



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

HOUZÉIROU DANTONKA BELLO

ANÁLISE AVANÇADA DE VIGAS MISTAS SEMICONTÍNUAS

FORTALEZA

2015

HOUZÉIROU DANTONKA BELLO

ANÁLISE AVANÇADA DE VIGAS MISTAS SEMICONTÍNUAS

Proposta de Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: João Batista Marques de Sousa Junior

FORTALEZA

2015

ANÁLISE AVANÇADA DE VIGAS MISTAS SEMICONTÍNUAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. João Batista Marques de Sousa Junior.

Aprovada em _____/_____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof.

Prof.

Prof.

Prof.

*Em memória ao meu pai, Bello
Dantonka, que em paz descanse.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes, a Allah por me guiar, me outorgar saúde, força e paciência para a realização deste trabalho.

À minha mãe, por seu apoio incondicional e nunca me deixar desanimar durante todos esses dez anos fora de casa, mesmo nos momentos mais difíceis de sua vida.

Ao professor João Batista Marques Souza, grande profissional, pela orientação, paciência e conhecimentos repassados ao longo desses últimos 2 anos.

Aos professores Junior Evandro Parente Junior, Antônio Macário Cartaxo de Melo, Tereza Denyse de Araújo pelas diversas vezes que me ajudaram durante esta etapa da minha formação.

Em especial a Cezar Dantas e Raquel Colares, primeiro por esta considerável amizade tecida durante a minha estância aqui no Brasil e segundo por toda a ajuda outorgada a minha pessoa, nas situações profissional como pessoais.

A todas as amizades feitas no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização ao longo destes anos, por toda a ajuda, em especial a Pedro Sanderson Basto Barros e Elias Barroso.

A Raphael Henrique Souza, por sua sincera amizade, conselhos e proporcionar a mim um ambiente adequado de trabalho.

Aos meus amigos: Marcelo, Fabio, Tony, Mário, por todo apoio e companheirismo.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta neste trabalho.

A CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

O crescimento do uso de estruturas mistas em obras de engenharia civil, em particular de aço e concreto por razão do seu considerável ganho nas suas propriedades mecânicas quando os materiais trabalham em conjunto em relação às estruturas comuns, contribuem para um grande aporte na economia e na prática da construção. Enfocando-se no projeto de vigas mistas de aço e concreto, há uma forma particular que o distinguem de outros tipos de vigas, como a interação parcial entre componentes, onde intervêm os deslizamentos relativos entre os elementos de aço e concreto ao serem ligados por conectores de cisalhamento.

Além da interação parcial existente entre os materiais, a outra consideração é o correto dimensionamento da ligação mista existente nos apoios do elemento da viga mista, por isso é necessário o estudo de cada elemento que a constitui, de aí o requerimento de cálculos complexos. A resistência de todos os componentes, rigidez e capacidade de rotação serão as análises básicas a ser realizada.

O projeto baseado em desempenho tende a fazer uma análise do comportamento da estrutura de forma real, o que leva a realizar um trabalho minucioso e completo. Daí a incorporação do Método dos Elementos Finitos. O objetivo desta dissertação visa desenvolver, implementar e verificar modelos numéricos baseado no método dos Elementos Finitos, considerando não só a não linearidade física e geométrica para a análise avançada de vigas mistas, mas também os efeitos da interação parcial e da semi-continuidade da viga nos nós dos elementos suportes. A implementação do modelo será baseada no modelo de SOUSA Jr.(2013). Os resultados obtidos após a análise permitirão avaliar e comparar com métodos de análise tradicionais que utilizam o cálculo de esforços em regime elástico e a sua validação. Devido a isso, devera-se reajustar os modelos não-lineares que vão ser desenvolvidos através de comparações com outros resultados tanto numéricos como concebidos mediante experienciais que já existem na literatura. Desta forma será possível verificar a precisão e a confiabilidade do modelo do elemento proposto.

