as relações apresentadas consideram a simetria do laminado. Para laminados antissimétricos os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são desprezados, porém a matriz  $\mathbf{B}$  não é nula e, de acordo com Barbero (2011), o comportamento destes laminados é bastante complexo.

### 3.2 Teoria de Vigas Laminadas de Massa e Barbero

No cálculo da rigidez da seção transversal de vigas e colunas laminadas não é possível separar as propriedades elásticas das propriedades geométricas, dessa forma, torna-se necessário trabalhar com propriedades equivalentes que incorporam as informações referentes à geometria e ao material, o que por sua vez dificulta a determinação da relação constitutiva destes elementos estruturais.

Diversas metodologias foram desenvolvidas no decorrer dos anos e inúmeros trabalhos acerca do tema podem ser encontrados na literatura, a saber, Bank e Bednarczyk (1988), Bank (1990), Anido, Davalos, Barbero (1995), Massa e Barbero (1998), Kollár e Pluzsik (2002), dentre outros. A grande maioria analisa vigas laminadas de parede fina com seções abertas e fechadas, considerando, muitas vezes, a influência da deformação de cisalhamento e do empenamento.

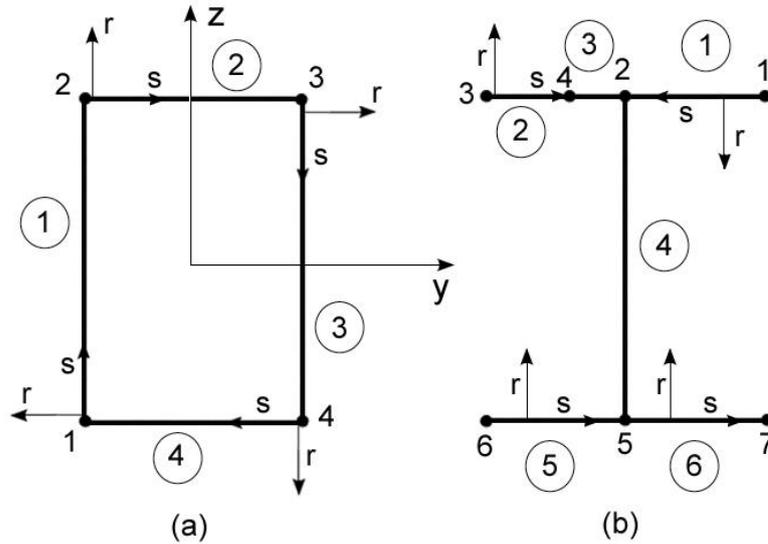
A teoria de vigas laminadas de Massa e Barbero (1998) possibilita a análise de vigas laminadas de parede finas como vigas de materiais homogêneos e isotrópicos. As propriedades equivalentes das seções transversais são obtidas com base na Resistência dos Materiais. De acordo com os autores mencionados, as equações desenvolvidas na teoria são simples e podem ser utilizadas no projeto de seções abertas ou fechadas de forma arbitrária, apresentando bons resultados para laminados simétricos e balanceados. Em decorrência da sua simplicidade e eficiência, esta teoria pode ser utilizada na determinação das propriedades equivalentes ( $\overline{EA}$ ,  $\overline{EI}_y$ ,  $\overline{EI}_z$ ,  $\overline{EI}_{yz}$  e  $\overline{GJ}$ ) de colunas laminadas na análise referente à flambagem global.

A metodologia da teoria proposta por Massa e Barbero (1998) será apresentada na presente seção, incluindo os conceitos básicos com ênfase para o cálculo das propriedades equivalentes. Além disso, será mostrada e discutida uma modificação referente a esta metodologia, proposta por Mororó *et al.* (2010), denominada Processo Acoplado.

#### 3.2.1 Seção transversal

A seção transversal, ilustrada na Figura 16, é descrita pelo contorno da superfície média de um ou mais segmentos que podem ser planos ou curvos na forma de um arco de círculo (MASSA & BARBERO, 1998). De acordo com os autores, a definição de cada segmento é feita em termos dos nós, que podem ser numerados arbitrariamente.

Figura 16 – Sistema de coordenadas local, numeração de nó e segmento para (a) seção fechada e (b) seção aberta



Fonte: Adaptado de Massa e Barbero (1998).

As coordenadas de cada nó são dadas em termos de um sistema de coordenadas global arbitrário  $x, y, z$  e, como pode ser visto na Figura 16, cada segmento tem seu próprio sistema de coordenadas local. A coordenada de contorno local  $s$  é orientada do nó inicial para o nó final, enquanto que as outras duas coordenadas locais são o eixo  $x$ , paralelo ao eixo global  $x$ , e o eixo  $r$  que é determinado pelo produto vetorial  $r = x \times s$ . É importante ressaltar que a numeração apresentada nos círculos corresponde à numeração dos segmentos, já os demais números referem-se aos nós.

Segundo Barbero (2011), todas as propriedades mecânicas são definidas por integrais sobre a área da seção transversal, que são divididas em integrais sobre o contorno e sobre a espessura de cada segmento. Para Massa e Barbero (1998), as integrais de contorno são calculadas segmento por segmento, acumulando a contribuição de cada um. Os autores ressaltam ainda que a ordem em que os segmentos são definidos, bem como a orientação das coordenadas locais  $s$  em cada segmento, devem permitir o acúmulo correto das integrais de contorno.

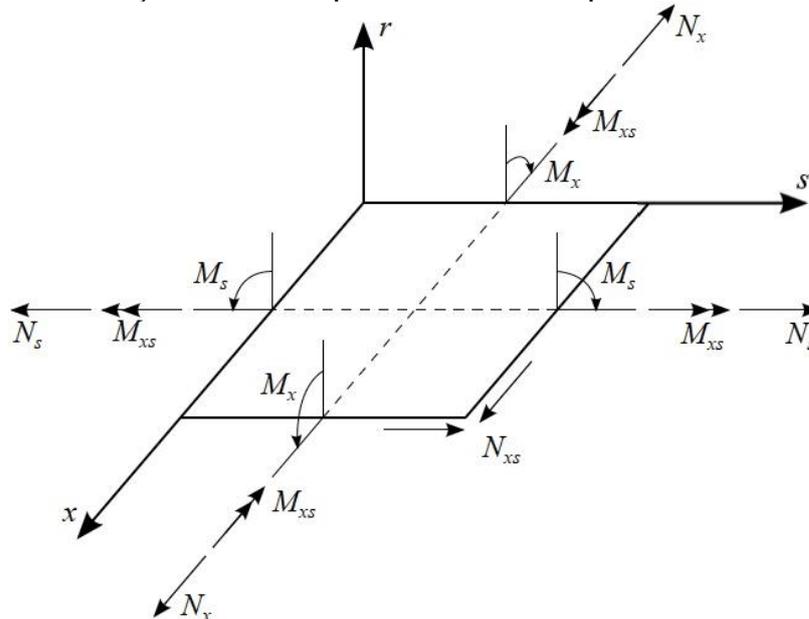
### 3.2.2 Rigidez reduzida

De acordo com Massa e Barbero (1998), cada segmento  $i$  da seção transversal é modelado como uma placa fina a partir das equações constitutivas de uma placa laminada, apresentadas na Equação (31), substituindo a direção  $y$  por  $s$ . Dessa forma, negligenciando a deformação de cisalhamento transversal e invertendo a Equação (31), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_s^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_x^i \\ \kappa_s^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^i \\ N_s^i \\ N_{xs}^i \\ M_x^i \\ M_s^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (77)$$

onde  $N_x^i$  e  $N_s^i$  são forças normais,  $N_{xs}^i$  é a força de cisalhamento no plano  $xs$ ,  $M_x^i$  e  $M_s^i$  são os momentos fletores e  $M_{xs}^i$  é o momento torsor, ilustrados na Figura 17. Barbero (2011) ressalta que o índice  $i$  é utilizado não só para indicar o número do segmento, mas também para diferenciar as grandezas de placa.

Figura 17 – Esforços resultantes por unidade de comprimento em um laminado



Fonte: Mororó (2013).

Considerando a hipótese que  $N_s^i = 0$  e  $M_s^i = 0$ , válida para vigas de parede fina, e assumindo o desacoplamento entre as deformações de membrana e de cisalhamento ( $\alpha_{16} = 0$ ,  $\beta_{16} = 0$ ,  $\beta_{61} = 0$  e  $\delta = 0$ ), a Equação (77) pode ser reduzida para:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{11} & \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{66} & \beta_{66} \\ 0 & 0 & \beta_{66} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (78)$$

Finalmente, a matriz de rigidez reduzida pode ser determinada invertendo a Equação (78):

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^i & B_x^i & 0 & 0 \\ B_x^i & D_x^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{xs}^i & C_{xs}^i \\ 0 & 0 & C_{xs}^i & H_{xs}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (79)$$

A metodologia proposta por Massa e Barbero (1998), como mostrado, assume o desacoplamento entre as deformações de membrana e de cisalhamento (Processo Desacoplado). No entanto, este desacoplamento só ocorre para laminados *cross-ply* e para laminados *angle-ply* com grande número de camadas.

Mororó *et al.* (2010) propuseram uma segunda abordagem, definida como Processo Acoplado (PA), na qual os termos de acoplamento são considerados na Equação (77), sendo desprezados somente após a inversão desta, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{16} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{B}_{61} & \bar{D}_{16} \\ \bar{A}_{16} & \bar{B}_{61} & \bar{A}_{66} & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{16} & \bar{D}_{16} & \bar{B}_{66} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (80)$$

Dessa forma, em seguida, desprezando o acoplamento entre os efeitos normais e de cisalhamento ( $\bar{A}_{16} = \bar{B}_{16} = \bar{B}_{61} = \bar{D}_{16}$ ), a Equação (80) pode ser reescrita:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x,PA}^i & B_{x,PA}^i & 0 & 0 \\ B_{x,PA}^i & D_{x,PA}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{xs,PA}^i & C_{xs,PA}^i \\ 0 & 0 & C_{xs,PA}^i & H_{xs,PA}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (81)$$

É possível observar que a Equação (81) possui a mesma forma da Equação (79), obtida de acordo com a metodologia de Massa e Barbero (1998), no entanto, a Equação (81)

inclui de forma indireta os efeitos do acoplamento normal-cisalhamento quando existentes, uma vez que antes da inversão todos os termos foram considerados.

Mororó *et al.* (2010) realizaram um estudo comparativo entre as duas abordagens através de simulações numéricas utilizando elementos finitos de cascas e verificaram que o Processo Acoplado é mais preciso que o Processo Desacoplado, no caso de laminados *angle-ply* com pequeno número de lâminas. Nos demais casos, ambos levam aos mesmos resultados.

### 3.2.3 Eixo neutro de flexão do segmento

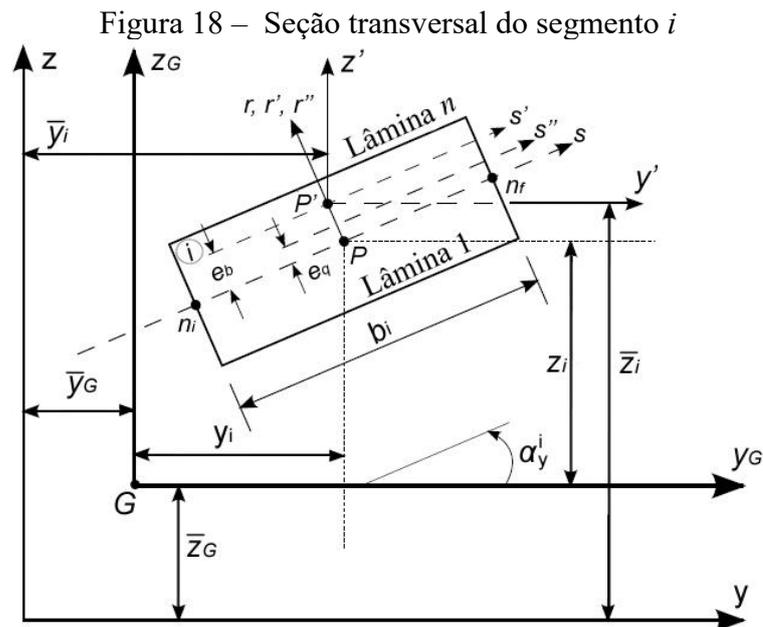
Com o objetivo de estudar o significado físico do termo  $B_i$ , Massa e Barbero (1998) propuseram um estado de deformação  $\varepsilon_x \neq 0$  com todas as outras deformações e curvaturas nulas. Sendo assim, as duas primeiras relações da Equação (81) são reduzidas a:

$$N_x^i = A_{x,PA}^i \varepsilon_x^i \quad \text{e} \quad M_x^i = B_{x,PA}^i \varepsilon_x^i \quad (82)$$

Igualando as relações acima em função de  $\varepsilon_x^i$ , tem-se:

$$M_x^i = \frac{B_{x,PA}^i}{A_{x,PA}^i} N_x^i = e_b N_x^i \quad (83)$$

onde  $e_b$  indica a localização da superfície neutra de flexão do segmento  $i$  (Figura 18).



Fonte: Adaptado de Massa e Barbero (1998).

O eixo neutro de flexão é descrito por:

$$y(s') = y(s) - e_b \operatorname{sen} \alpha_y^i \quad \text{e} \quad z(s') = z(s) - e_b \operatorname{sen} \alpha_y^i \quad (84)$$

onde  $\alpha_y^i$  é o ângulo do segmento em relação ao eixo  $y$ .

A rigidez à flexão do segmento é calculada em relação ao do eixo neutro de curvatura  $s'$  (MASSA & BARBERO, 1998). Segundo os autores mencionados, assumindo que  $N_x^i = 0$  e substituindo a primeira relação da Equação (81) na segunda relação da mesma equação, determina-se a relação momento-curvatura:

$$M_x^i = \left( D_{x,PA}^i - \frac{(B_{x,PA}^i)^2}{A_{x,PA}^i} \right) \kappa_x^i \quad (85)$$

As duas primeiras relações da Equação (81) tornam-se desacopladas quando  $N_x^i$ ,  $M_x^i$ ,  $\varepsilon_x^i$  e  $\kappa_x^i$  são definidas com relação ao eixo neutro de flexão (BARBERO, 2011):

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x,PA}^i & 0 \\ 0 & \bar{D}_{x,PA}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \kappa_x^i \end{Bmatrix} \quad (86)$$

onde:

$$\bar{D}_{x,PA}^i = D_{x,PA}^i - \frac{(B_{x,PA}^i)^2}{A_{x,PA}^i} = D_{x,PA}^i - e_b^2 A_{x,PA}^i \quad (87)$$

### 3.2.4 Eixo neutro de torção do segmento

Com o objetivo de estudar o significado físico do termo  $C_i$ , Massa e Barbero (1998) assumem um estado de deformação  $\gamma_{xs}^i \neq 0$ , no qual todas as outras deformações e curvaturas são desprezadas. Sendo assim, as duas últimas relações da Equação (81) são reduzidas a:

$$N_{xs}^i = F_{xs,PA}^i \gamma_{xs}^i \quad \text{e} \quad M_{xs}^i = C_{xs,PA}^i \gamma_{xs}^i \quad (88)$$

Igualando as relações apresentadas na Equação (88) em função de  $\gamma_{xs}^i$ , tem-se:

$$M_{xs}^i = \frac{C_{xs,PA}^i}{F_{xs,PA}^i} N_{xs}^i = e_q N_{xs}^i \quad (89)$$

onde  $e_q$  indica a localização do eixo neutro de torção  $s''$  segmento  $i$  (Figura 18). Assim, o eixo neutro de torção é descrito por:

$$y(s'') = y(s) - e_q \operatorname{sen} \alpha_y^i \quad \text{e} \quad z(s'') = z(s) - e_q \operatorname{sen} \alpha_y^i \quad (90)$$

As duas últimas relações da Equação (81) tornam-se desacoplados quando  $N_{xs}^i$ ,  $M_{xs}^i$ ,  $\gamma_{xs}^i$  e  $\kappa_{xs}^i$  são definidas em relação ao do eixo neutro de curvatura  $s''$ , por conseguinte, de forma análoga ao que foi mostrado anteriormente para o eixo neutro de flexão do segmento, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xs,PA}^i & 0 \\ 0 & \overline{H}_{xs,PA}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (91)$$

onde:

$$\overline{H}_{xs,PA}^i = H_{xs,PA}^i - \frac{(C_{xs,PA}^i)^2}{F_{xs,PA}^i} = H_{xs,PA}^i - e_q^2 F_{xs,PA}^i \quad (92)$$

### 3.2.5 Rigidez axial

Na obtenção da rigidez axial ( $\overline{EA}$ ), Massa e Barbero (1998) consideram que um estado constante de deformação ( $\varepsilon_x^i = \varepsilon_x$ ) é aplicado e que todas as outras deformações e curvaturas são nulas. Dessa forma, a força axial resultante na seção transversal é dada por:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \int_s \int_h \sigma_x dr ds = \int_s N_x(s') ds \quad (93)$$

A integral na espessura determina  $N_x$ , aplicada no eixo neutro de flexão, visto que não há curvatura de flexão. Neste contexto, utilizando a Equação (86) pode-se reescrever a força axial resultante:

$$N_x = \int_s A_{x,PA}^i \varepsilon_x^i ds = \varepsilon_x \int_s A_{x,PA}^i ds = \overline{EA} \varepsilon_x \quad (94)$$

onde  $\overline{EA}$  representa a rigidez axial da seção transversal e  $\int_s$  indica uma integração ao longo do contorno que descreve a seção transversal. Esta integral reduz-se ao somatório da contribuição de todos os segmentos da seção transversal. Portanto, tem-se que:

$$\overline{EA} = \sum_{i=1}^N A_{x,PA}^i b_i \quad (95)$$

sendo  $N$  é o número de segmentos da seção transversal e  $b_i$  a largura da lâmina.

### 3.2.6 Centróide mecânico

Segundo Barbero (2011), o centróide mecânico da seção transversal, ponto  $G$  ilustrado na Figura 18, pode ser definido como o ponto de aplicação da força axial  $N_x$ , resultante das tensões axiais causadas pelo estado constante de deformação  $\varepsilon_x$ . Dessa forma, pode ser determinado através do equilíbrio de momento da força axial  $N_x$  em relação aos eixos  $y$  e  $z$ :

$$M_z = N_x \bar{y}_G = \int_A y(s') \sigma_x dA = \int_s \int_h y(s') \sigma_x dr ds = \int_s y(s') N_x^i(s') ds = \varepsilon_x \overline{EA} \bar{y}_G \quad (96)$$

e

$$M_y = N_x \bar{z}_G = \int_A z(s') \sigma_x dA = \int_s \int_h z(s') \sigma_x dr ds = \int_s z(s') N_x^i(s') ds = \varepsilon_x \overline{EA} \bar{z}_G \quad (97)$$

Em seguida, substituindo a primeira relação da Equação (86) nas expressões acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{EA} \bar{y}_G &= \int_s y(s') A_{x,PA}^i ds \\ \overline{EA} \bar{z}_G &= \int_s z(s') A_{x,PA}^i ds \end{aligned} \quad (98)$$

Dessa forma, é possível determinar as coordenadas do centróide mecânico, dadas por:

$$\bar{y}_G = \frac{\overline{EQ}_z}{\overline{EA}} \quad (99)$$

e

$$\bar{z}_G = \frac{\overline{EQ}_y}{EA} \quad (100)$$

sendo  $\overline{EQ}_z$  e  $\overline{EQ}_y$  os momentos estáticos mecânicos que são definidos como:

$$\begin{aligned} \overline{EQ}_z &= \int_s y(s') A_{x,PA}^i ds = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i A_{x,PA}^i b_i \\ \overline{EQ}_y &= \int_s z(s') A_{x,PA}^i ds = \sum_{i=1}^N \bar{z}_i A_{x,PA}^i b_i \end{aligned} \quad (101)$$

em que  $\bar{y}_i$  e  $\bar{z}_i$  são as coordenadas do ponto  $P'$ , ilustrado na Figura 18, onde  $s = b_i/2$ .

### 3.2.7 Rigidez à flexão

Massa e Barbero (1998) afirmam que para determinar a rigidez à flexão ( $\overline{EI}$ ) da seção transversal, o produto do módulo de elasticidade  $E$  com os momentos de inércia  $I_z$ ,  $I_y$  e com o produto de inércia  $I_{yz}$  da teoria clássica de vigas são substituídos pelas propriedades mecânicas de cada segmento, definidas por:

$$\begin{aligned} \overline{EI}_{s'}^i &= \bar{D}_{i,PA} b_i \\ \overline{EI}_{r'}^i &= A_{x,PA}^i \frac{b_i^3}{12} \\ \overline{EI}_{r's'}^i &= 0 \end{aligned} \quad (102)$$

Os autores ressaltaram ainda que o produto de inércia mecânica ( $\overline{EI}_{r's'}^i$ ) é nulo, pois  $s' r'$  são os eixos principais de flexão do segmento (Figura 18).

As propriedades mecânicas de cada segmento para os eixos  $y' z'$  são determinadas a partir da rotação  $-\alpha_y^i$  dos eixos  $sr$  em torno do eixo  $x$ , tal como ilustrado na Figura 18. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{EI}_{y'}^i &= \overline{EI}_{s'}^i \cos^2 \alpha_y^i + \overline{EI}_{r'}^i \sin^2 \alpha_y^i \\ \overline{EI}_{z'}^i &= \overline{EI}_{s'}^i \sin^2 \alpha_y^i + \overline{EI}_{r'}^i \cos^2 \alpha_y^i \\ \overline{EI}_{y'z'}^i &= \left( \overline{EI}_{r'}^i - \overline{EI}_{s'}^i \right) \sin \alpha_y^i \cos \alpha_y^i \end{aligned} \quad (103)$$

Para a obtenção das rigidezes à flexão em relação aos eixos  $y_G$  e  $z_G$ , paralelos ao

sistema global  $yz$  e com origem no centro mecânico de gravidade, Massa e Barbero (1998) utilizaram o Teorema Eixos Paralelos na transformação das propriedades definidas nos eixos  $y'z'$  e acrescentaram as contribuições referentes a todos os segmentos. Assim sendo, estas rigidezes são dadas por:

$$\begin{aligned}\overline{EI}_{yG} &= \sum_{i=1}^N \left[ \overline{EI}_{y'}^i + A_{x,PA}^i b_i \left( z_i + e_b \cos \alpha_y^i \right)^2 \right] \\ \overline{EI}_{zG} &= \sum_{i=1}^N \left[ \overline{EI}_{z'}^i + A_{x,PA}^i b_i \left( y_i + e_b \sin \alpha_y^i \right)^2 \right] \\ \overline{EI}_{yGzG} &= \sum_{i=1}^N \left[ \overline{EI}_{y'z'}^i + A_{x,PA}^i b_i \left( z_i + e_b \cos \alpha_y^i \right) \left( y_i + e_b \sin \alpha_y^i \right) \right]\end{aligned}\quad (104)$$

onde  $(z_i + e_b \cos \alpha_y^i)$  e  $(y_i + e_b \sin \alpha_y^i)$  são as coordenadas do centro do segmento (Ponto  $P'$  na Figura 18) ao longo do eixo  $s'$ , enquanto  $y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas do centro do segmento  $i$  (Ponto  $P$  na Figura 18) sobre o eixo  $s$  em relação ao sistema de coordenadas globais  $yGzG$ .

O ângulo  $\vartheta$  que representa a rotação entre os eixos principais de inercia  $\eta$  e  $\xi$  em relação aos eixos  $yG$  e  $zG$  é determinado impondo a condição  $\overline{EI}_{\eta\xi} = 0$ . Deste modo, tem-se:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2\overline{EI}_{yGzG}}{\overline{EI}_{zG} - \overline{EI}_{yG}} \quad (105)$$

Por fim, segundo Massa e Barbero (1998), as rigidezes máxima e mínima à flexão em relação aos eixos principais de flexão são definidas como:

$$\begin{aligned}\overline{EI}_{\eta} &= \frac{\overline{EI}_{yG} + \overline{EI}_{zG}}{2} + \sqrt{\left( \frac{\overline{EI}_{yG} - \overline{EI}_{zG}}{2} \right)^2 + \overline{EI}_{yGzG}} \\ \overline{EI}_{\xi} &= \frac{\overline{EI}_{yG} + \overline{EI}_{zG}}{2} - \sqrt{\left( \frac{\overline{EI}_{yG} - \overline{EI}_{zG}}{2} \right)^2 + \overline{EI}_{yGzG}}\end{aligned}\quad (106)$$

### 3.3 Flambagem Global

A flambagem global é um termo genérico usado pelos engenheiros e, normalmente compreende modos de flambagem em que comprimento de meia onda é da mesma ordem de grandeza que o comprimento do elemento comprimido e para o qual a seção permanece sem distorções (CARDOSO, 2014).

A flambagem global de vigas e colunas de material compósito tem sido abordada em vários trabalhos, tais como, Mottram (1992), Barbero e Tomblin (1993), Kollár (2001), Qiao, Zou e Davalos (2003), dentre outros.

A instabilidade global em colunas comumente ocorre de três formas – flexão, torção e flexo-torção – que estão associadas ao comportamento da barra.

A instabilidade global por torção e por flexo-torção normalmente ocorre em colunas de paredes finas com seção transversal aberta, com baixa rigidez a torção. No presente trabalho será abordada somente a instabilidade global por flexão, visto que para os perfis analisados este fenômeno será preponderante.

### 3.3.1 Instabilidade global por flexão

Segundo Correia (2012), a instabilidade global por flexão é caracterizada pela flexão do elemento estrutural em torno do eixo de menor inércia, no caso de existir pelo menos um eixo de simetria.

A equação de flambagem de Euler, tida referência no estudo de instabilidade global por flexão de colunas elásticas, pode ser escrita como:

$$P_{cr,Euler} = \frac{\pi^2 \overline{EI}}{L^2} \quad (107)$$

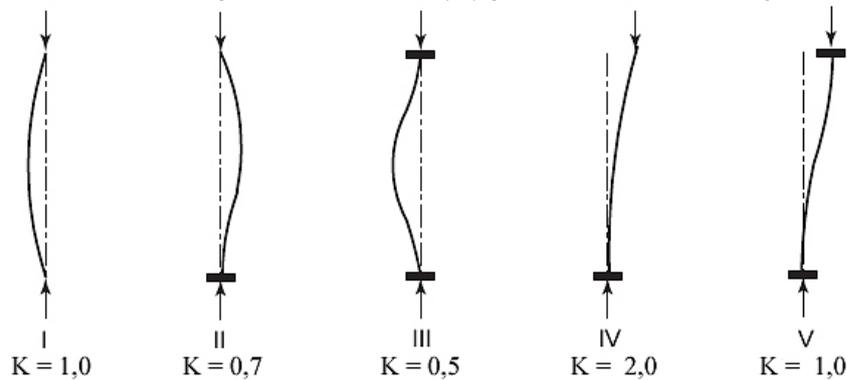
O uso da rigidez equivalente ( $\overline{EI}$ ) nesta expressão permite sua utilização para colunas laminadas.

Esta equação é derivada da equação diferencial que regula o comportamento da coluna biapoiada, perfeitamente reta, carregada através do centroide (GALAMBOS & SUROVEK, 2008). Para analisar o comportamento de colunas com quaisquer condições de contorno, utiliza-se a equação generalizada, dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \overline{EI}}{(KL)^2} \quad (108)$$

onde  $K$  é o fator de comprimento efetivo que depende das condições de contorno da coluna (Figura 19). Este fator é responsável por correlacionar a carga de flambagem com a expressão de Euler para diferentes condições de extremidade.

Figura 19 – Fator de comprimento efetivo ( $K$ ) para diferentes condições de contorno



Fonte: Adaptado de Galambos e Surovek (2008).

De acordo com Barbero e Tomblin (1992), a carga de flambagem de uma coluna biapoiada de material compósito pode ser obtida a partir de:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{L^2} \quad (109)$$

onde, para colunas de paredes finas com algumas lâminas paralelas e perpendiculares ao plano de flexão, a rigidez de flexão da coluna ( $D$ ) pode ser calculada como:

$$D = \left[ D_{11} + \frac{2D_{16}D_{26}D_{12} - D_{66}D_{12}^2 - D_{22}D_{16}^2}{D_{22}D_{66} - D_{26}^2} \right] w \quad (110)$$

sendo  $w$  a largura do flange.

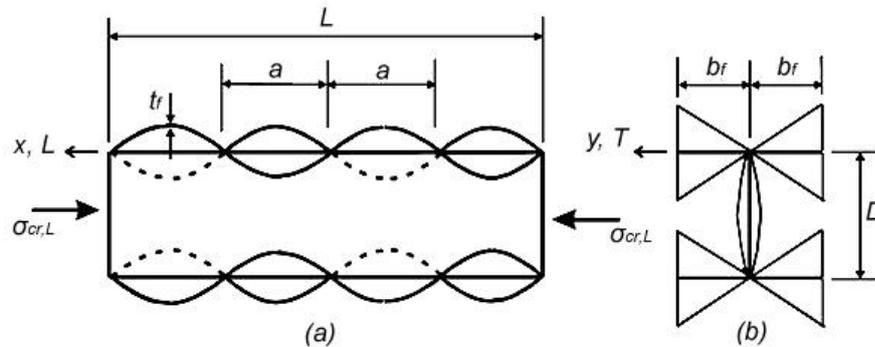
Segundo Cardoso (2014), algumas recomendações e padrões normativos para o desenvolvimento de projeto de estruturas pultrudadas de materiais poliméricos reforçados com fibra (PRF) foram elaborados no decorrer dos anos, dentre eles tem-se a *ASCE Structural Plastics Design Manual* (GRAY, 1984), o *Eurocomp Design Code Handbook* (CLARKE, 1996) e o *Guide for the Design and Construction of Structures made of FRP Pultruded Elements* publicado pelo Conselho Nacional de Pesquisa da Itália ou “*National Research Council of Italy*” (CNR-DT 205/2007, 2008).

### 3.4 Flambagem Local

A flambagem local é caracterizada pela instabilidade dos elementos que compõem a seção dos perfis, ou seja, instabilidade de placas, sem a translação do eixo da peça (junções entre as placas). De acordo com Correia (2012), este fenômeno desenvolve um modo de

instabilidade constituído por várias semiondas de comprimento  $a$  na direção longitudinal, tal como ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Modo de instabilidade local de perfil de seção I: (a) vista longitudinal (b) vista transversal



Fonte: Adaptado de Mottram (2004).

Na determinação analítica da carga de flambagem local de colunas submetidas a compressão centrada, podem ser utilizadas três abordagens distintas (CARDOSO, 2014):

- Análise de flambagem da seção completa considerando as condições de continuidade apropriadas entre as placas adjacentes;
- Análise de flambagem das placas individuais considerando as restrições à rotação devido às placas adjacentes;
- Análise de flambagem das placas individuais sem considerar a interação entre os elementos.

Existem diversos trabalhos que abordam a flambagem local de materiais compósitos e muitas expressões foram elaboradas para obtenção da carga crítica para os mais variados tipos de perfis e condições de contorno.

Segundo Qiao, Davalos e Wang (2001), geralmente as análises de perfis de compósitos de polímeros reforçados com fibras são realizadas a partir de modelagem dos componentes individuais da estrutura, considerando a flexibilidade da ligação entre eles, sendo assim, neste tipo de simulação cada parte da seção transversal é modelada como uma placa e analisada independentemente.

A abordagem mais simples, comumente utilizada, inclusive em alguns manuais normativos, assume condições simplesmente apoiadas (SS) e/ou uma borda livre e outra simplesmente apoiada (LS) para analisar, de forma individual, as placas que compõem a seção. As soluções para placas longas ortotrópicas retangular comprimida nas direções principais sujeitas a estas condições são dadas por Barbero (2011):

$$P_{cr,SS} = \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right] \quad (111)$$

e

$$P_{cr,LS} = \frac{12D_{66}}{b^2 h} \quad (112)$$

onde  $b$  é a largura referente ao flange ou a alma e  $h$  é a espessura da coluna.

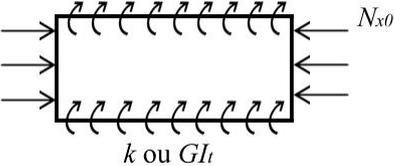
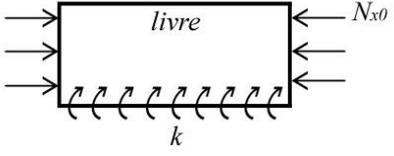
Segundo Kollár (2014), a abordagem descrita acima é considerada uma estimativa conservadora da carga de flambagem local, uma vez que o efeito da restrição à rotação nos bordos longos da placa é negligenciado. Mottram (2004) apresentou em seu trabalho nove equações retiradas de manuais de projeto e periódicos, utilizadas para prever a carga crítica para a instabilidade local, que incluem a rigidez de rotação na ligação entre os elementos do perfil.

Qiao e Shan (2005) propuseram uma formulação explícita para a análise referente a flambagem local de placas de FRP com aplicação para seis perfis pultrudados normalmente utilizados (I, C, T, Z, L, Caixão). Os autores compararam os resultados com os obtidos através de análises utilizando o MEF, e concluíram que a formulação apresentada pode ser aplicada de forma eficaz na análise de flambagem local de placas compósitas com apoio elástico ao longo dos bordos descarregados e pode ainda ser usada na previsão da resistência da flambagem local para seções de materiais compósitos de polímero reforçado por fibra.

Kollár (2002a, 2002b, 2003) desenvolveu expressões explícitas (Tabela 1) para a análise de flambagem local de colunas e vigas de materiais compósitos de polímeros reforçados com fibras, compreendendo seções transversais abertas e fechadas (I, C, Z, L e Caixão).

Na abordagem descrita por Kollár (2003), inicialmente, determinam-se as cargas críticas das placas que compõem a seção transversal considerando a abordagem mais simples, descrita anteriormente, assumindo as condições SS ou LS de acordo com o perfil analisado.

Tabela 1 – Carga de flambagem para placas longas ortotrópicas e simétricas

Condições de contorno	Carga de flambagem $N_{x,cr}$
	$\frac{\pi^2}{L_y^2} \left[ 2\sqrt{1+4,139\xi} \sqrt{D_{11}D_{22}} + (2+0,62\xi^2)(D_{12} + 2D_{66}) \right]$
	$\frac{1}{L_y^2} \sqrt{D_{11}D_{22}} \left\{ K \left[ \eta 15,1\sqrt{1-\nu} + 6(1-\eta)(1-\nu) \right] + \frac{7(1-K)}{\sqrt{1+4,12\xi}} \right\}$ <p style="text-align: center;">quando <math>K \leq 1</math></p> $\frac{1}{L_y^2} \sqrt{D_{11}D_{22}} \left[ \eta 15,1\sqrt{1-\nu} + 6(K-\eta)(1-\nu) \right]$ <p style="text-align: center;">quando <math>K &gt; 1</math></p>

onde:

$\xi = 1/(1+10\zeta)$  para placas com bordas restritas por molas de rotação;

$\xi = 1/(1+0,61\zeta'^{1,2})$  para placas com bordas restritas por enrijecedores de torção;

$\zeta = D_{22}/(kL_y)$

$\zeta' = D_{22}L_y/(GI_t)$

$\nu = D_{12}/(2D_{66} + D_{12})$

$K = (2D_{66} + D_{12})/\sqrt{D_{11}D_{22}}$

$\eta = 1/\sqrt{1+(7,22-3,55\nu)\zeta}$

em que  $L_y$  é a largura da placa.

Fonte: Adaptado de Kollár (2003).

Para o Perfil I, se a alma for simplesmente apoiada em ambas as arestas e os flanges forem simplesmente apoiadas ao longo de uma borda e livres na outra extremidade, determina-se as cargas críticas do flange ( $N_{cr,f}$ ) e da alma ( $N_{cr,w}$ ) a partir das Equações (111) e (112), respectivamente.

Se  $(N_{cr,f})(\alpha_{11})_f < (N_{cr,w})(\alpha_{11})_w$ , a alma irá restringir o flange e o efeito da restrição será equivalente ao de molas de rotação. Dessa forma, calcula-se a carga crítica de flambagem a partir da expressão apresentada na segunda linha da Tabela 1, na qual a constante de mola ( $k$ ) é dada por (KOLLÁR, 2003):

$$k = \frac{1}{2} \frac{c D_{22}}{b_w} \left( 1 - \frac{N_{cr,f}(\alpha_{11})_f}{N_{cr,w}(\alpha_{11})_w} \right) \quad (113)$$

onde  $c = 2$  e  $b_w$  a largura da alma. É interessante ressaltar que  $(\alpha_{11})_f = (\alpha_{11})_w$  quando os flanges e a alma têm a mesma espessura e o mesmo *layup*.

Se  $(N_{cr,f})(\alpha_{11})_f > (N_{cr,w})(\alpha_{11})_w$ , o flange irá restringir a alma e o efeito da restrição será equivalente ao de enrijecedores de torção. Sendo assim, determina-se a carga crítica de flambagem a partir da expressão apresentada na primeira linha da Tabela 1, na qual a rigidez de torção ( $GI_t$ ) é dada por (KOLLÁR, 2003):

$$GI_t = 4D_{66}b_f \left( 1 - \frac{N_{cr,w}(\alpha_{11})_w}{N_{cr,f}(\alpha_{11})_f} \right) \quad (114)$$

onde  $b_f$  é a largura do flange.

O autor descreve em seu trabalho o efeito da restrição para diversas seções (I, C, Z, L e Caixão). Para os perfis C e Z, são aplicadas as mesmas expressões desenvolvidas para o perfil I, contudo, na Equação (113) o fator 1/2 é desconsiderado, pois a alma restringe apenas um flange. É interessante ressaltar também que para o perfil I considera-se  $b_f/2$  em todas as expressões.

De acordo com Cardoso (2014), as equações apresentadas por Kollár (2003) e Qiao e Shan (2005), apesar de eficientes, necessitam de cálculos independentes para cada uma das placas da seção transversal e a determinação dos parâmetros específicos da seção, tais como os coeficientes de restrição elástica, tende a aumentar consideravelmente o esforço de cálculo. Assim, Cardoso (2014) desenvolveu equações de forma fechada para determinar a tensão crítica de flambagem local para seções pultrudadas típicas (I, C, L e Caixão) de polímeros reforçados com fibra de vidro (*glass-fiber reinforced polymer* – GFRP), constituídas de paredes finas, ortotrópicas e sujeitas à compressão concêntrica.

Para determinação das equações de forma fechada, Cardoso (2014) utilizou o Método do Quociente de Rayleigh. Segundo o autor supracitado, neste método, a energia de deformação de flexão ( $U$ ) e o trabalho produzido pela carga de compressão ( $T$ ), são calculados assumindo uma deflexão aproximada ( $w$ ) e a carga crítica por unidade de largura ( $N_{cr,l}$ ) é obtida a partir da condição de equilíbrio neutro ( $U=T$ ):

$$N_{cr,l} = \frac{\sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \left[ D_{11,i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right)^2 + D_{22,i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} \right)^2 + 2D_{12,i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} + 4D_{66,i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2 \partial y_i^2} \right)^2 \right] dx dy}{\sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx dy} \quad (115)$$

onde  $i$  é um índice referente a cada uma das  $n$  placas constituintes e  $S$  é a área da superfície da

placa.

Cardoso (2014) adotou funções senoidais duplas e polinomiais-senoidais tanto no que se refere às condições finais como à compatibilidade da rotação entre os elementos da placa. Dessa forma, no geral, para cada placa constituinte, as funções assumem a forma:

$$w(x, y) = f(y) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{l} \right) \quad (116)$$

em que  $f(y)$  é um polinômio ou uma função senoidal e  $l$  é o comprimento da meia onda.

Tabela 2 – Funções  $f(y)$  adotadas por Cardoso (2014)

Seção transversal	$f(y)$
I ou C	$f_w(y) = \left( \frac{\alpha b_w}{\pi} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b_w} \right)$ $f_f(y) = \alpha y$

onde:  
 $\eta = b_f / b_w$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 2 apresenta as funções aproximadas  $f(y)$ , adotadas por Cardoso (2014), para almas ( $w$ ) e flanges ( $f$ ) de cada seção transversal. É interessante ressaltar que as placas constituintes são consideradas apoiadas nos bordos carregados ou suficientemente longas para desenvolver múltiplas meia-ondas sem interferência das condições de contorno.

A partir destas funções aproximadas obtém-se a energia de deformação de flexão ( $U$ ) e o trabalho produzido pela carga de compressão ( $T$ ) para cada seção transversal. Portanto, a partir da Equação (115), determina-se a carga crítica por unidade de largura,  $N_{cr,l}$ , e em seguida, pode-se determinar  $P_{cr,local}$  dividindo  $N_{cr,l}$  pela espessura da placa ( $t$ ) (CARDOSO, 2014):

$$P_{cr,local} = k \frac{\pi^2 \bar{E}_1}{12(1 - \bar{\nu}_{12} \bar{\nu}_{21})} \left( \frac{t}{b_w} \right)^2 \quad (117)$$

em que  $k$  é o coeficiente de flambagem específico obtido para cada seção (Tabela 3).

Tabela 3 – Coeficientes de flambagem referente a cada seção (CARDOSO, 2014).

Seção transversal	$K$
I	$k = \left(\frac{b_w}{l}\right)^2 + \frac{\frac{\bar{E}_2}{E_1} \left(\frac{l}{b_w}\right)^2 + \left[ 2\bar{\nu}_{12} \frac{\bar{E}_2}{E_1} + 4(1+4\eta)(1-\bar{\nu}_{12}\bar{\nu}_{21}) \frac{\bar{G}_{12}}{E_1} \right]}{(1+\pi^2\eta^3/3)}$
C	$k = \left(\frac{b_w}{l}\right)^2 + \frac{\frac{\bar{E}_2}{E_1} \left(\frac{l}{b_w}\right)^2 + \left[ 2\bar{\nu}_{12} \frac{\bar{E}_2}{E_1} + 4(1+4\eta)(1-\bar{\nu}_{12}\bar{\nu}_{21}) \frac{\bar{G}_{12}}{E_1} \right]}{(1+4\pi^2\eta^3/3)}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Equação (117) deve-se adotar um coeficiente crítico de flambagem ( $k_{cr}$ ) associado ao comprimento crítico de meia onda que é determinado minimizando  $k$  em relação a  $l$ . Assim sendo, a Tabela 4 apresenta os coeficientes críticos de flambagem para cada seção.

Tabela 4 – Coeficientes críticos de flambagem referente a cada seção (CARDOSO, 2014).

Seção transversal	$k_{cr}$
I	$k_{cr} = \frac{2}{\sqrt{1+\pi^2\eta^3/3}} \sqrt{\frac{\bar{E}_2}{E_1}} + \frac{2\bar{\nu}_{12} \frac{\bar{E}_2}{E_1} + 4(1+4\eta)(1-\bar{\nu}_{12}\bar{\nu}_{21}) \frac{\bar{G}_{12}}{E_1}}{(1+\pi^2\eta^3/3)}$
C	$k_{cr} = \frac{2}{\sqrt{1+4\pi^2\eta^3/3}} \sqrt{\frac{\bar{E}_2}{E_1}} + \frac{2\bar{\nu}_{12} \frac{\bar{E}_2}{E_1} + 4(1+4\eta)(1-\bar{\nu}_{12}\bar{\nu}_{21}) \frac{\bar{G}_{12}}{E_1}}{(1+4\pi^2\eta^3/3)}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Cardoso (2014) comparou os resultados obtidos para colunas de polímeros reforçados com fibra de vidro pultrudadas utilizando as equações de forma fechada descritas anteriormente com os resultados obtidos a partir de análises utilizando o Método das Faixas Finitas (MFF) e concluiu que estes apresentaram excelente concordância, mostrando-se satisfatórios.

Na presente dissertação, para análises referentes à flambagem local de colunas pultrudadas e laminadas sujeitas à compressão, serão aplicadas as equações para placas individuais considerando as restrições elásticas propostas por Kollár (2003), assim como as equações de forma fechada desenvolvidas por Cardoso (2014). Os resultados serão verificados e discutidos com base em simulações numéricas utilizando o MEF.

### 3.5 Interação entre a Flambagem Global e Local

A interação entre os modos de flambagem global e local está associada à esbeltez do elemento estrutural e possui grande influência no comportamento pós-crítico. Esta interação torna o elemento mais sensível às imperfeições geométricas iniciais, podendo causar uma redução significativa da carga crítica em colunas de comprimento intermediário. Dessa forma, pode-se dizer que há uma redução na capacidade da coluna na região de transição entre a flambagem local e global (VANEVENHOVEN, SHIELD & BANK, 2010).

A relação de esbeltez ( $\lambda$ ) comumente usada pode ser definida como:

$$\lambda = \sqrt{\frac{P_{cr,local}}{P_{cr,Euler}}} \quad (118)$$

onde  $P_{cr,local}$  é a carga crítica de flambagem local e  $P_{cr,Euler}$  é a carga de Euler para flambagem global obtida a partir da Equação (108).

Barbero e Tomblin (1994) propuseram uma equação de projeto para determinar a carga de flambagem considerando a interação entre a flambagem local e global:

$$P_{cr} = k_i P_{cr,local} \quad (119)$$

sendo  $k_i$  o fator de interação dado por:

$$k_i = k_\lambda - \sqrt{k_\lambda^2 - \frac{1}{c\lambda^2}} \quad (120)$$

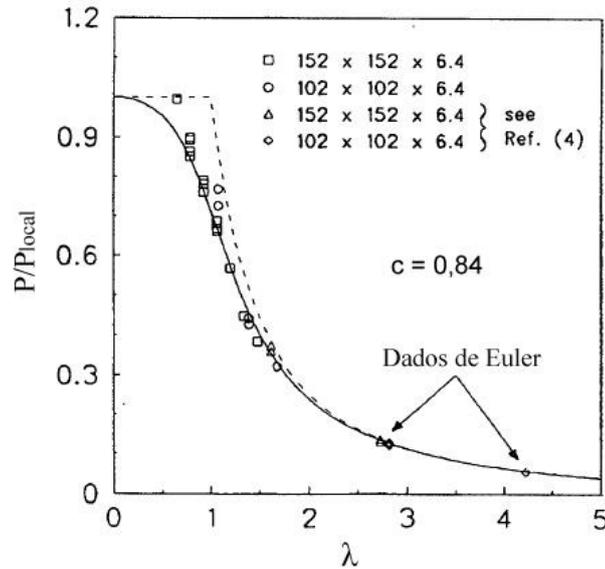
e

$$k_\lambda = \frac{1+1/\lambda^2}{2c} \quad (121)$$

em que  $c$  é o parâmetro de ajuste de curva.