Palavras-chave: Vigas mistas, Ligações mistas, Interação parcial, semi-continuidade, Método dos Elementos Finitos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Lajes mistas	16
Figura 2- Tipos de seções mistas em vigas.....	16
Figura 3- Cantoneiras parafusadas na alma e na mesa inferior da ligação mista	18
Figura 4- Esforços atuantes e deslizamento em uma seção mista de aço-concreto.....	19
Figura 5- Ligação mista de edificações de um pilar com chapa na extremidade com altura total	21
Figura 6- Ligação mista de edificações de uma viga com cantoneiras parafusadas na alma e na mesa inferior da viga apoiada.....	22
Figura 7- Relação tensão x deformação para armadura (simplificada)	24
Figura 8- Curva aproximada OABD	27
Figura 9 - Relação <i>carga-deslocamento</i>	28
Figura 10 - Modelo para a rigidez do conjunto da ligação mista	32
Figura 11- Modelo para os deslocamentos dos componentes da ligação mista	33
Figura 12 - Curvatura ao longo da viga.....	36
Figura 13- forças nodais e deslocamentos de uma viga mista com conexão flexível	39
Figura 14- Campos de deslocamento dos elementos finitos com 8, 10 e 16 graus de liberdade (GL)	40
Figura 15- Campos de deslocamento, deformação e tensão do elemento misto	41
Figura 16- Ligação entre elemento de interface e elementos de viga	43
Figura 17- Graus de liberdade do elemento de interface.....	43
Figura 18- Elemento de 10 graus de liberdade da viga mista.....	44
Figura 19- Campo de deslocamento do modelo de viga mista.....	44
Figura 20- Elemento finito geométrico não linear de 24 graus de liberdade com interação parcial horizontal e transversal	45
Figura 21- Elemento finito geométrico linear de 22 graus de liberdade com interação parcial horizontal e transversal.....	46
Figura 22- Campo de deslocamento para uma viga mista de múltiplas camadas	47
Figura 23- Sistema de viga mista semicontínuas.	48
Figura 24- Deformação de um segmento da viga mista com interação parcial.....	52
Figura 25- Graus de liberdade do elemento finito para a implementação.....	53
Figura 26- Modelo de análise para ligações mistas.....	56

Figura 27 – Viga mista com interação parcial uniformemente carregada: a) Biapoiada; b) Semi-rígida; c). Engastada; d) Seção transversal (mm).	58
Figura 28 – Discretização do elemento de viga mista: a) Biapoiada e Engastada; b) Semi-rígida.....	61
Figura 29 – Grau de liberdade do elemento finito usado neste trabalho: a) viga simplesmente apoiada e Engastada; b) viga semi-rígida.....	62
Figura 30 – Deformada da viga mista	63
Figura 31 - Viga mista semicontínua com interação parcial e sua correspondente seção transversal.....	65
Figura 32 – Leis constitutivas: a) concreto; b) aço; c) barra de reforço; d) conexão da interface	66
Figura 33 – Graus de liberdade correspondente aos deslocamentos nodais do elemento de viga	66
Figura 34 – Curvas Cargas-Deslocamentos com diferentes condições de apoios.....	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	OBJETIVOS	14
2.1	Objetivos gerais.....	14
2.2	Objetivos específicos.....	14
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3.1	Introdução.....	15
3.2	Vigas mistas de Aço e Concreto.....	15
3.3	Ligações mistas.....	17
3.4	Solução Analítica das vigas mistas e ligações mistas.....	19
3.4.1	Vigas mistas com interação parcial	19
3.4.2	Ligações mistas	21
3.4.2.1	Barras de armaduras na ligação mista	22
3.4.2.1.1	Rigidez inicial	23
3.4.2.1.2	Resistência de cálculo	23
3.4.2.1.3	Capacidade de deformação.....	23
3.4.2.2	Conectores de cisalhamentos	24
3.4.2.2.1	Rigidez inicial	25
3.4.2.2.2	Resistência de cálculo	26
3.4.2.2.3	Capacidade de deformação.....	26
3.4.2.3	Ligação parafusada entre a mesa inferior e a cantoneira.....	28
3.4.2.3.1	Rigidez inicial	29
3.4.2.3.2	Resistência última	30
3.4.2.3.3	Capacidade de deformação.....	31
3.4.3	Comportamento das ligações mistas.....	31
3.4.3.1	Rigidez inicial.....	32
3.4.3.2	Resistência última.....	33
3.4.3.3	Capacidade de rotação disponível.....	34

3.4.4	Análise de sistemas indeslocáveis com ligações mistas.....	34
3.4.4.1	Capacidade de rotação necessária da ligação mista.....	35
3.5	Solução numérica.....	38
3.5.1	Vigas mistas com interação parcial	38
4	MÉTODO DE ANÁLISE PROPOSTO	49
4.1	Modelo para análise de vigas mistas contínuas.....	50
4.2	Modelo para análise de ligações mistas em vigas semicontínuas.....	55
5	EXEMPLOS APLICADOS	57
5.1	PRIMEIRO EXEMPLO – Análise linear de viga mista uniformemente carregada em um vão.....	58
5.2	SEGUNDO EXEMPLO: Análise não linear de viga mista semicontínua com dois vãos uniformemente carregada.....	64
6	CONCLUSÕES	Erro! Indicador não definido.
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71

1 INTRODUÇÃO

Em situações práticas, considerando estruturas mistas com interação parcial ou com a semicontinuidade entre elementos, torna-se necessário levar em consideração o desenvolvimento de ferramentas numéricas adequadas para que a análise do comportamento da estrutura seja o mais próximo da realidade, já que as possíveis formas de colapso da estrutura podem resultar de forma bastante distinta quando faz-se a análise sem considerar essas ferramentas (DALL’ASTA; ZONA , 2004a). Essas ferramentas numéricas a serem desenvolvidas são os mecanismos computacionais capazes de fazer simulações precisas para o comportamento não linear, que influi nas estruturas até seu colapso.

Os elementos estruturais mistos, principalmente de aço e concreto, são formados por um perfil de aço ou chapa metálica e uma seção de concreto (armado ou não). Para que esses dois materiais trabalhem como um só, deve ser garantida uma interação entre os componentes, o que é obtido por meios de conectores, soldagem, atritos, ressalto ou por aderência e a redistribuições de cargas (QUEIROZ et al., 2001).

A interação garantida entre os dois componentes pode ser completa ou parcial, em função da rigidez existente na conexão. A peculiaridade destes tipos de estruturas é justamente quando o projetista considera fatores técnicos e econômicos para que a conexão entre os materiais permita um deslizamento relativo entre os mesmos, chamado de interação parcial. Essa rigidez de conexão exerce um papel muito importante na análise e dimensionamento das estruturas mistas e já foram realizadas muitas investigações nos últimos anos sobre sua simulação numérica (RANZI et al., 2010; SOUSA; da SILVA, 2010; SOUSA; OLIVEIRA; da SILVA, 2010).

Ultimamente um número considerável de trabalhos foram desenvolvidos por vários autores nesta área de pesquisa de estruturas mistas de diversos tipos de materiais e com diversas formas de acoplamento. Entretanto, o uso de vigas mistas com ligações mistas nos apoios, é uma área de pesquisa pouca desenvolvida. Entende-se por “ligação mistas” ligação na qual a parte superior do mecanismo da resistência do momento fletor negativo no apoio é constituída pelo concreto e/ou as barras de armaduras da laje. A parte inferior por outro lado, é constituída por outro tipo de ligação entre o elemento misto e na alma e/ou na mesa inferior do elemento suporte, tal como, chapa de extremidade de total altura, cantoneira de suporte do perfil de aço entre outros. A força de cisalhamento pode ser transmitida para o elemento de apoio através das cantoneiras comuns da alma (chapa simples, chapa de extremidade). Todo

esse mecanismo é possível só se existir uma interação entre os elementos de concreto e de aço mediante conectores de cisalhamento para a transmissão dos esforços.