O parâmetro  $c$  é utilizado para calibrar a equação de interação com base em resultados obtidos experimentalmente para seções I com abas largas. Barbero e Tomblin (1994) utilizaram o parâmetro de ajuste  $c = 0,84$  e obtiveram uma boa correlação com os dados experimentais apresentados na pesquisa para vigas pultrudadas de perfil I (Figura 21).

Figura 21 – Curvas adimensionais com dados experimentais de compressão em colunas



Barbero e DeVivo (1999), posteriormente, utilizaram o parâmetro de ajuste  $c = 0,65$  e concluíram que este fornece uma abordagem conservadora. No entanto, Cardoso, Harries e Batista (2014) mostraram que para colunas de seções quadradas pultrudadas de polímeros reforçados com fibra de vidro, a equação de Barbero e Tomblin (1994), utilizando  $c = 0,65$ , não é conservadora em muitos casos.

Puente, Insausti e Azkune (2006) propuseram um método empírico de projeto para colunas pultrudadas retangulares com base no método de Dutheil (1966), seguindo a proposição de Maquoi e Rondal (1978) para incluir as imperfeições iniciais generalizadas:

$$P_{cr} = \frac{1}{y} \chi P_{cr,local} \quad (122)$$

onde:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda^2}} \leq 1 \quad (123)$$

e

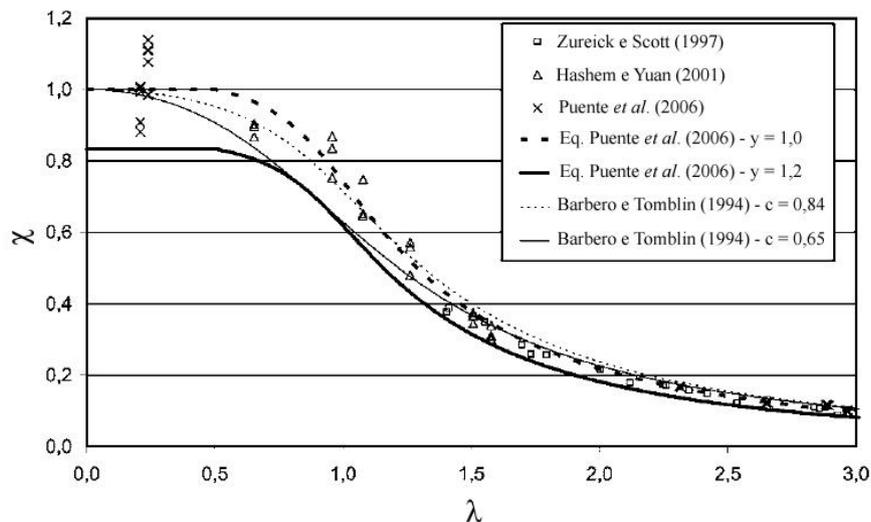
$$\phi = 0,5[1 + 0,12(\lambda^2 - 0,25) + \lambda^2] \quad (124)$$

sendo  $y$  um coeficiente de ajuste que depende da confiabilidade do fabricante. Os autores recomendam um valor de  $y = 1,2$  ou maior.

Puente, Insausti e Azkune (2006) obtiveram curvas a partir do método desenvolvido, considerando  $y = 1,0$  e  $y = 1,2$  (Figura 22). Estas curvas foram comparadas com

curvas obtidas a partir da Equação (119), proposta por Barbero e Tomblin (1994), adotando  $c = 0,84$  e  $c = 0,65$ . De acordo com os autores supracitados, na região onde a interação entre a flambagem local e global é mais alta, as curvas considerando  $y = 1,2$  e  $c = 0,65$  possuem os mesmos valores, no entanto, em outros pontos a curva proposta é ligeiramente inferior à curva de Barbero e Tomblin (1994).

Figura 22 – Comparativo realizado por Puente, Insausti e Azkune (2006)



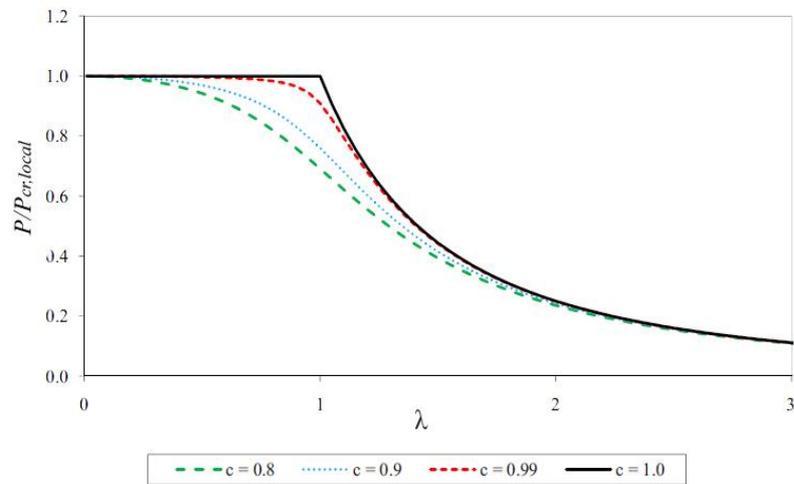
Fonte: Adaptado de Puente, Insausti e Azkune (2006).

Puente, Insausti e Azkune (2006) também compararam as curvas obtidas a partir do método proposto com uma curva experimental desenvolvida na pesquisa (Puente *et al.*, 2006) e com curvas experimentais de outros autores, a saber: Zureick e Scott (1997) e Hashem e Yuan (2001). Com base nas análises, ilustradas graficamente na Figura 22, os autores puderam verificar que o método atende bem todos os casos analisados, uma vez que, para  $y = 1,2$ , os valores obtidos permanecem sempre próximos, porém abaixo dos valores experimentais.

A CNR-DT 205/2007 (2008) adota a Equação (119), proposta por Barbero e Tomblin (1994), e recomenda o parâmetro de ajuste  $c = 0,65$ .

É importante ressaltar que conforme o parâmetro de ajuste se aproxima de um valor próximo a 1, a carga crítica de flambagem determinada de acordo com a Equação (119) se aproxima das equações de flambagem local e global. Dessa forma, como pode ser visto na Figura 23, as curvas traçadas com parâmetros menores proporcionam um projeto mais conservador quando comparado às curvas traçadas adotando parâmetros maiores (VANEVENHOVEN, SHIELD & BANK, 2010).

Figura 23 – Equação de interação proposta por Barbero e Tomblin (1994) adotando diferentes parâmetros de ajuste de curva



Fonte: Adaptado de Vanevenhoven, Shield e Bank (2010).

Segundo Cardoso (2014), o grau de interação entre os modos de flambagem depende das imperfeições iniciais, tanto da coluna inteira como das placas constituintes, e pode ser determinado com precisão a partir de uma análise não linear considerando imperfeições iniciais e comportamento pós-flambagem.

## 4 ESTUDOS DE CASOS

A seguir serão apresentadas análises de estabilidade de colunas laminadas e pultrudadas de material compósito reforçado com fibras, com seções abertas e paredes finas, realizadas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) e as teorias e metodologias descritas nos capítulos anteriores.

Sendo assim, serão propostos modelos computacionais, visando estudar os modos de instabilidade local, global e a interação entre eles, bem como o comportamento pós-crítico e o efeito da degradação do material, de forma a obter uma melhor compreensão dos vários aspectos envolvidos nestas análises. As análises por elementos finitos foram realizadas utilizando o *software* ABAQUS (SIMULIA, 2012).

### 4.1 Flambagem e comportamento pós-crítico de colunas laminadas de seção C

Tendo como base o trabalho desenvolvido por Debski, Kubiak e Teter (2013b), foi realizado um estudo preliminar buscando-se validar o modelo de elementos finitos, incluindo as condições de contorno utilizadas, e avaliar a influência do esquema de laminação e da espessura no comportamento de colunas laminadas de material compósito reforçado com fibras.

As colunas analisadas são perfis C de paredes finas, fabricadas com *Hexcel's HexPly M12* carbono-epóxi, cujas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 5.

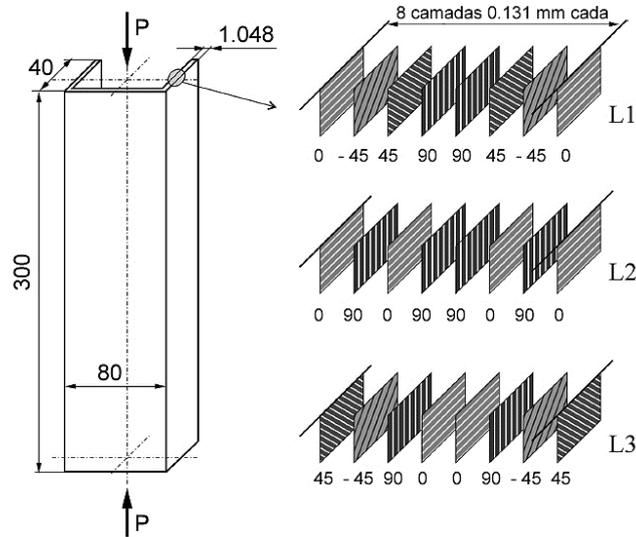
Tabela 5 – Propriedades elásticas e mecânicas da lâmina

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$X_t$ (MPa)	$Y_t$ (MPa)	$X_c$ (MPa)	$Y_c$ (MPa)	$S$ (MPa)
130710	6360	4180	0,32	1867,2	25,97	1531	214	100,15

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foram considerados três esquemas de laminação distintos: L1 [0/-45/45/90]<sub>s</sub>, L2 [0/90/0/90]<sub>s</sub> e L3 [45/-45/90/0]<sub>s</sub>. A Figura 24 apresenta as dimensões das colunas analisadas, bem como a ilustração referente às orientações das fibras.

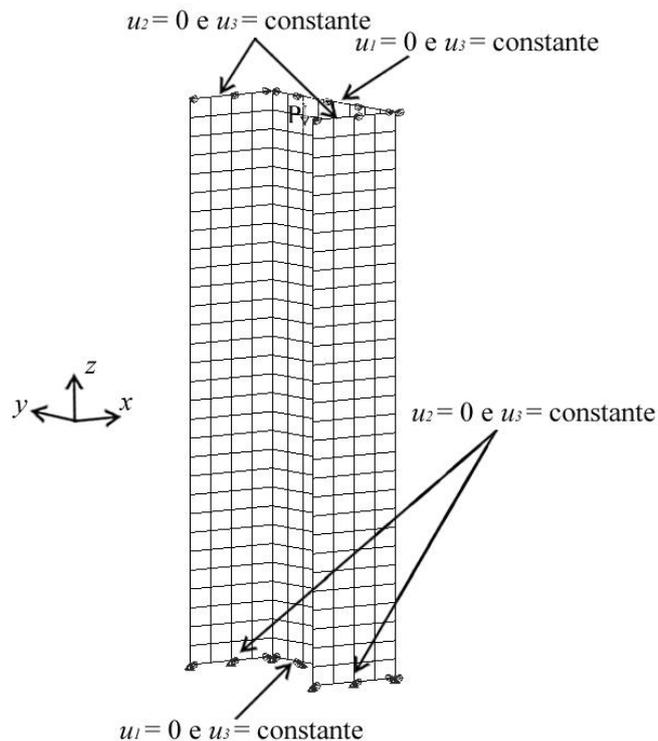
Figura 24 – Geometria das colunas e esquemas de laminação adotados (mm)



Fonte: Adaptado de Debski, Kubiak e Teter (2013b).

Um modelo utilizando elementos de casca foi proposto visando representar as condições dos ensaios realizados por Debski, Kubiak e Teter (2013b). Dessa forma, foi aplicada uma carga concentrada no centroide da seção e uma restrição adicional foi considerada no topo das colunas para tornar o deslocamento axial da seção transversal constante ao longo do comprimento (Figura 25).

Figura 25 – Condições de contorno utilizadas no modelo proposto



Fonte: Elaborada pelo autor.

As colunas analisadas foram discretizadas utilizando 480 elementos quadráticos de casca baseados na teoria de Reissner-Mindlin com oito nós e integração reduzida (S8R).

#### 4.1.1 Validação do modelo

Os resultados obtidos foram comparados com os resultados experimentais e numéricos determinados por Debski, Kubiak e Teter (2013b). Para obtenção dos resultados numéricos, os autores supracitados utilizaram elementos de casca com quatro nós e integração reduzida (S4R).

As cargas críticas determinadas são apresentadas na Tabela 6, juntamente com os resultados de Debski, Kubiak e Teter (2013b). Verifica-se uma excelente concordância para todas as laminações, dado que a maior diferença percentual observada foi de aproximadamente 4,2% para as colunas com laminação L1, enquanto que as diferenças percentuais para as colunas com laminação L2 e L3 foram inferiores a 1%.

Tabela 6 – Cargas Críticas para diferentes laminações

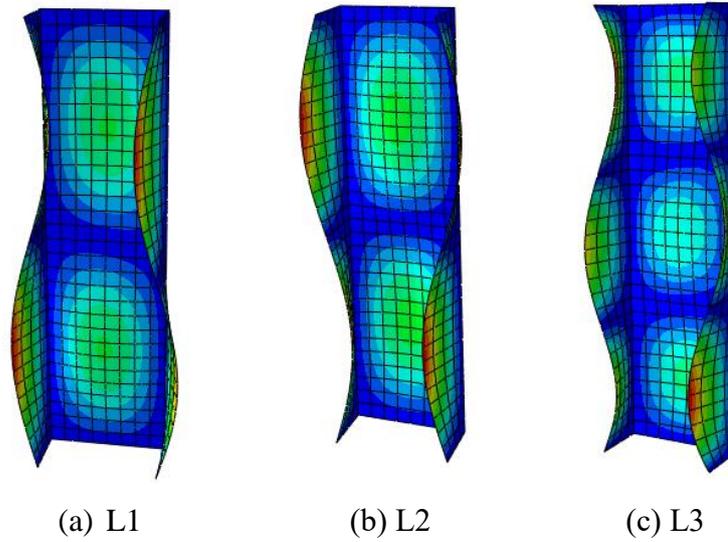
Esquema de Laminação	<i>Debski, Kubiak e Teter (2013b)</i>		<i>Modelo Proposto</i>	Diferença (%)	
	$P_{cr,exp} (N)$	$P_{cr,MEF} (N)$	$P_{cr,MEF} (N)$	A e C	B e C
	A	B	C		
L1	2848,3	2977,2	2972,5	4,178	-0,158
L2	2274,8	2282,3	2274,9	0,004	-0,325
L3	4369,7	4402,4	4405,9	0,822	0,080

Fonte: Elaborada pelo autor.

Adicionalmente, estes resultados mostram a influência do esquema de laminação sobre a carga crítica das colunas, com a carga da laminação L3 sendo cerca de 90% maior que a da laminação L2.

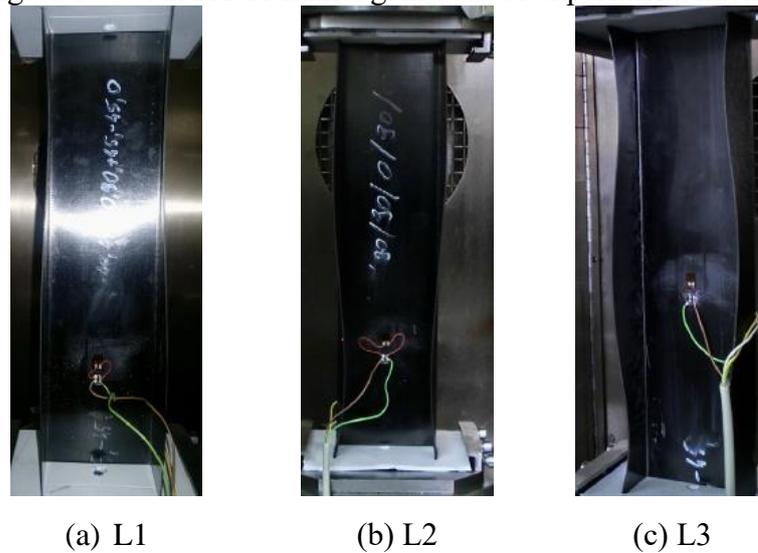
A Figura 26 ilustra os primeiros modos de flambagem, obtidos a partir do modelo proposto, para os três tipos de laminações avaliadas. Com base na Figura 27, verifica-se a concordância destes modos com os resultados experimentais de Kubiak e Teter (2013b). É possível observar também que como as cargas críticas para as laminações L1 e L2 são relativamente próximas, seus modos de flambagem são semelhantes, sendo compostos por duas semiondas.

Figura 26 – Modos de flambagem obtidos a partir do modelo proposto



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Modos de flambagem obtidos experimentalmente



Fonte: Debski, Kubiak e Teter (2013b).

As colunas reais são afetadas por imperfeições iniciais, relacionadas ao processo de fabricação e montagem, que reduzem a capacidade de carga da estrutura. Visando avaliar o comportamento da coluna real, foram realizadas análises não lineares considerando imperfeições geométricas iniciais.

Na análise não linear, a geometria imperfeita da estrutura pode ser modelada a partir de uma combinação linear dos seus modos de flambagem ( $\boldsymbol{\varphi}_i$ ):

$$\mathbf{x}_{imp} = \mathbf{x}_{perf} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (125)$$

sendo  $\mathbf{x}_{imp}$  e  $\mathbf{x}_{perf}$  as coordenadas dos pontos que definem a geometria na configuração imperfeita e perfeita, respectivamente, e  $\Delta_i$  a amplitude da imperfeição relacionada aos modos de flambagem  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , uma vez que estes são normalizados para que sua maior componente seja unitária.

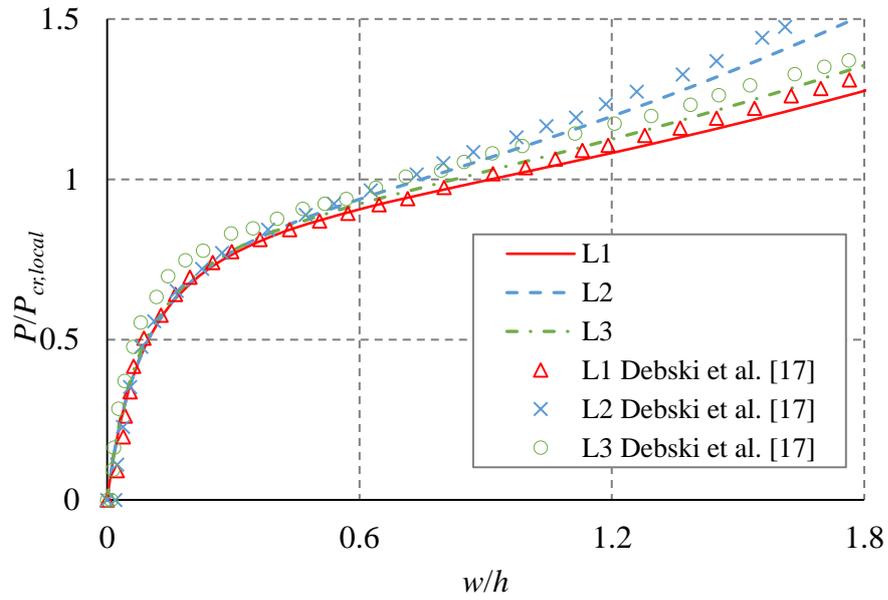
No estudo realizado por Debski, Kubiak e Teter (2013b) apenas a influência do primeiro modo de flambagem no comportamento pós-crítico foi considerado. Os autores consideraram imperfeições geométricas com amplitude igual a 10% da espessura da parede da coluna. Assim, no presente trabalho foi adotada, inicialmente, uma imperfeição geométrica com esta magnitude. A Figura 28 mostra as curvas parametrizadas ( $P/P_{cr,local} \times w/h$ ) obtidas numericamente para os três tipos de laminações em comparação com as curvas experimentais e numéricas tomadas como referência. O deslocamento  $w$  refere-se ao deslocamento lateral obtido no ponto de maior deflexão.

Verifica-se a partir da Figura 28a que os resultados obtidos apresentam excelente concordância quando comparados com os resultados numéricos obtidos por Debski, Kubiak e Teter (2013b). No entanto, é interessante ressaltar que o modelo proposto neste trabalho é menos rígido. Uma possível justificativa para esta divergência seria que no trabalho tomado como referência utilizou-se elementos lineares de casca com quatro nós e integração reduzida (S4R), enquanto no presente trabalho foram utilizados elementos quadráticos (S8R).

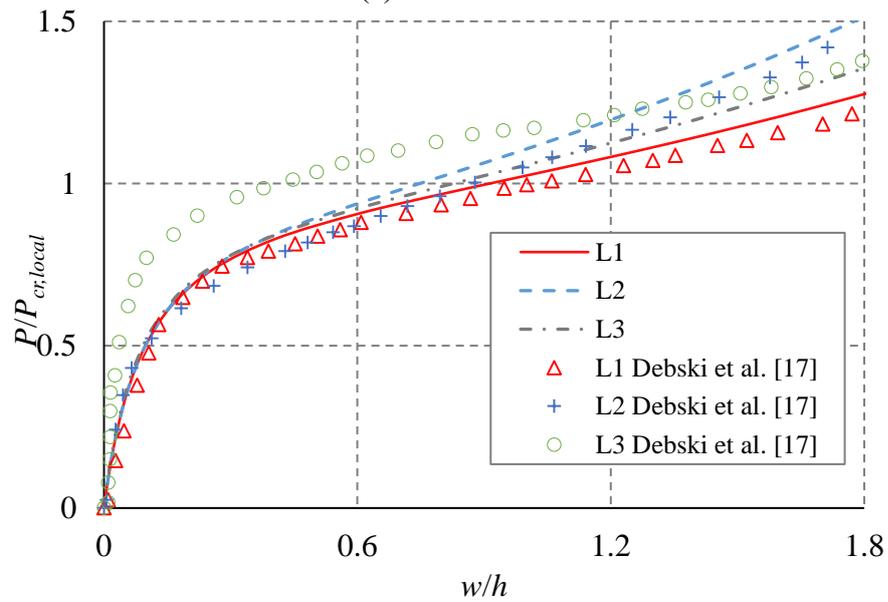
Adicionalmente, é possível observar que a coluna com laminação *cross-ply* (L2) apresenta maior ganho de rigidez, em comparação com as colunas *angle-ply* (L1 e L3). O menor ganho de rigidez destas colunas pode ser explicado pela presença dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  na matriz de rigidez à flexão  $\mathbf{D}$ .