Para uma ligação mista ser chamada de ligação mista de resistência parcial, o momento de plastificação da viga mista formada pelo perfil de aço e pelas barras de armadura da laje de concreto tem que ser superior ao momento fletor resistente da ligação mista. Para a utilização das ligações de resistência parcial é necessário o conhecimento de seu comportamento, ou seja, da relação momento curvatura entre o elemento suporte e a viga. Essa relação fornece as principais características da ligação que são: rigidez inicial, resistência última e capacidade de rotação.

A rigidez inicial é importante para cargas de utilização, para verificar se os limites de deslocamentos são atendidos. A resistência última permite escolher uma ligação adequada na hora de aplicar os esforços atuantes e por outro lado a capacidade de rotação necessária junto com a presença da formação de rótulas plásticas na ligação permitem a redistribuição de momentos até que sejam aproveitados no máximo os materiais.

A proposta deste trabalho de dissertação visa desenvolver, implementar e verificar modelos numéricos baseado no método dos Elementos Finitos, considerando não só a não linearidade física e geométrica para a análise avançada de vigas mistas em múltiplas camadas, mas também os efeitos da interação parcial e da semi-continuidade entre vão de um elemento. A implementação do modelo será baseada no trabalho (Sousa Jr, 2013).

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos gerais

A análise de elementos mistos de aço e concreto com ligações mistas além de possibilitar a redução do peso da estrutura, condiciona a sua complexidade na hora de realizar cálculos de forma que o comportamento da estrutura seja o mais próximo possível da realidade. Por isso é preciso o desenvolvimento de um software capaz de facilitar o processo de análise deste tipo de projeto.

O objetivo desta proposta de dissertação é precisamente o desenvolvimento de um programa potente capaz de analisar de forma precisa tanto o comportamento dos elementos da viga mista como o da ligação mista de um determinado modelo. O programa foi desenvolvido na linguagem Maple de forma explícita para que o usuário se familiarizar facilmente.

2.2 Objetivos específicos

O objetivo específico será desenvolver, implementar e comparar modelos numéricos para vigas mistas com uma interface de deslizamento, considerando as não linearidades física e geométrica no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF). Também são considerados os efeitos da interação parcial entre duas ou múltiplas camadas e a semi-continuidade destes elementos mistos entre os seus vãos através de ligações mistas.

Para o programa fornecer resultados precisos, é necessário a obtenção dos dados dos elementos que compõem a viga mista e as ligações mistas, a saber; os tipos de perfis utilizados, a laje de concreto, barras de armadura, conectores de cisalhamento, carregamentos atuantes, entre outros. Com esses dados o programa consegue determinar as propriedades de cada componente mencionado acima e em seguida do sistema em geral.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Introdução

É bastante comum hoje em dia o uso de vigas mistas na construção metálica, onde a laje de concreto e o perfil de aço trabalham em conjunto devido à ação de conectores de cisalhamento. Esta adoção do uso de vigas mistas permite muitas vezes a execução de estruturas de edifícios de múltiplos andares. As vigas mistas, na maioria, têm sido concebidas como simplesmente apoiadas, com ligações metálicas nas extremidades. A principal ideia é a substituição da ligação metálica por ligação mista de resistência parcial incorporando a contribuição da laje de concreto na resistência ao momento fletor.