Como pode ser visto na Figura 28b, o caminho pós-crítico das colunas L1 e L2 traçado com base nos resultados obtidos no presente trabalho apresentou boa concordância em relação aos resultados experimentais de Debski, Kubiak e Teter (2013b). Entretanto, verificou-se que, para a coluna L3, a imperfeição de  $0,1h$ , adotada pelos autores supracitados, não representa satisfatoriamente a coluna real. Dessa forma, realizou-se um estudo de sensibilidade às imperfeições.

Figura 28 – Comparação dos caminhos de equilíbrio pós-críticos para as colunas analisadas



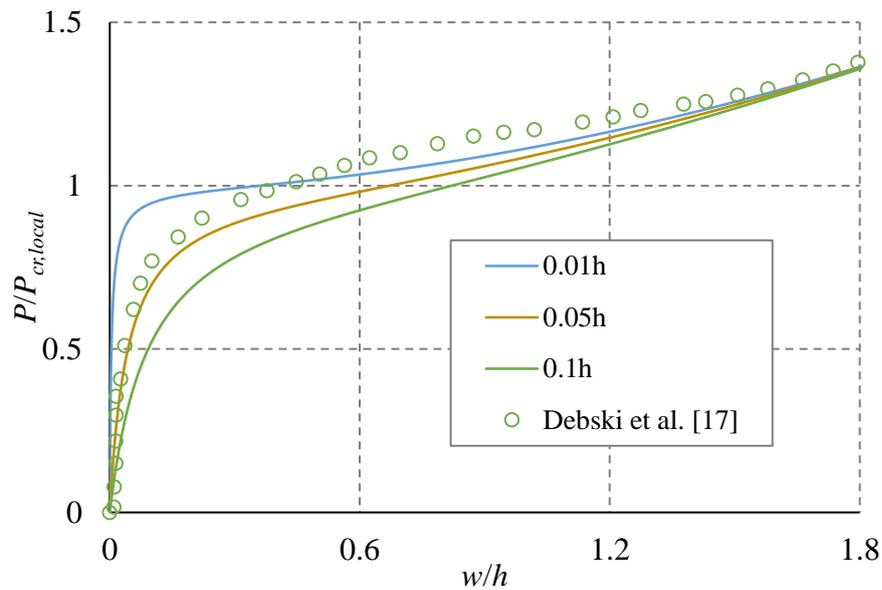
(a) Numérico



(b) Experimental

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Efeito das imperfeições iniciais no comportamento da coluna L3



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 29 mostra os resultados obtidos no estudo da sensibilidade às imperfeições para coluna de laminação L3. A coluna analisada apresenta um comportamento de bifurcação simétrica estável, com pequena sensibilidade às imperfeições. Este comportamento é típico de placas, uma vez que a flambagem da coluna pode ser caracterizada como local.

A partir do estudo verificou-se que para a coluna L3 a amplitude que melhor representaria a coluna real seria igual 5 % da espessura da parede.

#### 4.1.2 Influência da espessura

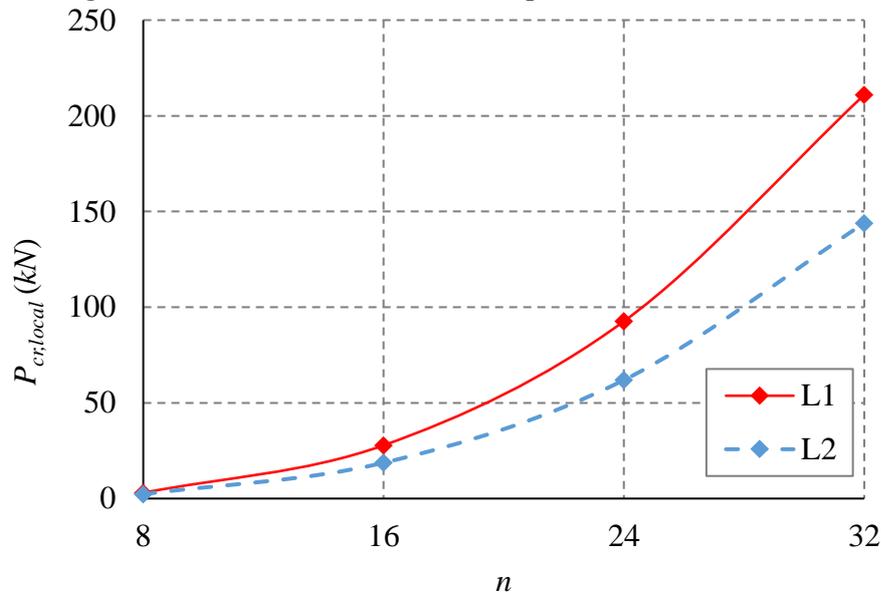
A seguir foram realizadas análises variando a espessura ( $h$ ), ou seja, o número  $n$  de lâminas das colunas L1 [0/-45/45/90]<sub>s</sub> e L2 [0/90/0/90]<sub>s</sub> de forma a avaliar sua influência na capacidade de carga e comportamento pós-crítico. A Tabela 7 apresenta os resultados para cargas críticas das colunas L1 e L2 com diferentes espessuras.

Pode-se observar que à medida que o número de lâminas aumenta, a carga crítica das colunas analisadas aumenta de forma significativa, o que por sua vez era esperado, pois a esbeltez das colunas foi reduzida consideravelmente a cada acréscimo. Adicionalmente, verifica-se que o crescimento da carga crítica não é linear (Figura 30).

Tabela 7 – Cargas Críticas para as colunas L1 e L2 com diferentes espessuras

Coluna	Laminação	$n$	$h$ (mm)	$P_{cr,local}$ (N)
L1	$[0/-45/45/90]_s$	8	1,048	2972,5
	$[(0/-45/45/90)_2]_s$	16	2,096	27828,0
	$[(0/-45/45/90)_3]_s$	24	3,133	92641,0
	$[(0/-45/45/90)_4]_s$	32	4,192	210980,0
L2	$[0/90/0/90]_s$	8	1,048	2274,5
	$[(0/90/0/90)_2]_s$	16	2,096	18703,0
	$[(0/90/0/90)_3]_s$	24	3,133	61930,0
	$[(0/90/0/90)_4]_s$	32	4,192	143892,0

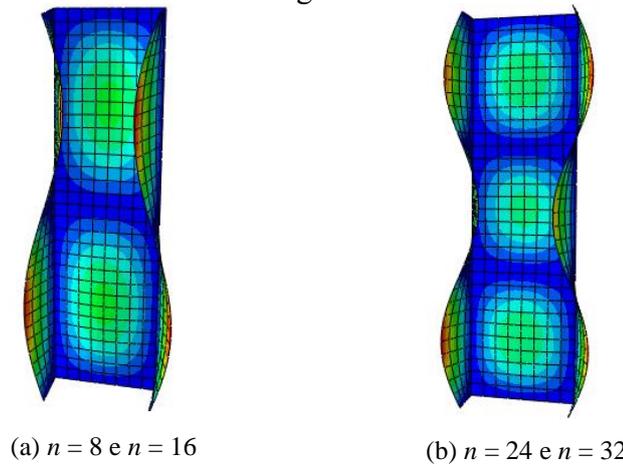
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Curvas  $P_{cr,local}$  versus  $n$  para as colunas L1 e L2

Fonte: Elaborada pelo autor.

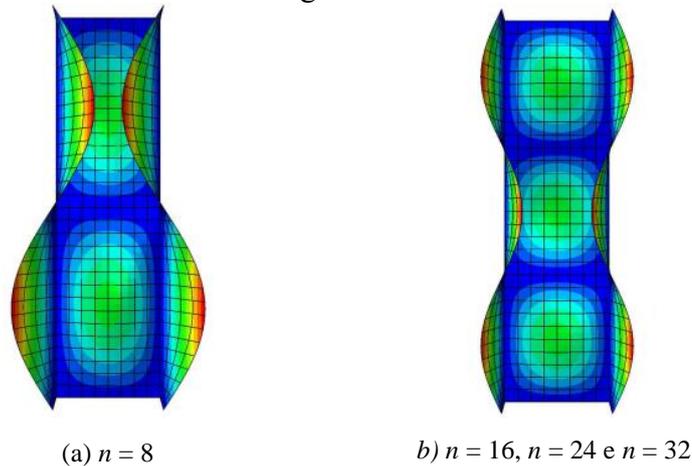
Os modos de flambagem para as colunas L1 e L2 com  $n$  lâminas estão ilustrados, respectivamente, nas Figuras 31 e 32. Nota-se que para as colunas L2 (*cross-ply*) há uma alteração no modo de flambagem com o aumento do número de lâminas para  $n = 16$ . Contudo, para as colunas L1 (*angle-ply*), o modo manteve-se igual, sofrendo alteração somente quando se aumentou o número de lâminas para  $n = 24$ , o que por sua vez pode ser explicado devido ao efeito dos acoplamentos do esquema de laminação.

Figura 31 – Modos de flambagem da coluna L1 com  $n$  lâminas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Modos de flambagem da coluna L2 com  $n$  lâminas

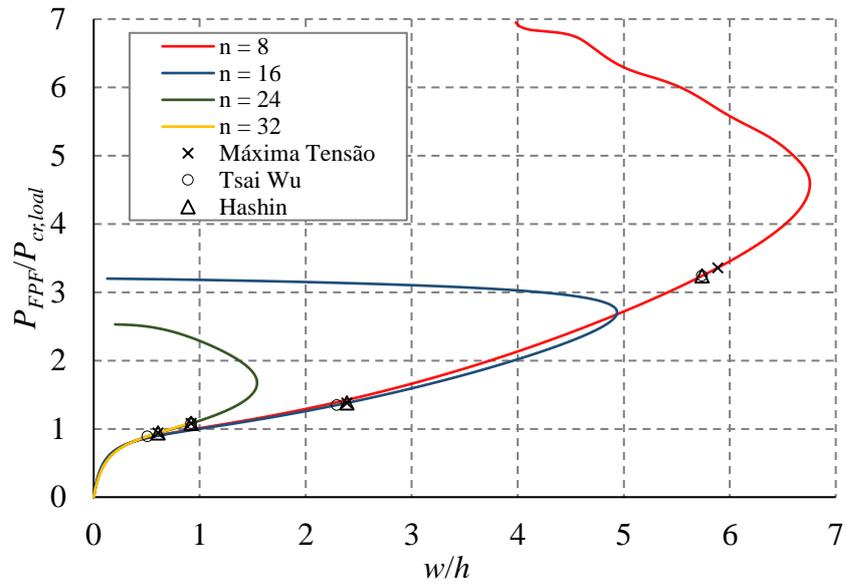


Fonte: Elaborada pelo autor.

Como verificado anteriormente, para a análise não-linear das colunas L1 e L2 a introdução de imperfeições geométricas com amplitude igual a 10 % da espessura da parede da coluna representam satisfatoriamente a coluna real ensaiada por Debski, Kubiak e Teter (2013b). Assim, optou-se por adotar esta amplitude para as análises seguintes, mantendo-se a forma do primeiro modo de flambagem.

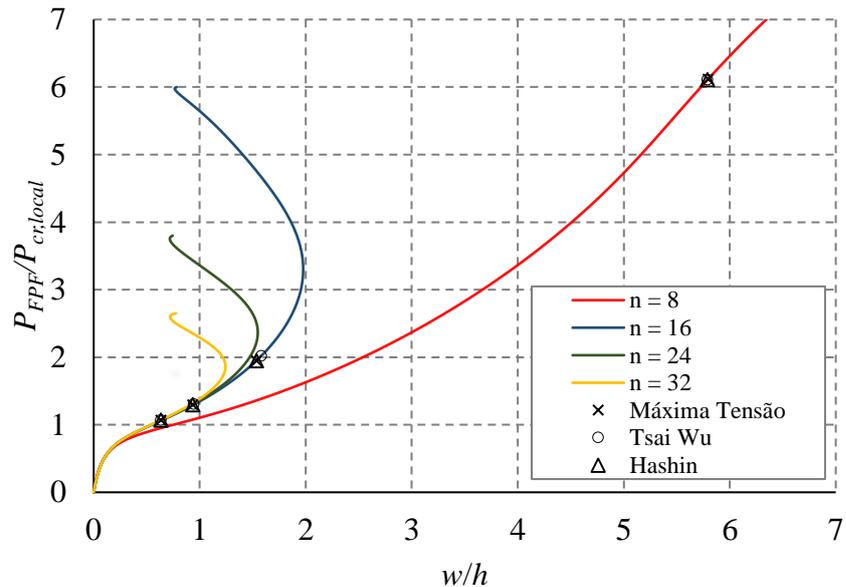
De modo a verificar a influência da espessura na resistência das colunas, foram realizadas análises considerando a falha da primeira lâmina (FPF) utilizando os critérios da Máxima Tensão, Tsai-Wu e Hashin. Para obtenção do caminho pós-crítico, utilizou-se o Método do Comprimento de Arco de Riks (CRISFIELD, 1991).

Figura 33 – Curvas carga-deslocamento lateral para colunas L1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Curvas carga-deslocamento lateral para colunas L2



Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 33 e 34 apresentam as curvas carga *versus* deslocamento para as colunas L1 e L2, respectivamente, de modo a ilustrar a influência da espessura no comportamento pós-flambagem das colunas analisadas e os pontos de falha considerando a FPF com base nos critérios mencionados. Foi possível observar que a rigidez no caminho pós crítico foi maior para as colunas de maior espessura.

Tabela 8 – Comparação do  $P_{FPF}$  em relação a  $P_{cr}$  para diferentes critérios de falha

Laminação	n	$P_{FPF}/P_{cr,local}$		
		Máxima Tensão	Tsai Wu	Hashin
L1	8	3,36	3,24	3,24
	16	1,38	1,35	1,38
	24	1,08	1,05	1,08
	32	0,94	0,89	0,94
L2	8	6,12	6,11	6,11
	16	1,95	2,02	1,95
	24	1,30	1,31	1,30
	32	1,07	1,07	1,07

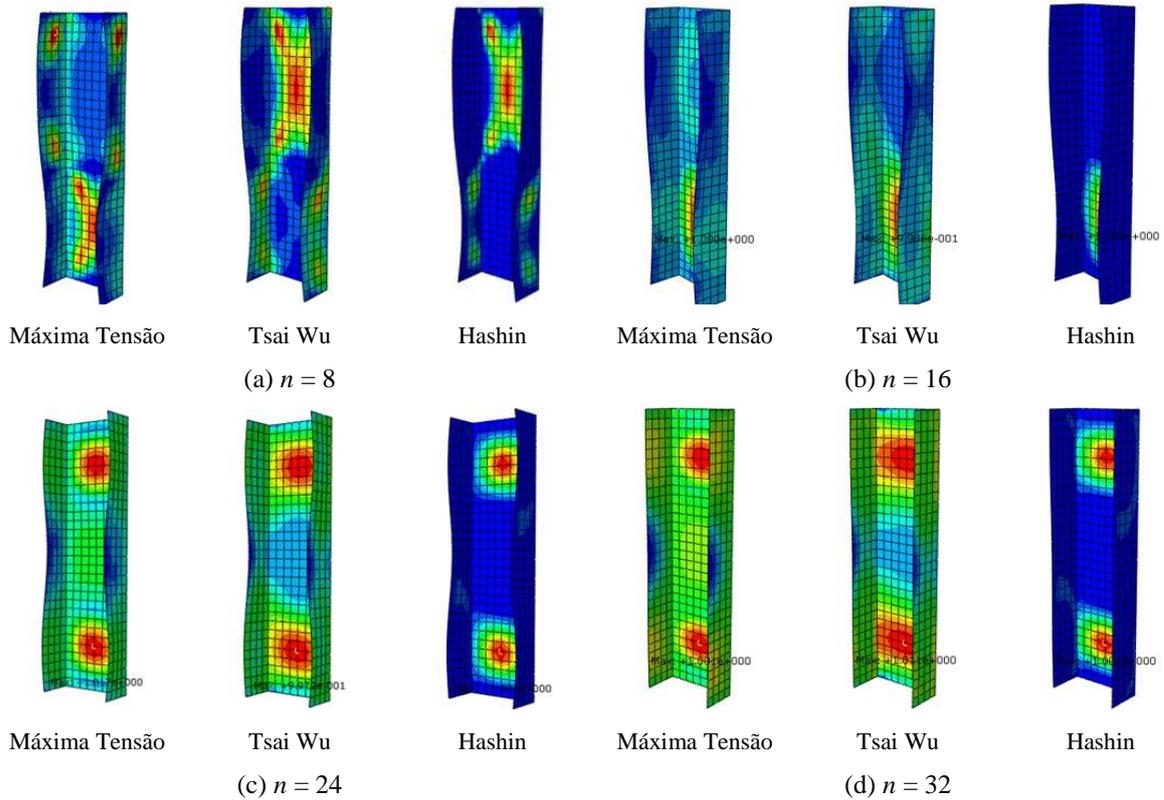
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 8 apresenta a comparação da carga referente a FPF ( $P_{FPF}$ ) em relação a carga crítica de flambagem ( $P_{cr}$ ). Dos resultados obtidos verificou-se que, para um mesmo número de camadas, não houve diferença significativa entre os resultados para os critérios de falha avaliados. Além disso, foi possível notar que na coluna *angle-ply* (L1), ao dobrar o número de camadas para  $n = 16$ , por exemplo, a resistência pós-crítica diminuiu aproximadamente 40 %, enquanto que para a *cross-ply* (L2) a redução foi em torno de 30%. Dessa forma, como esperado, pode-se constatar que com o aumento da espessura da coluna, a resistência do material tende a ser preponderante sobre a resistência à flambagem.

É interessante notar também que a falha do material passou a ser preponderante sobre a instabilidade da estrutura somente para a coluna *angle-ply* (L1) com 32 lâminas, tal como mostrado na Tabela 8, evidenciando a influência do esquema de laminação no que diz respeito ao comportamento das colunas analisadas.

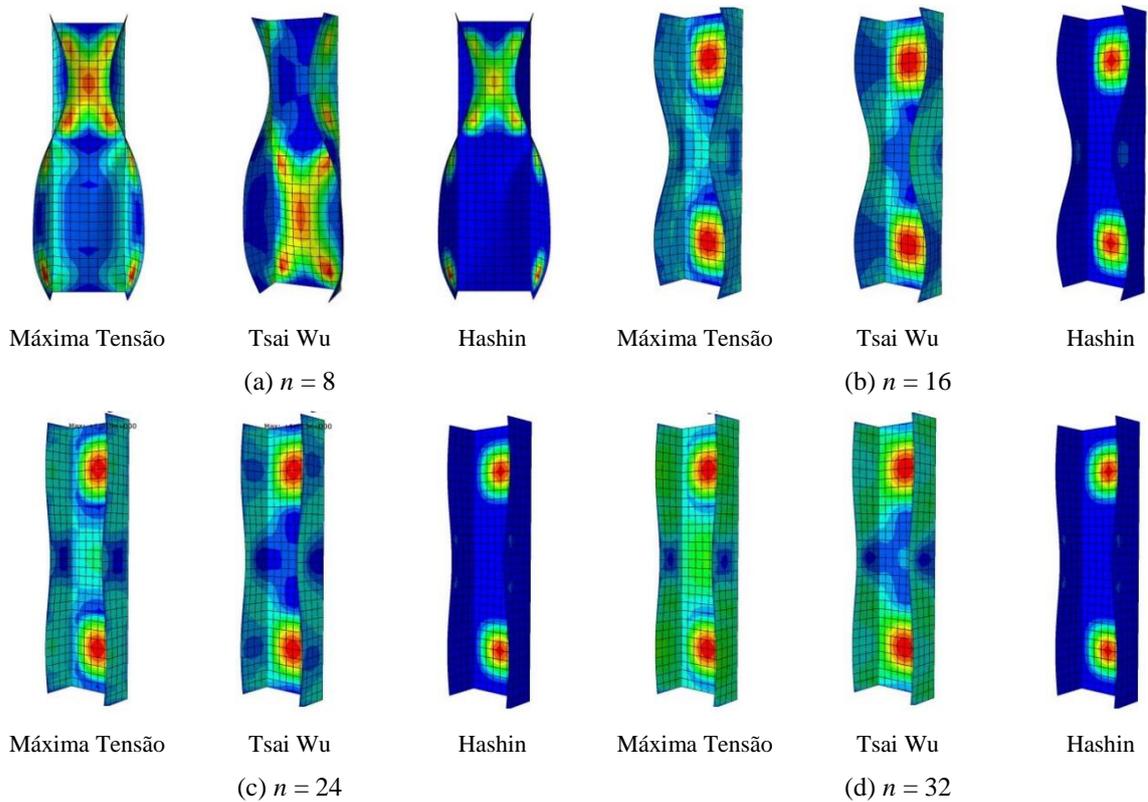
A partir das análises realizadas pode-se constatar ainda que as falhas normalmente ocorreram nas camadas mais externas das colunas, onde se encontram fibras na direção da aplicação da carga. As Figuras 35 e 36 apresentam, respectivamente, os modos de falha do material para as colunas L1 e L2 com diferentes espessuras.

Figura 35 – Modo de falha do material das colunas L1 para diferentes critérios de falha



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Modo de falha do material das colunas L2 para diferentes critérios de falha



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.1.3 Aplicação de expressões disponíveis na literatura para determinação de $P_{cr,local}$

No intuito de verificar a aplicabilidade de algumas expressões disponíveis na literatura para colunas de material compósito reforçado com fibras, foi realizado um comparativo dos resultados determinados a partir das Equações (111) e (112) e das expressões propostas por Kollár (2003) e Cardoso (2014), apresentadas no Capítulo 3, com os resultados numéricos e experimentais de Debski, Kubiak e Teter (2013b) para carga de flambagem local das colunas laminadas de perfil C descritas anteriormente. É importante ressaltar que os métodos de Kollár (2003) e Cardoso (2014) foram validados apenas para perfis pultrudados.

Os cálculos numéricos realizados na determinação das cargas críticas por meio das expressões mencionadas foram implementados no *software* MATLAB.

Como foi visto no Capítulo 3, as expressões utilizadas para determinação da flambagem local de colunas são funções dos parâmetros de rigidez baseados nas propriedades elásticas. Para colunas pultrudadas, a obtenção destes parâmetros ocorre de forma mais simples, no entanto, para colunas laminadas torna-se necessário determinar propriedades equivalentes que irão variar de acordo com o esquema de laminação e com o número de lâminas.

Dessa forma, foram determinadas propriedades equivalentes ( $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{G}_{12}$ ,  $\bar{\nu}_{12}$  e  $\bar{\nu}_{21}$ ) de duas formas distintas: a primeira a partir da matriz  $\mathbf{D}$  de rigidez à flexão (Abordagem de Rigidez - AR), desprezando os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$ , e a segunda a partir da inversa da matriz  $\mathbf{D}$  (Abordagem de Flexibilidade - AF), de modo a considerar indiretamente estes termos (Tabela 9).

Tabela 9 – Propriedades equivalentes determinadas utilizando duas abordagens distintas

Laminação	Abordagem	Propriedades Equivalentes				
		$\bar{E}_1$ (MPa)	$\bar{E}_2$ (MPa)	$\bar{G}_{12}$ (MPa)	$\bar{\nu}_{12}$	$\bar{\nu}_{21}$
L1	AR	83278,97	19748,78	16057,29	0,64	0,15
	AF	82967,05	18172,06	14432,61	0,60	0,13
L2	AR/AF	92218,51	45400,49	4180	0,05	0,02

Fonte: Elaborada pelo autor.

As Tabelas 10 e 11 apresentam o comparativo das cargas críticas determinadas a partir das Equações (111) e (112) e das expressões propostas por Kollár (2003) e Cardoso (2014) com os resultados obtidos experimentalmente por Debski, Kubiak e Teter (2013b) para as

colunas L1 [0/-45/45/90]<sub>s</sub> e L2 [0/90/0/90]<sub>s</sub>.

Nas Tabelas 10 e 11, os resultados referentes à carga crítica de flambagem local, utilizando as expressões mencionadas, foram obtidos a partir da Abordagem de Rigidez e da Abordagem de Flexibilidade, respectivamente.

Tabela 10 – Carga crítica determinada utilizando a Abordagem de Rigidez.

Laminação	$P_{cr,local} (N)$				Diferença (%)		
	<i>Debski et al. (2013b)</i>	<i>Eq. (112) ou (113)</i>	<i>Kollár (2003)</i>	<i>Cardoso (2014)</i>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>A e B</b>	<b>A e C</b>	<b>A e D</b>
L1	2848,3	1848,2	2905,2	3279,4	-35,1	2,0	15,1
L2	2274,8	418,1	2299,1	2370,6	-78,9	1,1	4,2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 11 – Carga crítica determinada utilizando a Abordagem de Flexibilidade

Laminação	$P_{cr,local} (N)$				Diferença (%)		
	<i>Debski, Kubiak e Teter (2013b)</i>	<i>Eq. (112) ou (113)</i>	<i>Kollár (2003)</i>	<i>Cardoso (2014)</i>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>A e B</b>	<b>A e C</b>	<b>A e D</b>
L1	2848,3	1661,2	2658,8	2986,7	-41,7	-6,6	4,9
L2	2274,8	418,1	2299,1	2370,6	-78,9	1,1	4,2

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dos resultados obtidos verifica-se que as cargas críticas determinadas através das Equações (111) e (112) apresentaram uma diferença percentual elevada quando comparada aos resultados experimentais, principalmente para a coluna L2. Esta abordagem resulta em uma estimativa conservadora da carga de flambagem local, pois não é feita nenhuma consideração acerca das restrições nos bordos das placas que compõem a coluna.

No que diz respeito às abordagens adotadas na determinação das propriedades equivalentes, foi possível notar que, para a coluna L2, os resultados obtidos através das expressões mencionadas não foram influenciados pela abordagem utilizada, isto porque os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são nulos para os laminados *cross-ply* simétricos. No entanto, para coluna L1 (*angle-ply* simétrica), as cargas críticas reduziram significativamente ao considerar estes

termos.

Verificou-se que os resultados obtidos utilizando expressão proposta por Kollár (2003) foram satisfatórios para ambas as colunas, apresentando diferenças inferiores a 7 % quando comparado aos resultados experimentais de Debski, Kubiak e Teter (2013b). Entretanto, é interessante observar que para a coluna L1, a consideração dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  resultou em um aumento da diferença percentual entre a carga crítica calculada e a carga obtida experimentalmente. Este aumento se deu em função da redução da carga crítica calculada.

Um aspecto importante que deve ser enfatizado é que, além do esquema de laminação, as relações geométricas da seção transversal também têm influência sobre os resultados. Cardoso (2014) realizou um comparativo entre os resultados determinados a partir das equações propostas em seu trabalho e do Método das Faixas Finitas. Para as colunas de perfil C, pultrudadas, com seções comerciais típicas ( $0,15 < \eta = b_f/b_w < 0,53$ ), o autor mencionado observou que a maior diferença obtida foi de 10 %.

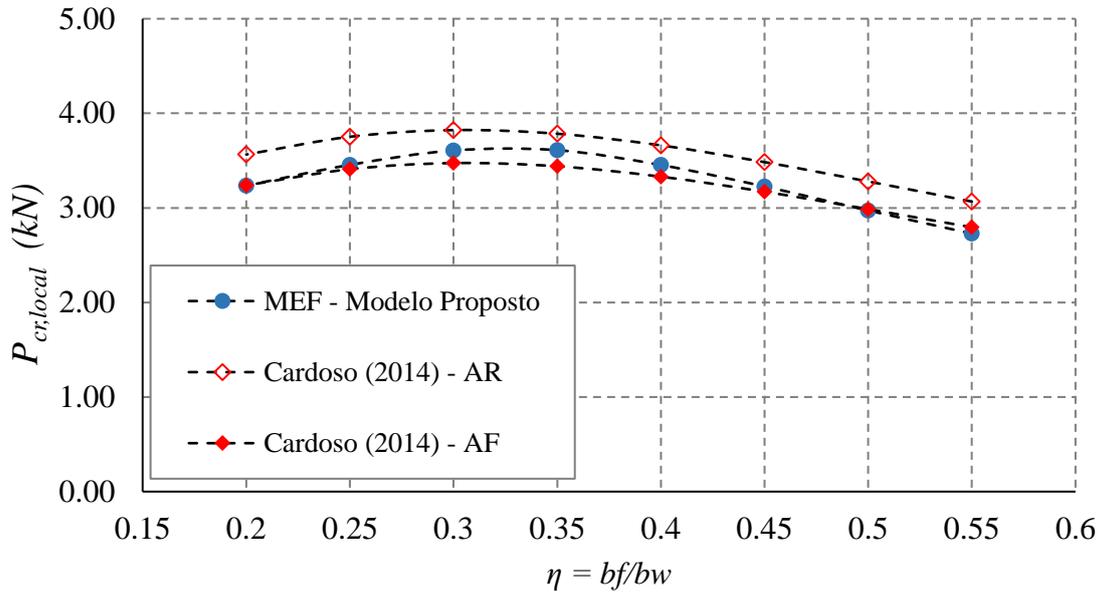
Inicialmente, verificou-se a aplicabilidade da expressão de Cardoso (2014) para a coluna laminada de perfil C com  $\eta = 0,5$  e a maior diferença obtida foi de 15 % para a coluna L1 ao desprezar os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  (Tabela 10). No entanto, como esperado, esta diferença reduziu em torno de 10 % quando estes termos foram considerados a partir da Abordagem de Flexibilidade.

Em seguida, visando verificar a influência das relações geométricas da seção transversal, foram realizadas análises utilizando o modelo de casca proposto e validado no presente trabalho para as colunas de perfil C para as laminações L1 e L2 com  $0,20 \leq \eta = b_f/b_w \leq 0,55$  e os resultados obtidos foram comparados com os determinados utilizando as expressões de Kollár (2003) e Cardoso (2014).

Como pode ser visto na Figura 37, os resultados obtidos a partir da expressão de Cardoso (2014) apresentaram boa concordância com os resultados numéricos, sobretudo ao se considerar a Abordagem de Flexibilidade.

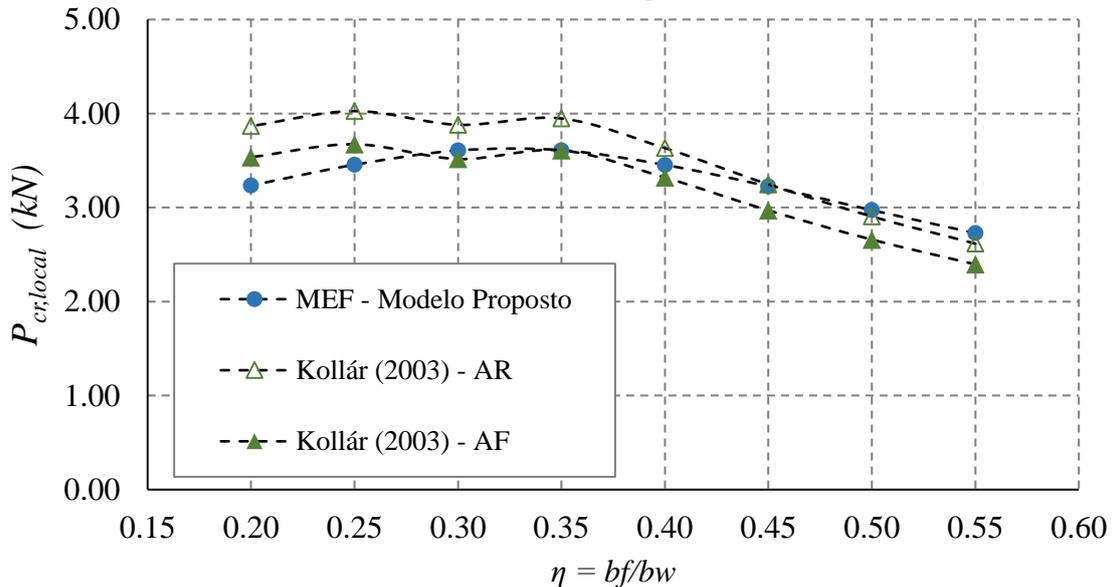
Quando os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  foram desprezados (Abordagem de Rigidez), a maior diferença obtida em relação aos resultados numéricos foi de aproximadamente 12,5 %. Em contrapartida, ao considerar estes termos (Abordagem de Flexibilidade), as cargas críticas calculadas a partir da expressão de Cardoso (2014) reduziram significativamente e a maior diferença obtida em relação aos resultados numéricos passou a ser de aproximadamente 5 %. Como esta expressão é baseada no Quociente de Rayleigh, as cargas críticas obtidas são normalmente superiores às obtidas pelo MEF.

Figura 37 –  $P_{cr,local}$  versus  $\eta$  utilizando a equação de Cardoso (2014) para a coluna L1 [0/-45/45/90]<sub>s</sub>



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 –  $P_{cr,local}$  versus  $\eta$  utilizando as equações de Kollár (2003) para a coluna L1 [0/-45/45/90]<sub>s</sub>



Fonte: Elaborada pelo autor.

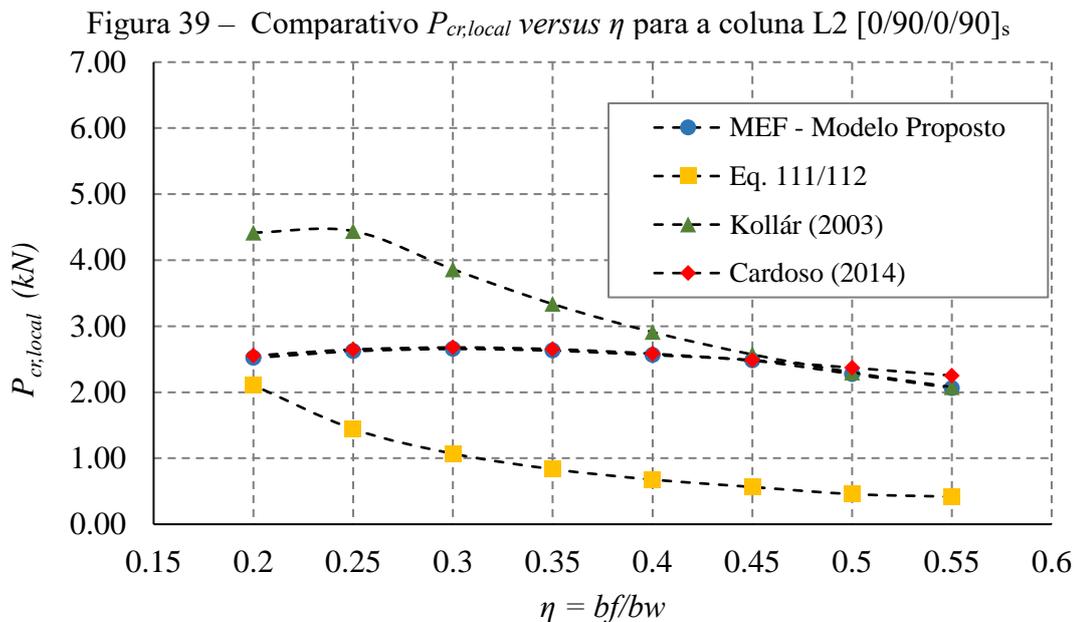
Na Figura 38, estão ilustrados os resultados determinados numericamente e a partir das expressões de Kollár (2003) utilizando-se as duas abordagens. Nota-se que os resultados obtidos pela Abordagem da Flexibilidade apresentaram uma melhor concordância com os resultados numéricos, sendo a maior diferença de aproximadamente 12 %. No entanto, ao desprezar estes termos (Abordagem da Rigidez) a maior diferença foi de 19,5 %.

É interessante observar também que para algumas relações geométricas ( $0,45 \leq \eta =$

$b_f/b_w \leq 0,55$ ) os resultados obtidos pela Abordagem da Flexibilidade se aproximaram dos resultados numéricos, apresentando diferenças percentuais inferiores a 4 %. Dessa forma, verifica-se que, para as expressões de Kollár (2003), as aproximações adotadas funcionam melhor somente em algumas situações, o que por sua vez pode estar relacionado a complexidade das estruturas laminadas.

No geral, foi possível verificar que, na maioria dos casos, a Abordagem da Flexibilidade apresenta resultados a favor da segurança tanto para a metodologia de Cardoso (2014) quanto para a de Kollár (2003).

Para a coluna com laminação L2 (*cross-ply* simétrica) os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são nulos, sendo assim, os resultados serão iguais para as duas abordagens. A Figura 39 apresenta um comparativo dos resultados obtidos a partir do modelo proposto e das expressões mencionadas, incluindo as Equações (111) e (112).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se que os resultados determinados a partir da expressão de Cardoso (2014) apresentaram boa concordância com os resultados numéricos, sendo a maior diferença obtida igual a 9 % para  $\eta = 0,55$ .

No que diz respeito aos resultados determinados através das expressões de Kollár (2003) é possível verificar, com base na Figura 39, que para  $0,2 \leq \eta = b_f/b_w \leq 0,35$  as diferenças foram bastante significativas. A maior diferença obtida em relação aos resultados numéricos foi de aproximadamente 80 %.

É interessante notar que à medida que os resultados obtidos a partir das Equações

(111) e (112) se afastam dos resultados numéricos, os resultados determinados através das expressões de Kollár (2003) se aproximam consideravelmente, sendo a menor diferença calculada igual a 0,74 % para  $\eta = 0,55$ .

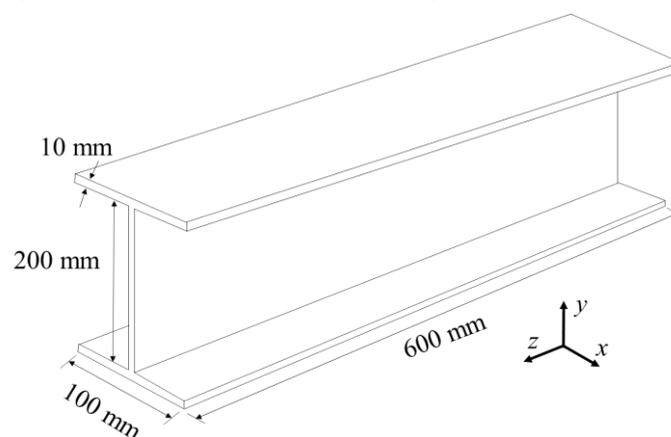
Dessa forma, observou-se que quando  $b_f$  é muito pequeno em relação a  $b_w$ , as aproximações acerca das restrições nos bordos das placas que compõe a coluna, de acordo com as expressões de Kollár (2003), podem conduzir à imprecisões significativas. Além disso, é importante constatar a influência do esquema de laminação nos resultados obtidos, uma vez que para as colunas *angle-ply* (L1), as expressões de Kollár (2003) não levaram a resultados com diferenças tão discrepantes em relação ao modelo numérico.

#### 4.2 Flambagem e comportamento pós-crítico de colunas pultrudadas de seção I

Para validação do modelo de casca desenvolvido no presente exemplo utilizou-se como referência os trabalhos realizados por Nunes, Silvestre e Correia (2016a, 2016b). Os autores mencionados estudaram o comportamento estrutural de colunas pultrudadas de polímero reforçado com fibra híbrida com a substituição parcial da fibra de vidro por fibra de carbono.

É importante ressaltar que o estudo de colunas de compósitos híbridos não é escopo do presente trabalho, dessa forma utilizou-se somente a coluna de 60 cm (Figura 40), composta por uma matriz polimérica reforçada com fibras de vidro (GFRP), que faz parte da série tomada como referência pelos autores, cujas propriedades elásticas e mecânicas estão apresentadas, respectivamente, nas Tabelas 12 e 13. É importante ressaltar que as propriedades da alma e do flange foram consideradas iguais.

Figura 40 – Geometria da coluna pultrudada analisada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Propriedades elásticas do GFRP

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)
36633	10754	0,266	3648	3648	1601

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 13 – Propriedades mecânicas do GFRP

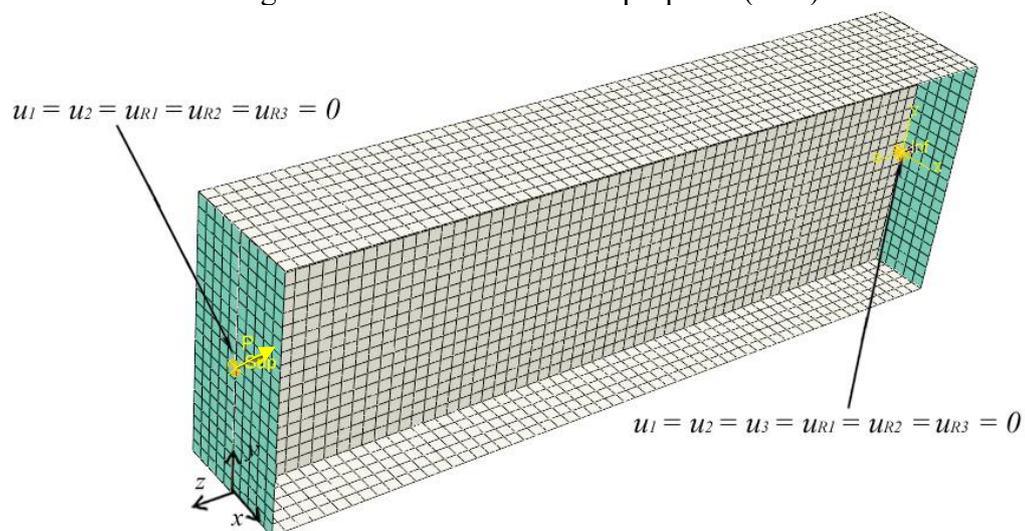
$X_t$ (MPa)	$X_c$ (MPa)	$Y_t$ (MPa)	$Y_c$ (MPa)	$S_{12}$ (MPa)	$S_{23}$ (MPa)
365	468	85,8	110	30,6	30,6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nunes, Silvestre e Correia (2016b) desenvolveram modelos sólidos utilizando o MEF a partir do *software* ABAQUS. Os autores modelaram duas partes distintas: (i) perfil I pultrudado e (ii) placas de suporte de carga com 250 mm de diâmetro e 27 mm de espessura, utilizando, respectivamente, elementos de casca contínua de oito nós com integração reduzida e três pontos de integração na espessura de cada camada (SC8R), assumidos como corpos tridimensionais, e elementos sólidos de oito nós com integração reduzida (C3D8R).

No presente trabalho, foi proposto um modelo de casca no *software* ABAQUS (SIMULIA, 2012) visando representar as condições utilizadas por Nunes, Silvestre e Correia (2016a, 2016b). O modelo desenvolvido, ilustrado na Figura 41, também foi constituído de duas partes distintas: (i) perfil I pultrudado e (ii) placas de suporte de carga. No entanto, optou-se por placas rígidas retangulares com 200 mm de altura e 100 mm de largura.

Figura 41 – Modelo de casca proposto (S8R)



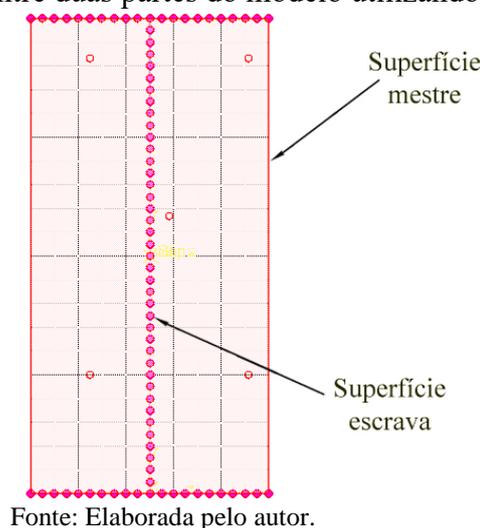
Fonte: Elaborada pelo autor.

O perfil pultrudado foi discretizado utilizando 2400 elementos quadráticos de casca baseados na teoria de Reissner-Mindlin com oito nós, integração reduzida e três pontos de integração na espessura de cada camada (S8R) e, para as placas de suporte, utilizou-se 200 elementos rígidos de quatro nós (R3D4). É interessante destacar que foi realizado um breve estudo de convergência e as malhas adotadas representam de forma adequada o comportamento da estrutura.

Buscando simular as condições da coluna real ensaiada por Nunes, Silvestre e Correia (2016a), uma carga concentrada foi aplicada no ponto de interação situado no centro da placa de suporte esquerda e restrições de deslocamento foram adicionadas em ambas as placas de suporte, tal como mostrado na Figura 41.

A vinculação entre os nós do perfil pultrudado e das placas de suporte se deu a partir da utilização da restrição *tie*, disponível no ABAQUS (SIMULIA, 2012). Esta restrição permite uma conexão rígida entre duas superfícies de forma que ambas sofram os mesmos deslocamentos. A interação entre as duas superfícies é discretizada entre nós coincidentes das superfícies definidas como mestre e escrava, respectivamente. Dessa forma, no modelo proposto, as placas de suporte foram definidas como superfície mestre, enquanto que o perfil pultrudado foi definido como superfície escrava (Figura 42).

Figura 42 – Vinculação entre duas partes do modelo utilizando a restrição *tie*



#### 4.2.1 Validação do modelo

As cargas críticas obtidas a partir do modelo desenvolvido e os resultados experimentais e numéricos determinados, respectivamente, por Nunes, Silvestre e Correia (2016a, 2016b) são apresentados de forma comparativa na Tabela 14. Pode-se notar que há

concordância entre os resultados, com diferenças inferiores a 6 %. As diferenças obtidas eram esperadas, pois o modelo desenvolvido pelos autores mencionados é mais rígido e o comportamento tende a se aproximar mais da coluna ensaiada.