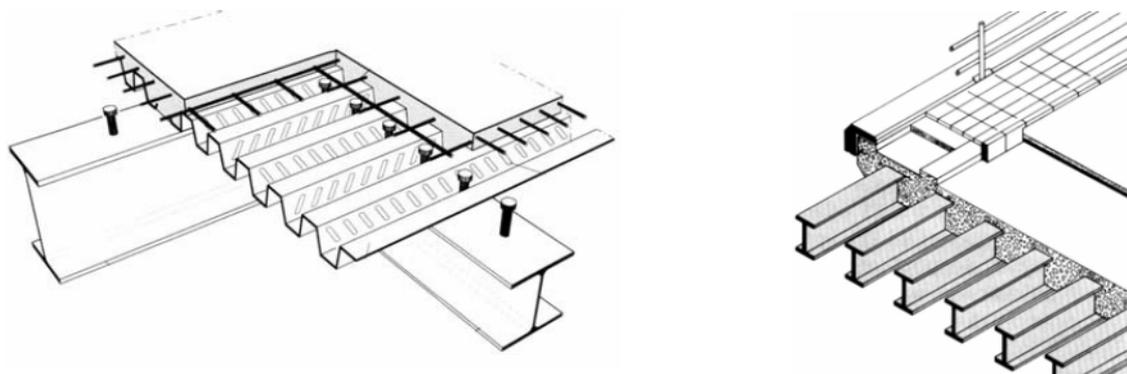
A possibilidade de se utilizar a laje na região dos apoios das vigas como parte da ligação com o elemento suporte, provocando continuidade ou semi-continuidade entre os tramos da linha de vigas, é uma opção interessante, mas só recentemente vem sendo estudada e utilizada no Brasil. Em outros países, sua utilização também é rara ainda que na Inglaterra, aproximadamente 40% de todas as construções novas de múltiplos andares utilizam sistemas estruturais mistos (MOORE & COUCHMAN, 1998). A ligação mista combina a resistência da ligação de aço à resistência da laje de concreto para desenvolver restrição rotacional (EASTERLING e REX, 1996a).

A seguir, é feito um estudo bibliográfico de vigas mistas contínuas e semicontínuas com ligações mistas de resistência parcial.

3.2 Vigas mistas de Aço e Concreto

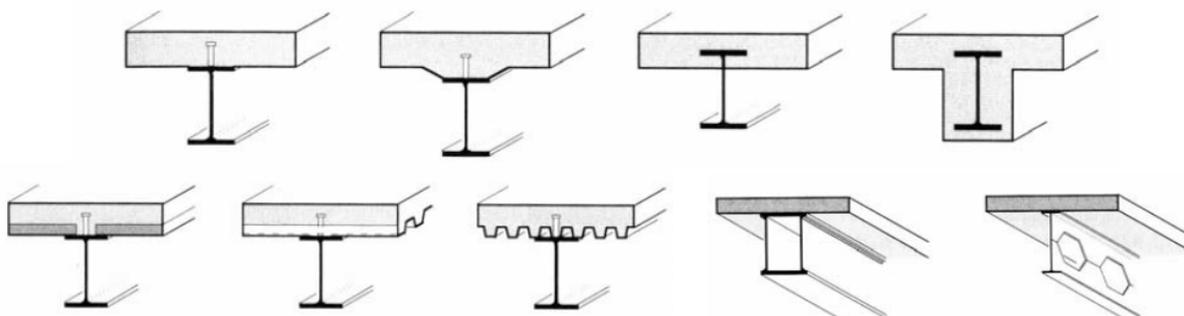
As vigas mistas convencionais de aço e concreto são elementos estruturais constituídos por uma laje de concreto armado e um perfil de aço conectados, onde a laje de concreto pode ser posicionada sobre uma lamina de aço dobrada comumente chamado *steel-deck*, ou onde o perfil de aço é embutido no concreto como mostrado na figura 1. Por outro lado, o perfil de aço pode ser um perfil, laminado, dobrado ou soldado conforme a obra a ser executada. A ligação entre os dois materiais é feita através de conectores de cisalhamento, mossas, ressaltos entre outros, de forma que o conjunto dos dois componentes trabalhe como um elemento único como pode-se observar na figura 2.

Figura 1- Lajes mistas



Fonte: NBR-8800, (2008).