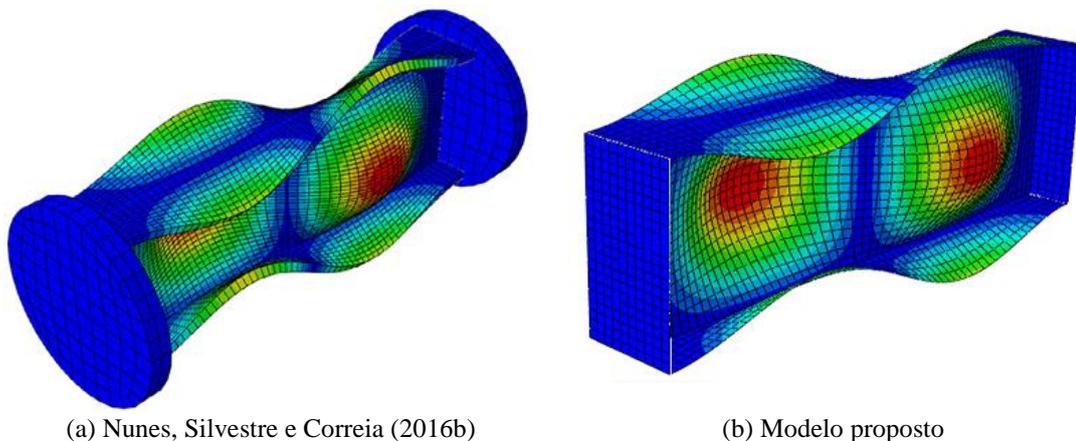
Tabela 14 – Comparativo entre as cargas críticas de flambagem da coluna analisada

<i>Nunes, Silvestre e Correia (2016a, 2016b)</i>		<i>Modelo Proposto</i>	<b>Diferença (%)</b>	
$P_{cr,exp}$ (kN)	$P_{cr,MEF}$ (kN)	$P_{cr,MEF}$ (kN)	<b>A e C</b>	<b>B e C</b>
<b>A<sup>1</sup></b>	<b>B</b>	<b>C</b>		
689,9 ±22,1	660,7	631	-5,5	-4,5

<sup>1</sup> Dado o desvio padrão de ±22,1, adotou-se  $P_{cr,exp}$  a favor da segurança para cálculo da Diferença (%).  
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 43 ilustra, respectivamente, o primeiro modo de flambagem obtido numericamente pelos autores mencionados e através do modelo proposto. Com base na figura referida é possível constatar visualmente a semelhança entre os modelos.

Figura 43 – Primeiro modo de flambagem da coluna analisada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, foram realizadas análises não lineares geométricas e físicas considerando uma imperfeição inicial com amplitude igual a 0,05 mm, conforme utilizado por Nunes, Silvestre e Correia (2016b). Utilizou-se o Método do Comprimento de Arco Riks (CRISFIELD, 1991) para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura.

As análises considerando o efeito da não linearidade física foram realizadas a partir do modelo de dano contínuo presente no *software* ABAQUS (SIMULIA, 2012). As energias de fratura na tração e na compressão na direção das fibras e transversais a estas, utilizadas como dados entrada no modelo de dano contínuo, estão indicadas na Tabela 15.

Tabela 15 – Energias de fratura associadas ao material utilizado

$G_{ft}$ (N/mm)	$G_{fc}$ (N/mm)	$G_{mt}$ (N/mm)	$G_{mc}$ (N/mm)
2,38	5,28	0,424	0,948

Fonte: Nunes, Silvestre e Correia (2016b).

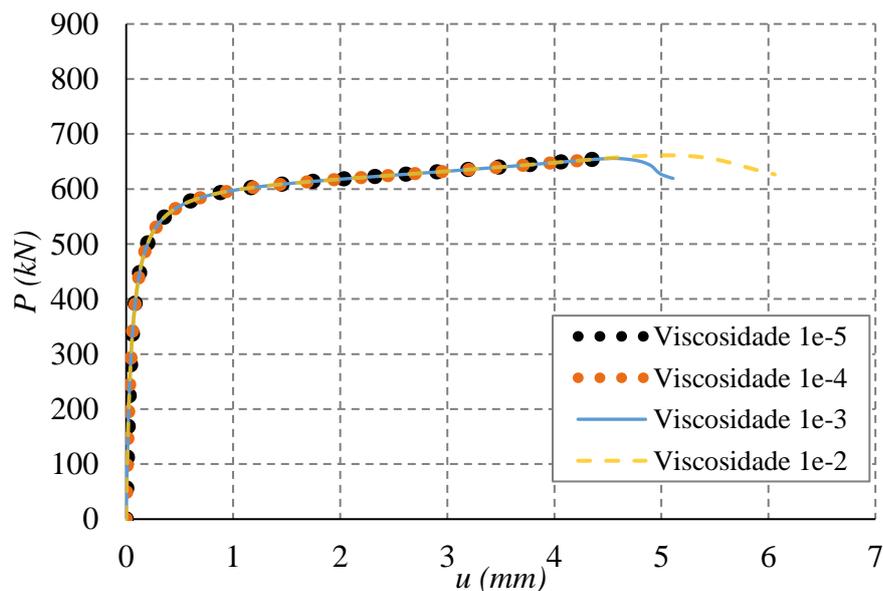
Nunes, Silvestre e Correia (2016b) adotaram um valor constante de  $1e-5$  para os coeficientes de viscosidade, usados como parâmetros de regularização viscosa. Segundo Lapczyk e Hurtado (2007), o uso desta regularização a partir de um parâmetro de viscosidade pequeno, normalmente, melhora a taxa de convergência do modelo sem comprometer os resultados de maneira significativa.

Utilizando o modelo proposto, foram traçadas curvas de carga-deslocamento para diferentes coeficientes de viscosidade (Figura 44). Nota-se que as curvas traçadas para os coeficientes de viscosidade iguais a  $1e-5$  e  $1e-4$  não apresentaram uma queda súbita da capacidade de carga, ou seja, nestas curvas não foi possível identificar o colapso da estrutura.

É importante ressaltar que nos casos em que não se verifica o colapso da estrutura, a carga de ruptura ( $P_u$ ) pode ser definida como a carga máxima obtida na curva carga-deslocamento.

Com base na Figura 44, pode-se constatar que as cargas máximas obtidas nas curvas traçadas para os coeficientes de viscosidade iguais a  $1e-5$  e  $1e-4$  são relativamente próximas das cargas de rupturas observadas nas demais curvas.

Figura 44 – Curvas carga-deslocamento lateral com diferentes coeficientes de viscosidade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas análises seguintes, realizadas a partir do modelo proposto, optou-se pelo valor constante de  $1e-3$  para os coeficientes de viscosidade.

A Figura 45 apresenta as curvas de carga *versus* deslocamento lateral. Estas curvas foram obtidas através de análises elásticas, considerando apenas a não linearidade geométrica, e a partir de análises nas quais se considerou também o efeito da não linearidade física (NLF).

De acordo com Nunes, Silvestre e Correia (2016b), se a delaminação for desconsiderada e o interesse for apenas a previsão da carga final, recomenda-se o uso do critério da Máxima Tensão ou de Tsai-Hill. No trabalho dos autores mencionados, não houve grande divergência entre resultados obtidos a partir do critério de Máxima Tensão e Tsai-Hill, no entanto, o critério de Máxima Tensão apresentou melhores estimativas. Dessa forma, para a validação, somente o critério de Máxima Tensão foi utilizado na determinação da carga referente à falha da primeira lâmina (FPF).

Nas análises onde a não linearidade física foi considerada utilizou-se o critério de Hashin para obtenção da carga de ruptura ( $P_u$ ), uma vez que este critério é utilizado pelo modelo de dano contínuo disponível no ABAQUS.

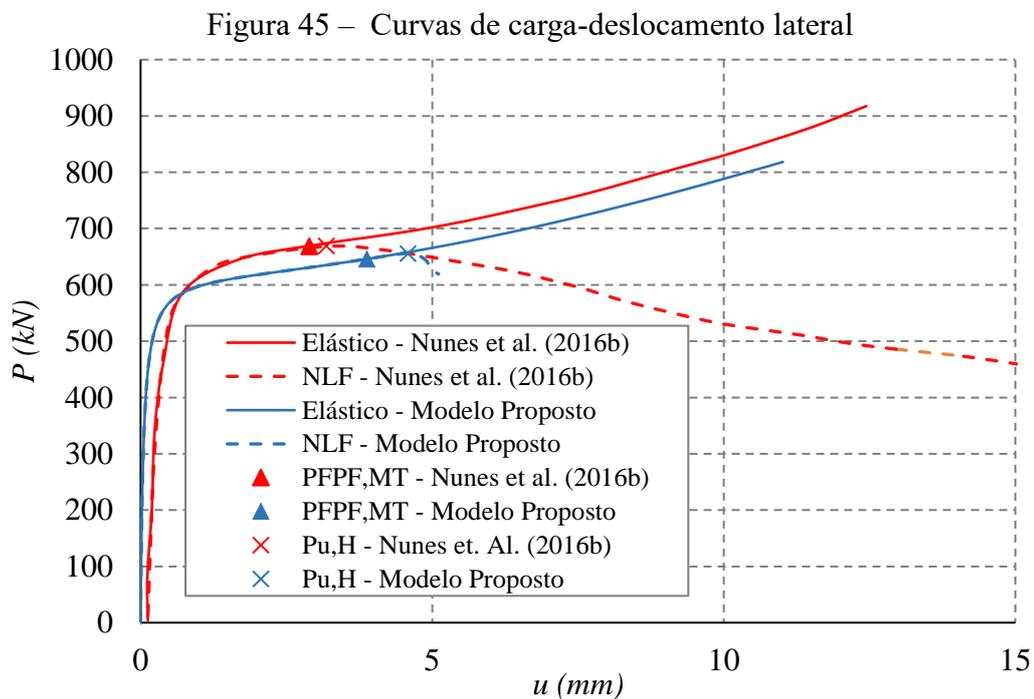
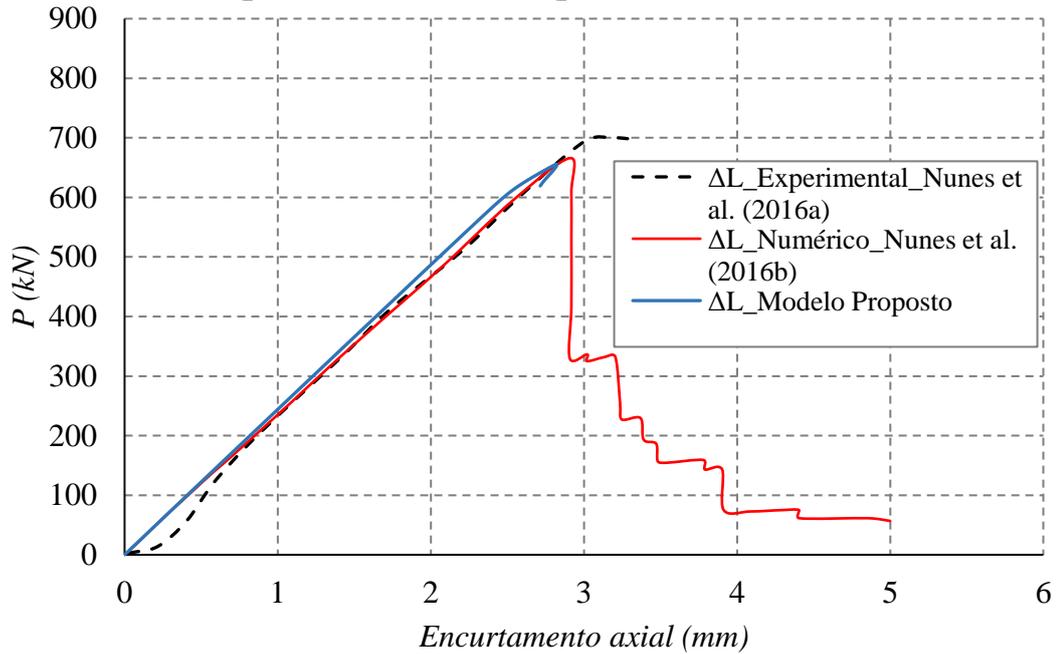


Figura 46 – Curvas de carga-encurtamento axial



Fonte: Elaborada pelo autor.

Adicionalmente, na Figura 46, são representadas as curvas de carga-encurtamento axial para a coluna analisada, de forma a comparar os resultados obtidos a partir do modelo proposto com os resultados determinados experimentalmente e numericamente por Nunes, Silvestre e Correia (2016a, 2016b).

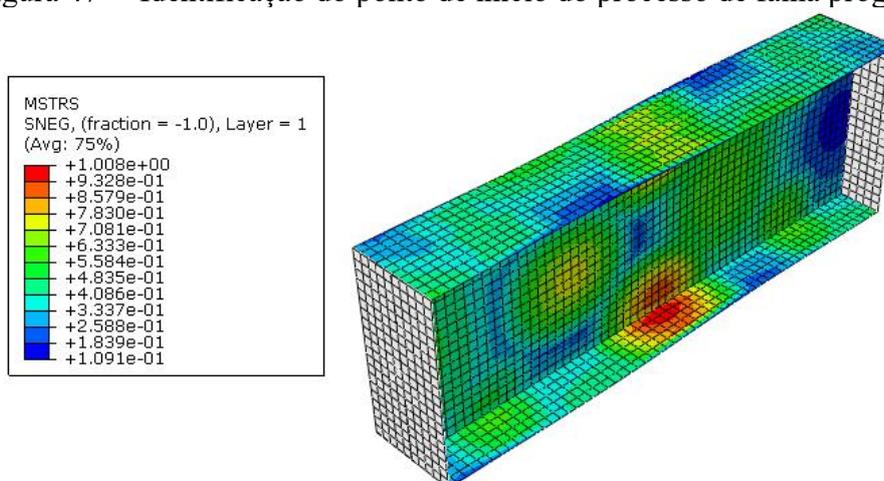
A Tabela 16 apresenta um resumo comparativo dos principais resultados das análises descritas acima e a Figura 47 mostra ponto onde se inicia o processo de falha obtida a partir do modelo proposto.

Tabela 16 – Comparativo dos principais resultados referente as análises não lineares

<i>Nunes, Silvestre e Correia (2016a, 2016b)</i>			<i>Modelo Proposto</i>		<b>Diferença (%)</b>			
$P_{u,exp}$ (kN)	$P_{FPF,MT}$ (kN)	$P_{u,H}$ (kN)	$P_{FPF,MT}$ (kN)	$P_{u,H}$ (kN)	<b>A e D</b>	<b>A e E</b>	<b>B e D</b>	<b>C e E</b>
<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>				
733,7	668,8	669,2	645,9	655,6	-12,0	-10,7	-3,4	-2,0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – Identificação do ponto de início do processo de falha progressiva



Fonte: Elaborada pelo autor.

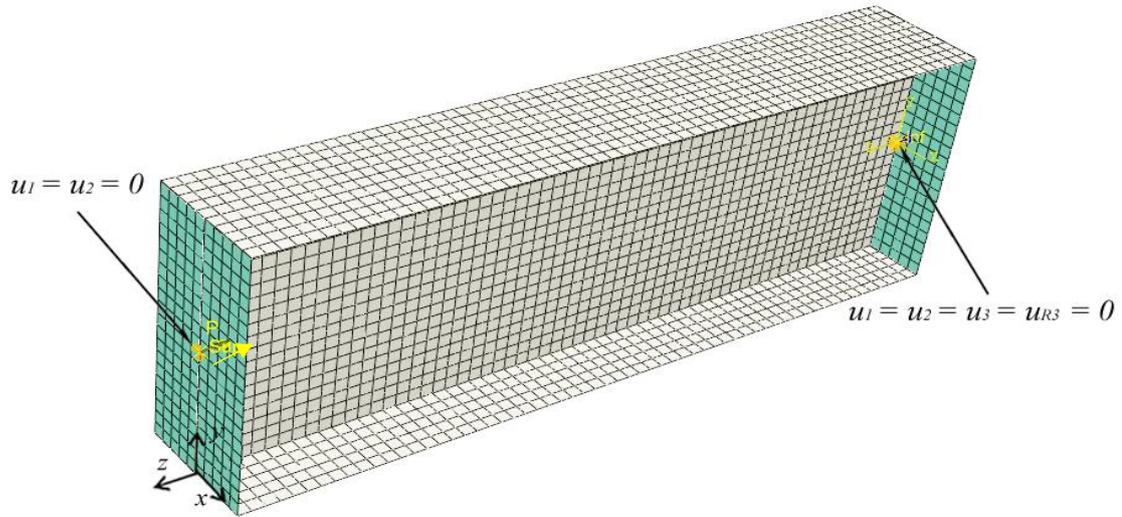
Os resultados obtidos utilizando o modelo de dano contínuo são bastante próximos dos resultados experimentais. Verificou-se que a determinação da carga referente à falha da primeira lâmina a partir do critério da máxima tensão fornece uma boa previsão no que diz respeito à capacidade de carga da coluna analisada.

Dessa forma, a partir das análises apresentadas, foi possível constatar que o modelo proposto, apesar de mais conservador, apresenta resultados consistentes e simula adequadamente o comportamento da coluna analisada.

#### ***4.2.2 Aplicação do modelo***

O modelo proposto foi utilizado em análises de colunas pultrudadas de seção I biapoiadas (Figura 48). Adotou-se as dimensões da seção transversal, as propriedades elásticas e mecânicas e as energias de fratura associadas ao material iguais ao da coluna tomada como referência na validação.

Figura 48 – Condições de contorno para colunas biapoeadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.2.1 Análise de flambagem local

Inicialmente, determinou-se a carga de flambagem local para o perfil analisado. A Tabela 17 apresenta as cargas críticas, obtidas a partir do modelo proposto, para colunas com comprimento de  $L < 90$  cm.

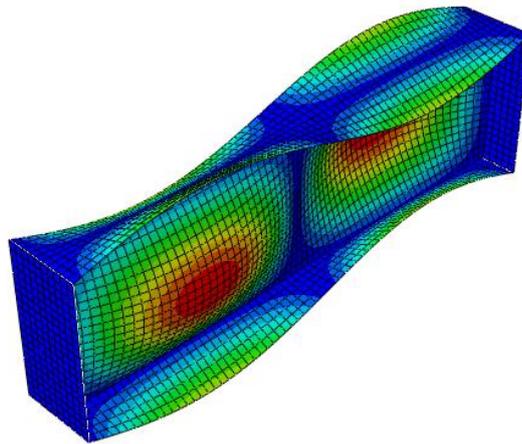
Para as colunas com  $L < 70$  cm, verifica-se que há um aumento da carga crítica de flambagem à medida que se aumenta o comprimento da coluna. Este comportamento se assemelha ao que ocorre com placas que possuem a relação comprimento/largura relativamente pequena.

Nas análises posteriores, a carga crítica determinada para a coluna com  $L = 70$  cm foi adotada como  $P_{cr,local}$ . A Figura 49 apresenta a configuração do primeiro modo de flambagem para esta coluna. Nota-se que o modo é predominantemente local.

Tabela 17 – Carga crítica de flambagem para colunas com  $L < 90$  cm

$L$ (cm)	$N^\circ$ de Elementos (Modelo proposto)	$P_{cr,local}$ (kN)
60	2400	519,06
65	2600	523,13
70	2800	531,76
80	3200	526,67
90	3600	521,98

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Primeiro modo de flambagem ( $L = 70$  cm)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, foi realizado um comparativo do resultado numérico, obtido utilizando o modelo proposto, com os resultados determinados a partir das expressões propostas por Kollár (2003) e Cardoso (2014) para predição da carga crítica de flambagem local. Com base na Tabela 18, é possível observar a concordância entre os resultados.

Tabela 18 – Comparativo para carga crítica de flambagem local

$L$ (cm)	$P_{cr,local}$ (kN)			Diferença (%)		
	Modelo Proposto	Kollár (2003)	Cardoso (2014)	A e B	A e C	B e C
70	531,76	528,05	569,84	-0,70	7,16	7,91

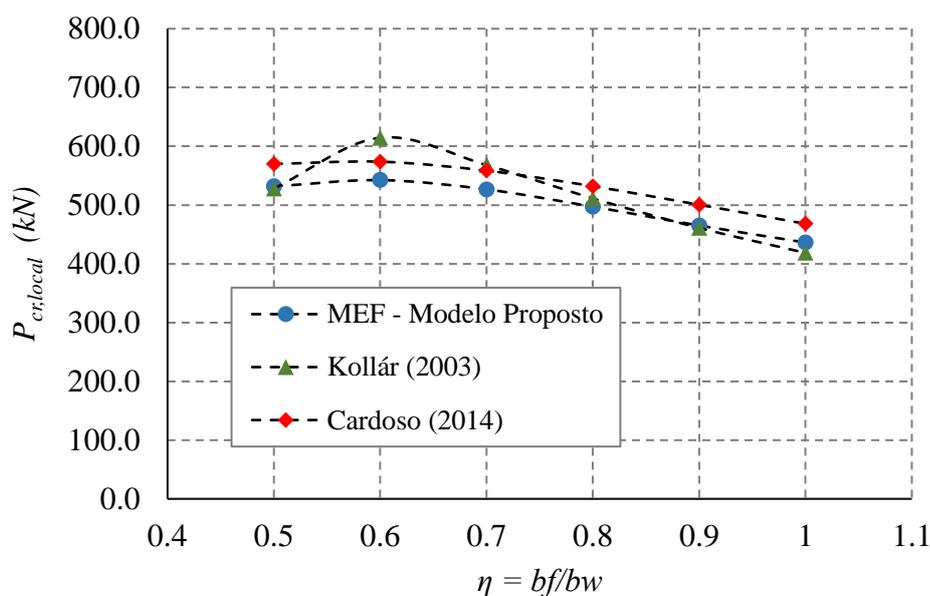
Fonte: Elaborada pelo autor.

Adicionalmente, a influência das relações geométricas da seção transversal foi avaliada. Para isto, foram realizadas análises variando a seção transversal da coluna de perfil I com  $L = 70$  cm.

Cardoso (2014) observou que para as colunas de perfil I pultrudadas comerciais ( $0,45 < \eta = b_f/b_w < 1,05$ ), analisadas em seu trabalho, a maior diferença obtida foi de 6 % em relação ao Método das Faixas Finitas.

Para as relações geométricas avaliadas no presente trabalho ( $0,50 \leq \eta = b_f/b_w \leq 1,0$ ), os resultados, obtidos a partir da expressão proposta por Cardoso (2014), apresentaram diferenças inferiores a 7,5% quando comparados aos resultados numéricos determinados utilizando o modelo proposto. Como esta expressão é baseada no Método de Rayleigh-Ritz, os valores previstos são ligeiramente superiores aos valores obtidos pelo MEF.

Figura 50 – Comparativo  $P_{cr,local}$  versus  $\eta$  para a coluna pultrudada de seção I



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser visto na Figura 50, as expressões de Kollár (2003) levaram a resultados que variaram bastante em função das relações geométricas, se aproximando consideravelmente do resultado numérico para em alguns casos, com diferenças menores que 3 %. No entanto, para  $\eta = 0,6$  observou-se uma diferença de 13,29 % o que, por sua vez, pode ser decorrente da influência da restrição adotada entre a alma e o flange.

Em resumo, foi possível constatar que as equações supracitadas apresentaram boa concordância com os resultados numéricos, com diferenças aceitáveis, mostrando-se eficientes na previsão da carga de flambagem.