Figura 2- Tipos de seções mistas em vigas



Fonte: NBR-8800, (2008).

A NBR 8800 (ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2008) define a viga mista como um sistema composto por um componente de perfil de aço que apoia uma laje de concreto e que está ligada a ela por conectores de cisalhamento e que tem como objetivo principal que o concreto trabalhe em compressão e o aço em tração em caso de considerar só a presença dos momentos positivos.

As considerações técnicas e econômicas das vigas mistas fazem que na conexão entre a laje de concreto e o perfil de aço exista um deslizamento relativo entre os dois materiais conhecido, como interação parcial ou conexão parcial. Os deslizamentos acontecem uma vez que a ligação entre os materiais da seção mista possui uma certa rigidez e são

maiores ou menores em relação à rigidez gerada na ligação, Sousa Jr. e Silva (2010); Ranzi et al (2010).

A rigidez gerada na ligação na interface influencia de forma direta os deslocamentos relativos e os deslocamentos globais gerados na viga mista. De outra parte os deslizamentos produzidos ao aplicar um carregamento transversal na superfície do elemento, causa de uma certa rigidez atingida na ligação entre os dois materiais, influem de modo considerável na distribuição dos esforços (momentos, esforços normais e esforços cortante), daí entende-se o conceito de “Interação Parcial”. No caso em que estes deslizamentos não tenham significativas influência na interface da viga mista ou são nulos, considera-se como “Interação Total”. Assim, na análise do comportamento das vigas mistas, esta rigidez possui um papel importante. Nos últimos anos a sua simulação numérica tem sido consideravelmente estudada.

No conceito econômico QUEIROZ *et al.*,(2011) afirmam que o uso do sistema estrutural de viga mista em edifícios consegue reduzir o peso da viga de aço com respeito à viga com interação nula (sem conectores mecânicos na interface) de 20% a 40%. Por isso, em muitas ocasiões adota-se mais o uso de vigas mistas na hora de projetar uma estrutura metálica.

3.3 Ligações mistas

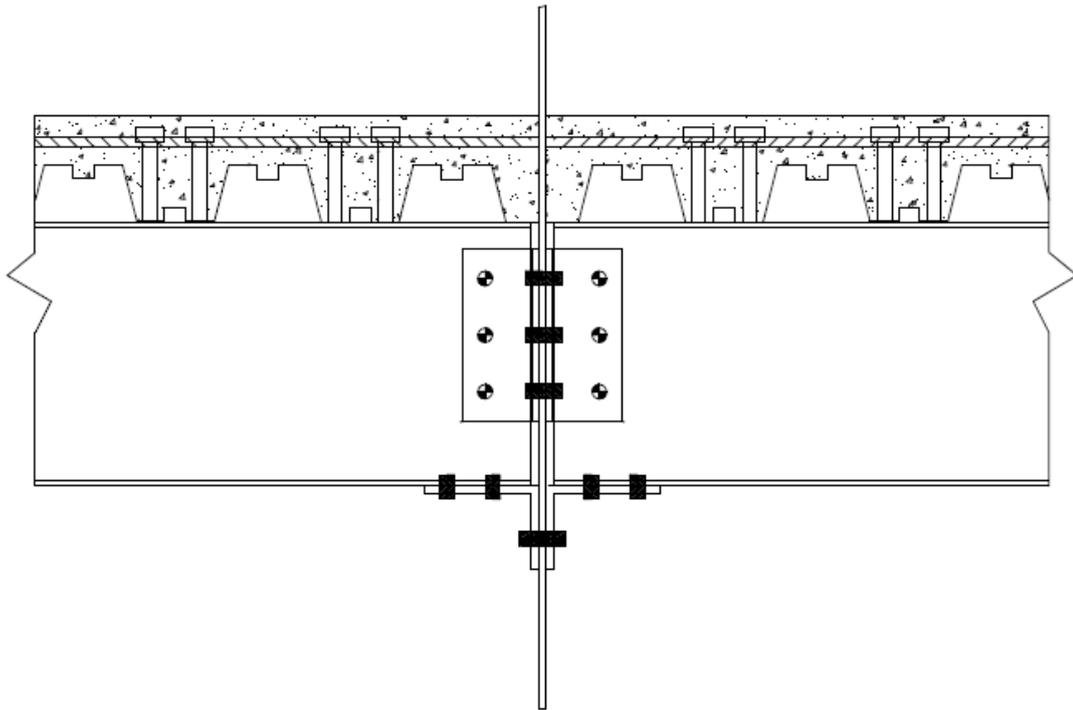
A contribuição das barras de armaduras na região do apoio de vigas mistas, além de proporcionar continuidade à viga na região da ligação, pode aumentar consideravelmente a rigidez e a resistência da ligação e absorver os esforços solicitantes devidos ao vento atuante na estrutura.