#### 4.2.2.2 Interação entre o modo local e global, pós-flambagem e falha do material

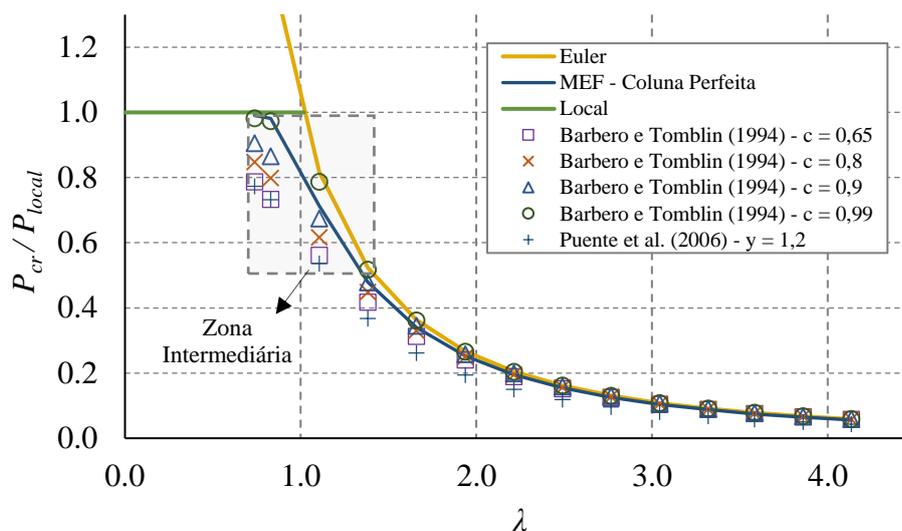
Como foi visto no Capítulo 3, a interação entre os modos de flambagem global e local possui grande influência no comportamento pós-crítico da coluna e, conseqüentemente, em sua capacidade de carga.

Nesta seção, as equações empíricas propostas por Barbero e Tomblin (1994) e Puente, Insausti e Azkune (2006), descritas anteriormente, serão aplicadas para determinação da carga crítica de colunas e os resultados obtidos serão comparados aos resultados determinados a partir de análises lineares e não lineares utilizando o modelo numérico proposto no presente trabalho.

Inicialmente, foram realizadas análises lineares, a partir do modelo proposto, para a determinação da carga crítica correspondente ao modo de instabilidade de colunas de perfil I pultrudadas com  $80\text{ cm} \leq L \leq 450\text{ cm}$ . É importante ressaltar que foram adotadas as propriedades do material e a geometria da seção transversal iguais às da coluna tomada como referência na validação do modelo.

A relação de esbeltez ( $\lambda$ ) das colunas foi calculada de acordo com a Equação (118) com  $P_{cr,local} = 531,76\text{ kN}$ , determinado anteriormente para a coluna com  $L = 70\text{ cm}$ .

A Figura 51 apresenta as curvas da carga crítica normalizada *versus* esbeltez da coluna. Estas curvas foram traçadas com base nos resultados numéricos da análise linear e nos resultados determinados utilizando a Equação (108), referente a carga crítica de Euler, a Equação (119) de Barbero e Tomblin (1994), utilizando alguns parâmetros de ajustes ( $c$ ), e a Equação (122) de Puente, Insausti e Azkune (2006), adotando  $y = 1,2$  conforme sugerido pelos autores.

Figura 51 – Carga crítica normalizada *versus* esbeltez da coluna

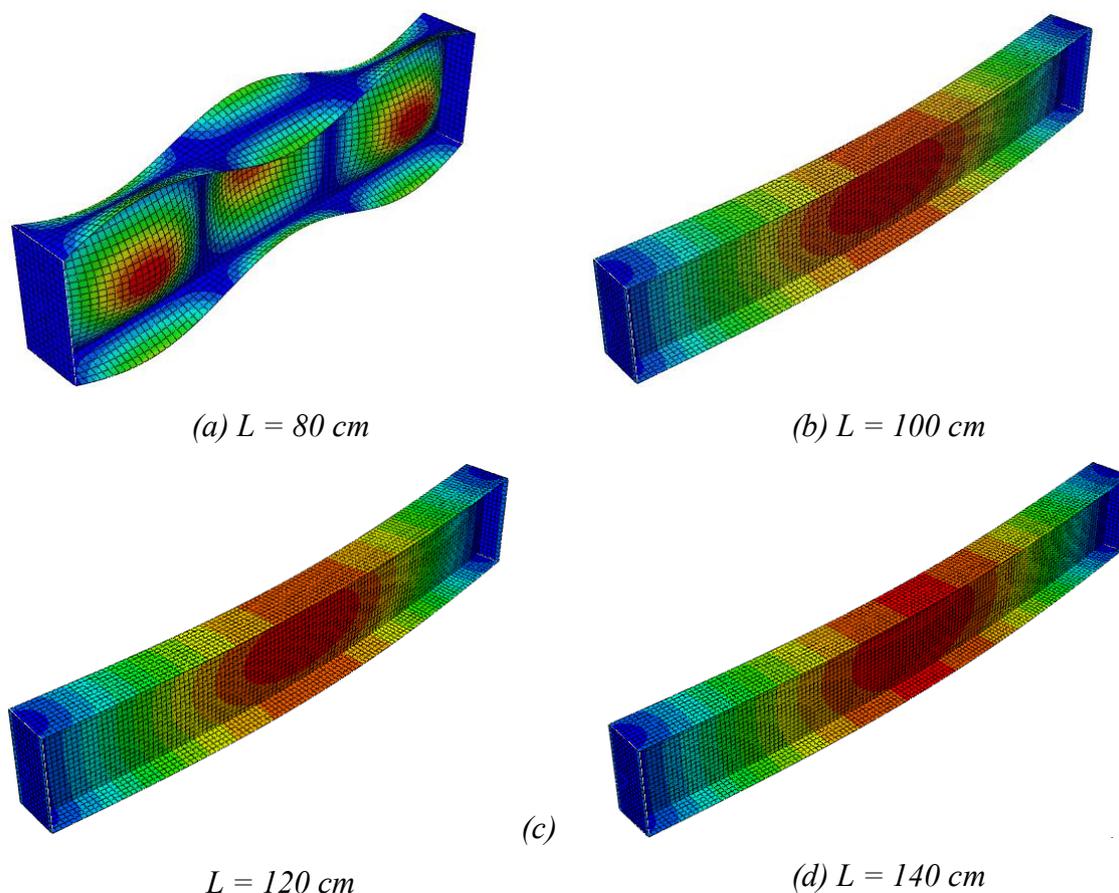
Como pode ser visto na Figura 51, à medida que se aumenta o comprimento da coluna, as cargas críticas calculadas e as determinadas numericamente se aproximam da carga crítica de Euler, independente do parâmetro de ajuste adotado, uma vez que o modo passa a ser predominantemente global, sem interferência significativa do modo local. A mesma coisa ocorre para as colunas mais curtas, visto que não há interferência significativa do modo global.

Nota-se que a curva traçada com base na equação de Barbero e Tomblin (1994) utilizando  $c = 1,0$  se aproxima dos resultados referentes à flambagem predominantemente global e predominantemente local.

Em seguida, buscando-se verificar a influência das imperfeições iniciais na capacidade de carga e no comportamento pós-crítico, foram realizadas análises lineares e não lineares em colunas da zona intermediária, demarcada na Figura 51, com  $80\text{ cm} \leq L \leq 140\text{ cm}$ .

Na Figura 52 está ilustrada a configuração do primeiro modo de flambagem das colunas analisadas a partir do modelo proposto e a Tabela 19 apresenta as cargas críticas de flambagem.

Figura 52 – Primeiro modo de flambagem das colunas analisadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 19 – Cargas críticas de flambagem obtidas a partir do modelo proposto

$L \text{ (cm)}$	$\lambda$	Nº de elementos (Modelo Proposto)	$P_{cr,flamb} \text{ (kN)}$
80	0,74	3200	526,67
100	0,92	4000	506,66
120	1,11	4800	379,41
140	1,29	5600	289,24

Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro modo de flambagem é usado na determinação da geometria imperfeita. A amplitude das imperfeições utilizadas neste trabalho abrangem o intervalo  $0,005h \leq e \leq 0,5h$ , conforme adotado por Barbero (2000) em seu estudo, onde  $h$  é a espessura do flange da coluna. Para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura, o Método do Comprimento de Arco de Riks (CRISFIELD, 1991) foi aplicado.

Assim como na validação, utilizou-se o critério da máxima tensão na determinação da carga referente à falha da primeira lâmina (FPF) e, nas análises realizadas a partir do modelo

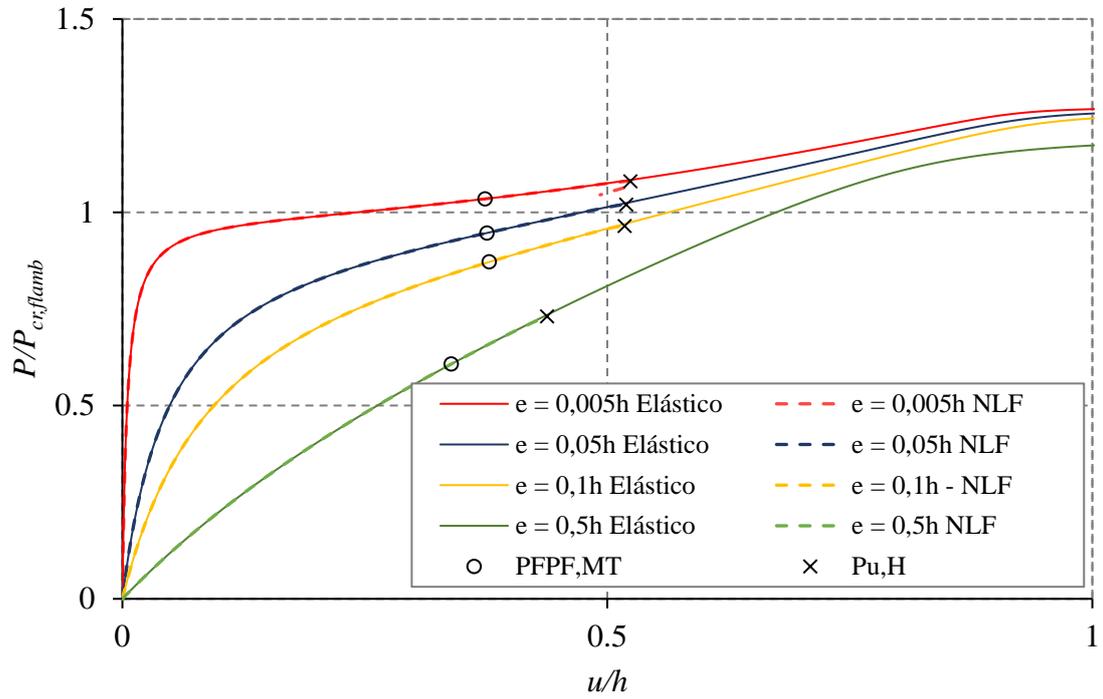
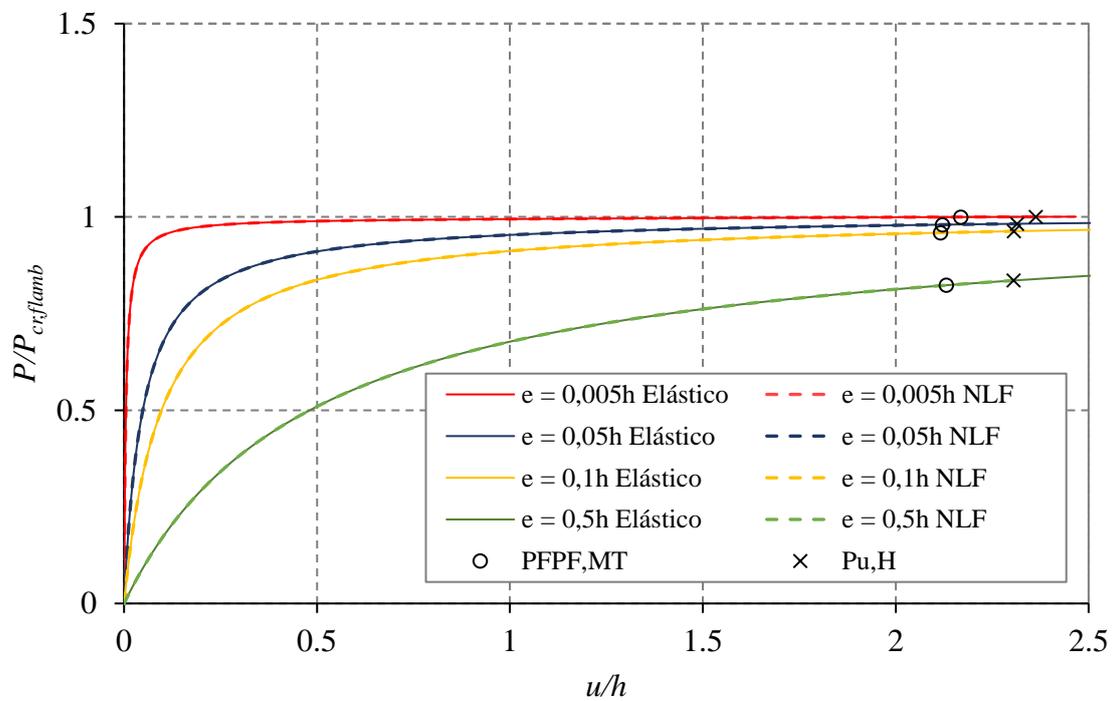
de dano contínuo, utilizou-se o critério de Hashin. Os valores da carga referente à falha da primeira lâmina ( $P_{FPF,MT}$ ) e da carga de ruptura ( $P_{u,H}$ ) estão dispostos na Tabela 20 e as curvas não lineares obtidas são apresentadas na Figura 53.

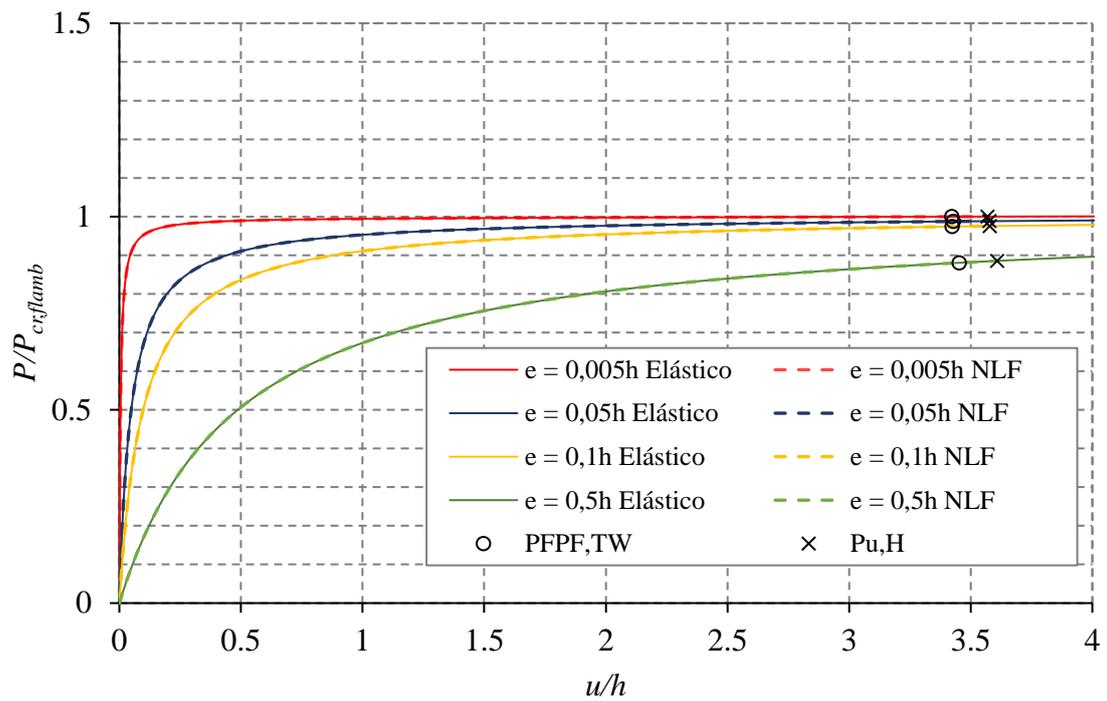
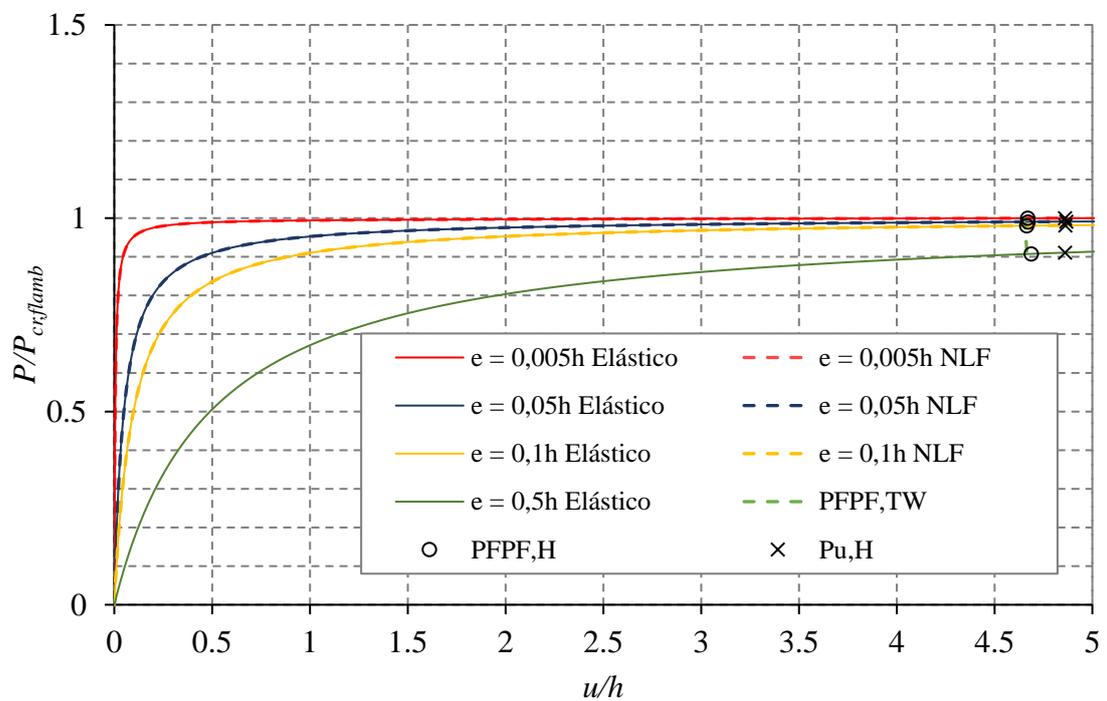
Tabela 20 – Carga referente à falha da primeira lâmina e carga de ruptura

$L$ (cm)	$e$	$P_{FPF,MT}/P_{cr,flamb}$	$P_{u,H}/P_{cr,flamb}$
80	0,005 $h$	1,0347	1,0801
	0,05 $h$	0,9465	1,0198
	0,1 $h$	0,8714	0,9647
	0,5 $h$	0,6071	0,7303
100	0,005 $h$	0,9997	1,0002
	0,05 $h$	0,9799	0,9822
	0,1 $h$	0,9591	0,9630
	0,5 $h$	0,8232	0,8354
120	0,005 $h$	0,9997	0,9999
	0,05 $h$	0,9874	0,9881
	0,1 $h$	0,9740	0,9753
	0,5 $h$	0,8804	0,8853
140	0,005 $h$	0,9998	0,9999
	0,05 $h$	0,9906	0,9912
	0,1 $h$	0,9806	0,9816
	0,5 $h$	0,9073	0,9109

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 53 – Curvas não lineares obtidas para as colunas analisadas

(a)  $L = 80 \text{ cm}$ (b)  $L = 100 \text{ cm}$

(c)  $L = 120$  cm(c)  $L = 140$  cm

Fonte: Elaborada pelo autor.

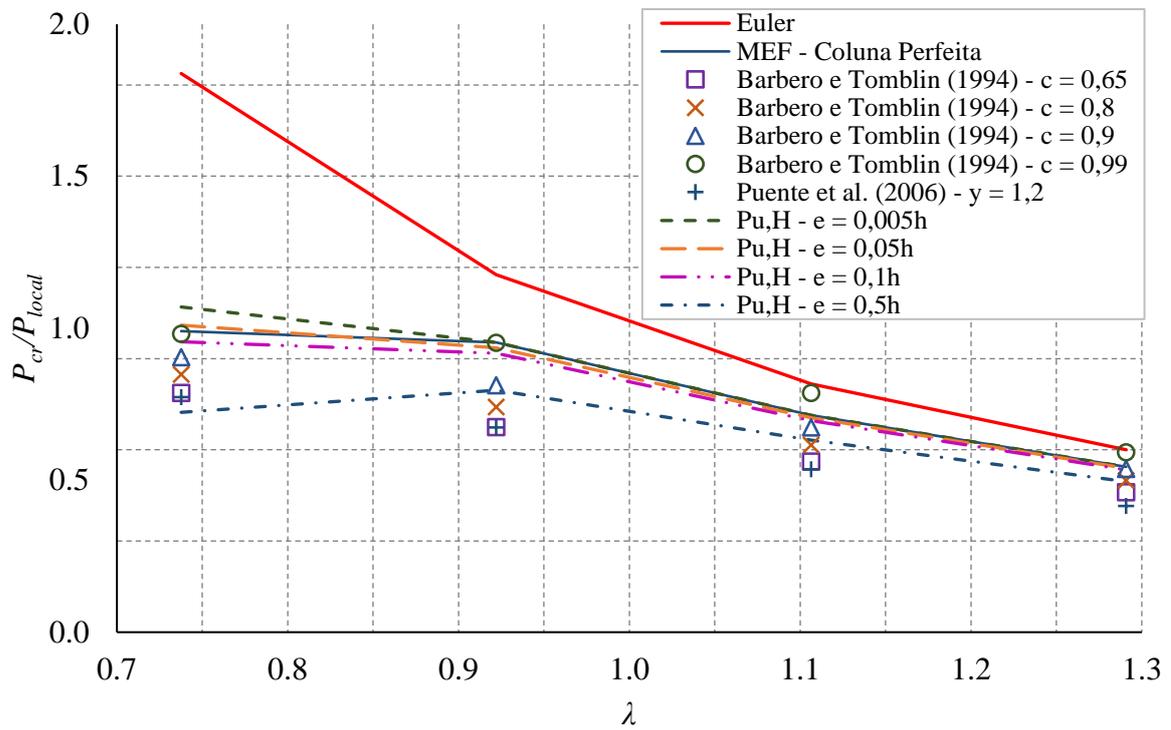
Com base nos resultados apresentados nas figuras e tabelas acima, verifica-se que a coluna com  $L = 80 \text{ cm}$  é mais sensível às imperfeições adotadas, o que por sua vez era esperado visto que seu primeiro modo de flambagem é local, tal como ilustrado na Figura 52. Adicionalmente, constata-se que na maioria dos casos a falha das colunas tende a ocorrer para cargas inferiores à sua carga crítica de flambagem, principalmente se adotadas imperfeições maiores que  $0,005 h$ .

É importante observar também que as curvas elásticas não diferem significativamente das curvas em que a não linearidade física foi considerada. Dessa forma, a determinação da carga referente a falha da primeira lâmina, utilizando o critério da máxima tensão, fornece uma ótima previsão da capacidade de carga das colunas analisadas, não havendo diferenças significativas entre  $P_{FPF,MT}$  e  $P_{u,H}$ , especialmente para as colunas intermediárias que apresentaram o primeiro modo de flambagem predominantemente global.

Outro aspecto interessante que deve ser mencionado é que o deslocamento máximo pode ser um fator limite a ser considerado para colunas maiores que 80 cm, no entanto, como pode ser visto na Figura 53, isto não acarretaria em cargas últimas menores do que as previstas na análise não linear.

A Figura 54 apresenta o efeito da amplitude da imperfeição na capacidade de carga das colunas analisadas. Com base nos resultados, verifica-se que a equação Barbero e Tomblin (1994), utilizando o parâmetro de ajuste  $c = 0,65$ , e a equação de Puente, Insausti e Azkune (2006), adotando  $\gamma = 1,2$ , fornecem uma estimativa conservadora acerca da capacidade de carga das colunas. Adicionalmente, constata-se que o parâmetro de ajuste  $c = 0,8$  fornece uma boa estimativa para a maioria dos casos analisados.

Figura 54 – Efeito da amplitude da imperfeição



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, buscou-se desenvolver modelos numéricos que possibilitassem avaliar o comportamento, desempenho e resistência de colunas de material compósito reforçado por fibras. Para isto, utilizou-se o Método de Elementos Finitos, a partir do *software* ABAQUS (SIMULIA, 2012), e modelos de casca foram propostos e validados com base em resultados experimentais e numéricos disponíveis na literatura, apresentando boa concordância.

No que se refere aos exemplos de aplicação, primeiramente avaliou-se a influência do esquema de laminação e da espessura no comportamento de colunas laminadas de perfil C. Foi possível constatar a influência do esquema de laminação na resistência à flambagem destas colunas, mostrando o potencial de uso de técnicas de otimização no projeto destas estruturas. Por outro lado, para todas as colunas analisadas, observou-se um comportamento pós-crítico estável, o que demonstra pouca influência do esquema de laminação nesse aspecto, pelo menos em colunas dominadas pela flambagem local.

No que diz respeito a influência da espessura no comportamento das colunas com laminações *cross-ply* e *angle-ply*, pôde-se concluir que o aumento da espessura teve influência significativa não só no valor da carga crítica, mas também no modo de flambagem destas colunas. Além disso, como esperado, verificou-se que o aumento da espessura influenciou significativamente o modo de falha, pois a resistência material tende a ser preponderante sobre a resistência à flambagem.

Posteriormente, verificou-se a aplicabilidade das expressões de Cardoso (2014) e Kollár (2003) na obtenção da carga crítica de flambagem local de colunas laminadas de perfil C. Nestas análises, utilizou-se a Abordagem de Rigidez (AR) e a Abordagem de Flexibilidade (AF) para determinar as propriedades equivalentes das colunas laminadas e investigou-se a influência destas abordagens nos resultados obtidos para as colunas com laminação *angle-ply*. Na maioria dos casos, a abordagem AF conduziu a resultados a favor da segurança, uma vez que ao considerar os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$ , a carga crítica é reduzida.

No que concerne à aplicabilidade das expressões analíticas aproximadas para cálculo da carga crítica local, foi possível notar que a expressão de Cardoso (2014) conduziu a resultados com boa concordância em relação aos resultados numéricos, principalmente quando se considerou a abordagem AF. Em contrapartida, é importante destacar que as aproximações adotadas por Kollár (2003), apesar de levarem a bons resultados na maioria das colunas, apresentaram imprecisões significativas em alguns casos, o que por sua vez pode estar relacionado à influência do esquema de laminação.

Para as colunas de perfil I pultrudadas, verificou-se que as expressões mencionadas apresentam bons resultados quando comparados aos resultados obtidos numericamente. Contudo, foi possível observar que as relações geométricas têm grande influência nos resultados obtidos utilizando a metodologia descrita por Kollár (2003).

Com base nas análises realizadas nas colunas de perfil I pultrudadas, com comprimento intermediário, verificou-se a influência das imperfeições iniciais na capacidade de carga e no comportamento pós-crítico de colunas. Constatou-se que conforme se aumenta a amplitude da imperfeição inicial, a resistência material tende a ser preponderante sobre a resistência à flambagem.

Além disso, verificou-se que a configuração do modo de flambagem, local ou global, também tem influência no comportamento pós-crítico, sendo algumas colunas mais sensíveis às imperfeições geométricas.

Complementarmente, confirmou-se a eficiência da abordagem baseada na Falha da Primeira Lâmina, utilizando o Critério de Máxima Tensão, na predição da capacidade de carga das colunas analisadas, uma vez que não houveram diferenças significativas nos resultados quando se considerou a não linearidade física a partir do Modelo de Dano Contínuo.

É importante ressaltar também que, como esperado, alguns parâmetros de ajustes adotados na determinação da carga crítica, considerando a interação entre os modos locais e globais, conduzem a resultados bastantes conservadores.

Dessa forma, as análises computacionais realizadas neste trabalho utilizando o MEF contribuíram para uma melhor compreensão acerca dos fenômenos de instabilidade e do comportamento de colunas de material compósito reforçado por fibras.

## **5.1 Sugestões para trabalhos futuros**

A partir do presente trabalho e do conhecimento adquirido no desenvolvimento do mesmo, pode-se sugerir os seguintes trabalhos a serem desenvolvidos:

- a) Estudar a interação das flambagens local e global em colunas laminadas de material compósito reforçado com fibras a partir da utilização do MEF e verificar a aplicabilidade das expressões e coeficientes de ajustes comumente adotados para colunas pultrudadas.
- b) Considerar a influência de outros modos de flambagem no estudo referente a interação das flambagens local e global das colunas pultrudadas de perfil I.

- c) Estudar a flambagem lateral torsional em colunas laminadas e pultrudadas de material compósito reforçado por fibras.
- d) Utilizar os modelos de casca propostos no estudo do comportamento, resistência e desempenho de outros perfis laminados e pultrudados de material compósito reforçado com fibra, incluindo outras condições de apoio.
- e) Utilizar o modelo de dano contínuo e verificar a influência da análise não linear física nos resultados obtidos para colunas laminadas de material compósito reforçado com fibra.

## REFERÊNCIAS

ACP Composite. Disponível em: < <http://www.acpsales.com/manufacturing.htm> >. Acesso em: 01 mar. 2017.

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J.; CHANDRASHEKHARA, K. **Analysis and Performance of Fiber Composites**. 3. Ed. John Wiley & Sons, 2006, 562p.

AKBULUT, H.; GUNDOGDU, O.; SENGÜL, M. Buckling behaviors of laminated composite stepped flat columns. **Finite Elements in Analysis and Design**. v. 46, p. 1061-1067, 2010.

AKHRAS, G.; LI, W. C. Progressive failure analysis of thick composite plates using the spline finite strip method. **Composite Structures**, v. 79, p. 34–43, 2007.

ANIDO, R. L.; DAVALOS, J. F.; BARBERO, E. J. Experimental Evaluation of Stiffness of Laminated Composite Beam Elements Under Flexure. **Journal of Reinforced Plastic and Composites**. v. 14, p. 349-361, 1995.

ANGÉLICO, R. A. **Avaliação de modelos de falhas progressivas para estruturas em material compósito**. 2009. 105f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

BANAT, D.; MANIA, R. J. Comparison of failure criteria application for FML column buckling strength analysis. **Composite Structures**. v. 140, p. 806-815, 2016.

BANK, L. C. **Composite for construction: Structural design with FRP materials**. John Wiley & Sons, 2006.

\_\_\_\_\_. Modifications to Beam Theory of bending and twisting of open-section composite beams. **Composite Structures**. v. 15, p. 93-114, 1990.

BANK, L. C.; BEDNARCZYK, P. J. A beam theory for thin-walled composite beams. **Composites Science and Technology**. v. 32, p. 265–277, 1988.

BARBERO, E. J. Prediction of Buckling-Mode Interaction in Composite Columns. **Mechanics of Composite Materials and Structures**. v. 7, p. 269-284, 2000.

BARBERO, E. J. **Finite Element Analysis of composite materials**. CRC Press, Boca Raton, FL, 2007.

\_\_\_\_\_. **Introduction to composite materials design**. 2. ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

BARBERO, E.J; COSSO, F. A; ROMAN, R. WEADON, T. L. Determination of material parameters for Abaqus progressive damage analysis of E-glass epoxy laminates. **Composites: Part B**. v. 46, p. 211-220, 2013.

BARBERO, E. J; DEDE, E. K.; JONES, S. Experimental verification of buckling-mode interaction intermediate-length composite columns. **International Journal of Solids and Structures**. v.37, n. 29, p. 3919-3934, 2000.

BARBERO, E. J; DEVIVO, L. Beam-Column design equations for wide-flange pultruded structural shapes. **Journal of Composite for Construction**. v.3, p. 185-191, 1999.

BARBERO, E. J. RAFTOYIANNIS, I. G. Local Buckling of FRP beams and columns. **Journal of Materials in Civil Engineering**. v. 5, n. 3, p. 339-355, 1993.

BARBERO, E. J; TOMBLIN, J. Buckling testing of composite columns. **AIAA Journal**. v. 30, n. 11, p. 2798-2800, 1992.

\_\_\_\_\_. Euler Buckling of Thin-Walled Composite Columns. **Thin-Walled Structures**. v. 17, p. 237-258, 1993.

\_\_\_\_\_. A phenomenological design equation for FRP columns with interaction between local and global buckling. **Thin-Walled Structures**. v. 18, p. 117-131, 1994.

BELO, I. M. **Análise eficiente de compósitos laminados planos utilizando-se a formulação de elementos finitos corrigida *a-priori* sem os efeitos do travamento**. 2006. 162f. Dissertação

(Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

CAMANHO, P. P.; DÁVILA, C. G. Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials. Relatório Técnico. National Aeronautics and Space Administration - NASA, TM-2002-211737, 2002.

CARDOSO, D. C. T. **Compressive strength of pultruded glass-fiber reinforced polymer (GFRP) columns**. 2014. 194 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

CARDOSO, D.C.T; HARRIES, K. A.; BATISTA, E. M. Compressive strength equation for GFRP square tube columns. **Composites: Part B**. v. 59, p. 1-11, 2014.

CARDOSO, D.C.T; HARRIES, K. A.; BATISTA, E. M. Compressive Local Buckling of Pultruded GFRP I-Sections: Development and Numerical/Experimental Evaluation of an Explicit Equation. **J. Composites Construction**.. v. 19, n. 2, p. 04014042-1-12, 2015.

CLARKE, J. L. **Structural design of polymer composite – Eurocomp design code and handbook**. E&FN Spon, London, 1996.

CHANG, F.; CHANG, K.-Y. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations. **Journal of Composite Materials**. v. 21, p. 834–855, 1987.

CHAWLA, K. K. **Composite Materials Science and Engineering**. 3 Ed. Springer, New York, 2013.

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. John Wiley & Sons, 2002.

CORREIA, M. M. **Comportamento estrutural de perfis pultrudidos de GFRP**. 2012. 158f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2012.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. Vol. 1. England: John Wiley and Sons, 1991.

DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**. 2. Ed. New York: Oxford University Press, 2006.

DÁVILA, C. G.; CAMANHO, P. P.; ROSE, C. A. Failure criteria for FRP laminates. **Journal of Composite Materials**. v. 39, p. 323-345, 2005.

DEBSKI, H.; KUBIAK, T.; TETER, A. Buckling and postbuckling behavior of thin-walled composite channel section column. **Composite Structures**. v. 100, p. 195-204, 2013a

DEBSKI, H.; KUBIAK, T.; TETER, A. Experimental investigation of channel-section composite profiles behavior with various sequences of plies subjected to static compression. **Thin-Walled Structures**. v. 71, p. 147-154, 2013b.

DONADON, M. V.; LANNUCCI, L; FALZON, B. G.; HODGKINSON. J. M; ALMEIDA, S.F.M. A progressive failure model for composite laminates subjected to low velocity impact damage. **Computers and Structures**, v. 86, p. 1232–1252, 2008.

DUTHEIL J. Verifica delle aste compresse: Principi fondamentali. **Costruzioni Metalliche**. v. 18, n. 4, p. 266-275, 1966.

GALAMBOS, T. V.; SUROVEK, A. E. **Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers**. John Wiley & Sons, New Jersey, 1998.

GARNICH, M. R.; AKULA, V. M. K. Review of Degradation Models for Progressive Failure Analysis of Fiber Reinforced Polymer Composites. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, p. 1-33, 2009.

GIBSON, R. F. **Principles of Composite Material Mechanics**. McGraw-Hill, New York, 1994.

GRAY, E. F. **Structural plastics design manual**. ASCE, New York, 1984.

HA, S. K.; JIN, K, K.; HUANG, Y. Micro-Mechanics of Failure (MMF) for continuous fiber

reinforced composites. **Journal of Composite Materials**. v. 42, n. 18, p. 1873-1895, 2008.

HASHEM, Z. A.; YUAN, R. L. Short versus long column behavior of pultruded glass-fiber reinforced polymer composites. **Construction and Building Materials**. v. 15, p. 369–378, 2001.

HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of Applied Mechanics**. v. 47, p. 329-334, 1980.

\_\_\_\_\_. Fatigue failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of Applied Mechanics**. v. 48, p. 846-852, 1981.

HASHIN, Z.; ROTEM, A. A Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. **Journal of Composite Materials**. v. 7, p. 448-464, 1973.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. Ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999, 270p.

KAW, A. K. **Mechanics of Composite Materials**. 2. Ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2006.

KNIGHT, N. F. User-defined material model for progressive failure analysis. Relatório Técnico. National Aeronautics and Space Administration - NASA, CR-2006-214526, 2006.

KOLLÁR, L. P. Discussion of “Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis” by Pizhong Qiao, Julio F. Davalos, and Jialai Wang. **Journal of Structural Engineering**. v. 128, n. 8, p. 1091-1093, 2002a.

KOLLÁR, L. P. Buckling of unidirectionally loaded composite plates with one free and one rotationally restrained unloaded edge. **Journal of Structural Engineering**. v. 128, n. 9, p. 1202-1211, 2002b.

KOLLÁR, L. P. Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections. **Journal of Structural Engineering**. v. 129, n. 11, p. 1503-1513, 2003.

KOLLÁR, L. P. Buckling of rectangular composite plates with restrained edges subjected to axial loads. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 33, n. 23, p. 2174–2182, 2014.

KOLLÁR, L. P. Flexural-torsional buckling of open section composite columns with shear deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38 p. 7525–7541, 2001.

KOLLÁR, L. P.; PLUZSIK, A. Analysis of thin-walled composite beams with arbitrary layup **Journal of Reinforced Plastics and Composites**. v. 21, n. 16, p. 1423-1454, 2002.

KUBIAK, T.; MANIA, R. J. Hybrid versus FR laminate channel section columns – Buckling and postbuckling behaviour. **Composite Structures**. v. 154, p. 142-149, 2016.

KURAISHI, A.; TSAI, S. W.; LIU, K. K. S. A progressive quadratic failure criterion, part B. **Composites Science and Technology**. v. 62, p. 1683-1695, 2002.

LAPCZYK, I.; HURTADO, J. A. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 38, p. 2333–2341, 2007.

LIEW, K. M.; ZHAO, X.; FERREIRA, A. J. M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. **Composite Structures**, v. 93, p. 2031–2041, 2011.

LOPES, I. A. F. **Estudo do Processo de Infusão a Vácuo em Materiais Compósitos**. 2009. 63f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Metalúrgica e de Materiais) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2009.

MAQUOI, R.; RONDAL, J. Mise en équation des nouvelles courbes européennes de flambement. **Construct. Métalli**. v. 1, p. 17-30, 1978.

MASSA, J. C.; BARBERO, E. J. A Strength of Materials Formulation for thin walled composite beams with torsion. **Journal of Composite Materials**, v. 32, n. 17, p. 1560–1594, 1998.

MATZENMILLER, A.; LUBLINER, J.; TAYLOR, R. L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. **Mechanics of Materials**, v. 20, p. 125–152, 1995.

MORORÓ, L. A. T. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**. 2013. 156f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

MORORÓ, L. A. T.; MELO, A. M. C.; PARENTE JUNIOR, E.; HOLANDA, A S.; ALMEIDA, D. C. Global analysis of laminated tubes. **Congresso Ibero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia (CILAMCE)**. v 31, p. 1367–1383, 2010.

MOTTRAM, J. T. Determination of critical load for flange buckling in concentrically loaded pultruded columns. **Composites Part B: Engineering**. v. 35, p. 35-47, 2004.

\_\_\_\_\_. Lateral-torsional buckling of a pultruded I-beam. **Composites**. v. 23, p. 81-92, 1992.

MOTTRAM, J. T.; BROWN, N. D.; ANDERSON, D. Buckling characteristics of pultruded glass fibre reinforced plastic columns under moment gradient. **Thin-Walled Structures**. v. 41, p. 619-638, 2003.

NAGAHAMA, K. J. **Análise de estabilidade local em perfis de seção aberta em aço e em resina reforçada com fibra de vidro**. 2003. 183 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

NALI, P.; CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. **Composites: Part B: Engineering**. v. 43, p. 280-289, 2012.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL OF ITALY, **CNR-DT 205/2007**: Guide for the design and construction of structures made of thin FRP pultruded element, Rome, 2008.

NUNES, F.; SILVESTRE, N.; CORREIA, J. R. Structural behaviour of hybrid FRP pultruded columns. Part 1: Experimental study. **Composite Structure**. v. 139, p. 291-303, 2016a.

NUNES, F.; SILVESTRE, N.; CORREIA, J. R. Structural behaviour of hybrid FRP pultruded columns. Part 2: Numerical study. **Composite Structure**. v. 139, p. 304-319, 2016b.

PARÍS, F. A study of failure criteria of fibrous composite materials. Relatório Técnico. National Aeronautics and Space Administration - NASA, CR-2001-210661, 2001.

PECCE, M.; COSENZA, E. Local buckling curves for the design of FRP profiles. **Thin-Walled Structures**. v. 37, p. 207-222, 2000.

PIERIN, I. **Estudo de estabilidade de perfis pultrudados de materiais PRFV**. 2005. 181 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

PIETROPAOLI, E. Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (USERMAT) developed and implemented in ANSYS ©. **Appl Compos Mater**. v. 19, p. 657-668, 2012.

PUENTE, I; INSAUSTI, A; AZKUNE, M. Buckling of GFRP Columns: An Empirical Approach to Design. **Journal of Composites for Construction**. v. 10, p. 529-537, 2006.

PUCK, A; SCHÜRMAN, H. Failure Analysis of FRP Laminates by means of physically based phenomenological models. **Composites Science and Technology**. v. 58, p. 1045–1067, 1998.

\_\_\_\_\_. Failure Analysis of FRP Laminates by means of physically based phenomenological models. **Composites Science and Technology**. v. 62, p. 1633–1662, 2002.

QIAO, P.; DAVALOS, J. F.; WANG, J. Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis. **Journal of Structural Engineering**. v. 127, n. 3, p. 245-255, 2001.

QIAO, P.; SHAN, L. Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes. **Composite Structures**. v. 70, p. 468-483, 2005.

QIAO, P.; ZOU, G.; DAVALOS, J. Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams. **Composite Structures**. v. 60, p. 205-217, 2003.

RAUCH, H. W.; SUTTON, W. H.; MCCREIGHT, L. R. **Ceramic fibers and fibrous**

**composite materials.** Vol. 3. New York: Academic Press. 1968.

REDDY, J. N. An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates. **Composite Structures**, v. 25, p. 21–35, 1993.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis.** 2. Ed. New York. CRC Press, 2004.

REDDY, Y. S.; MOORTHY, C. M. D.; REDDY, J.N. Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 30, n. 5, p. 629–649, 1995.

REDDY, Y. S; REDDY, J. N. Three-dimensional finite element progressive failure analysis of composite laminates under axial extension. **Journal of composite technology and research**, v. 15, n. 2, p. 73–87, 1993.

REZENDE, M. C.; BOTELHO, E. C. O uso de compósitos estruturais na indústria aeroespacial. **Polímeros: Ciência e Tecnologia.** v. 10, n. 2, p. e4-e10, 2000.

RICCIO, A; COSTANZO, C. D; GENNARO, P. D.; SELLITTO, A.; RAIMONDO, A. Intra-laminar progressive failure analysis of composite laminates with a large notch damage. **Engineering Failure Analysis.** v. 73, p. 97–112, 2017.

SANTIAGO, D.; LOMBERA, G.; SANTIAGO, U.; MOSCHIAR, S. T. Modelado Numérico del Proceso de Pultrusión en Materiales Compuestos. **Materials Research.** v. 6, n. 4, p. 583-589, 2003.

SLEIGHT, D. W. Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures. Relatório Técnico. National Aeronautics and Space Administration - NASA, TP-1999-209107, 1999.

SOUSA, S. R. M. DE S. **Estudo de uma máquina de enrolamento de filaments e análise de seu produto por elementos finitos.** 2007. 154f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Mecânica). – Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SIMULIA. **ABAQUS/Standard user's manual**, Version 6.12, Providence, RI, USA, 2012.

TITA, V.; CARVALHO, J.; SANTOS, N. C. Estudo do comportamento mecânico de materiais compósitos utilizando o Método de Elementos Finitos. In: II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2002, João Pessoa. **Anais...**[S.1], 2002.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. Relatório Técnico. Air Force Materials Laboratory, 1972.

TURVEY, G. J.; ZHANG, Y. A computational and experimental analysis of the buckling, postbuckling and initial failure of pultruded GRP columns. **Computers and Structures**. v. 84, p. 1527-1537, 2006.

VANEVENHOVEN, L. M; SHIELD, C. K.; BANK, L. C. LRFD Factors for Pultruded Wide-Flange Columns. **Journal of Structural Engineering**, v. 136, n. 5, p. 554–564, 2010.

VINSON, J. R; SIERAKOWSKI, R. **The behavior of structures composed of composite materials**. 2. Ed. Kluwer Academic Publishers, New York, 2004.

VIOLEAU, D.; LADEVEZE, P.; LUBINEAU, G. Micromodel-based simulations for laminated composites. **Composites Science and Technology**. v. 69, p. 1364-1371, 2009.

YOKOYAMA, N. O.; DONADON, M. V.; DE ALMEIDA, S. F. M. A numerical study on the impact resistance of composite shells using an energy based failure model. **Composite Structures**, v. 93, n. 1, p. 142–152, 2010.

ZAHN, J. J. Re-examination of Ylinen and other column equations, interaction of rupture and buckling in wood members. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 10, p. 2716-2728, 1992.

ZUREICK, A.; SCOTT, D. Short-Term Behavior and Design of Fiber-Reinforced Polymeric Slender Members under Axial Compression. **Journal of Composites for Construction**. v. 4, p. 140-149, 1997.