Outra possibilidade de aplicação é o uso do mesmo tipo de ligação com a função de reagir somente às cargas verticais. Neste trabalho, será abordado somente o comportamento da ligação mista submetida a cargas verticais (estruturas indeslocáveis).

Existem várias formas de se executar uma ligação de resistência parcial, já que a introdução de barras de armadura na laje, na região de momento negativo, possibilitando a semi-continuidade, é fácil de realizar. As barras de armadura são os elementos resistentes à tração da ligação mista na parte superior da viga, enquanto a parte inferior da ligação mista é formada por alguma ligação resistente à compressão de forma a constituir um binário de forças. Várias soluções foram encontradas na literatura, dentro elas, a utilização de uma chapa de preenchimento na região da mesa inferior, ou a transferência direta por contato entre a

mesa inferior e o pilar ou viga suporte. Outro tipo de solução é o aproveitamento das cantoneiras da alma presentes em vigas biapoiadas, adicionando-se uma cantoneira totalmente parafusada à mesa inferior (Figura3), cujas finalidades são evitar a flambagem lateral da mesa e aumentar o braço de alavanca, entre outras.

Figura 3- Cantoneiras parafusadas na alma e na mesa inferior da ligação mista



Fonte: Vanessa Heckert (2003).

A ligação de resistência parcial mencionada é economicamente interessante, no que foi mencionada respeito tanto à fabricação quanto à montagem, LEON (2001). Uma das vantagens de utilizar as cantoneiras parafusadas na alma é um pequeno acréscimo da resistência ao momento fletor proveniente da flexão das mesmas.

A utilização de uma ligação que não dê continuidade total ao sistema pode ajudar a desprezar-se do uso de chapas espessas, ganhando assim uma redução no peso da estrutura. Também possibilita o dimensionamento da ligação de forma que está torne o conjunto o mais econômico possível.

Um estudo detalhado tem que ser feito antes da obtenção das propriedades relevantes da ligação mista, dentro dele, a determinação individual da resistência última, da sua rigidez inicial e da capacidade de deformação.

3.4 Solução Analítica das vigas mistas e ligações mistas

3.4.1 Vigas mistas com interação parcial

A equação diferencial de Newmark (1951) é muito usada para problemas de vigas mistas com interação parcial, já que permite determinar a solução exata do problema analisado no caso de análise linear.

Faella *et al* (2002) apresentaram a solução de Newmark (1951) de forma mais simples onde é apresentado o deslizamento na interface dos materiais de aço e concreto, os esforços presentes na seção mista, a relação da força cortante e do deslizamento na interface da viga mista.

Pode-se expressar a equação do deslizamento mostrado na figura 4 da seguinte forma.

$$s(z) = u_{a,sup}^0(z) - u_{c,inf}^0(z) = u_a^0(z) - \phi y_{a,sup} - (u_c^0(z) + \phi y_{c,inf})$$

$$s(z) = u_a^0(z) - u_c^0(z) + \phi d \quad (1)$$

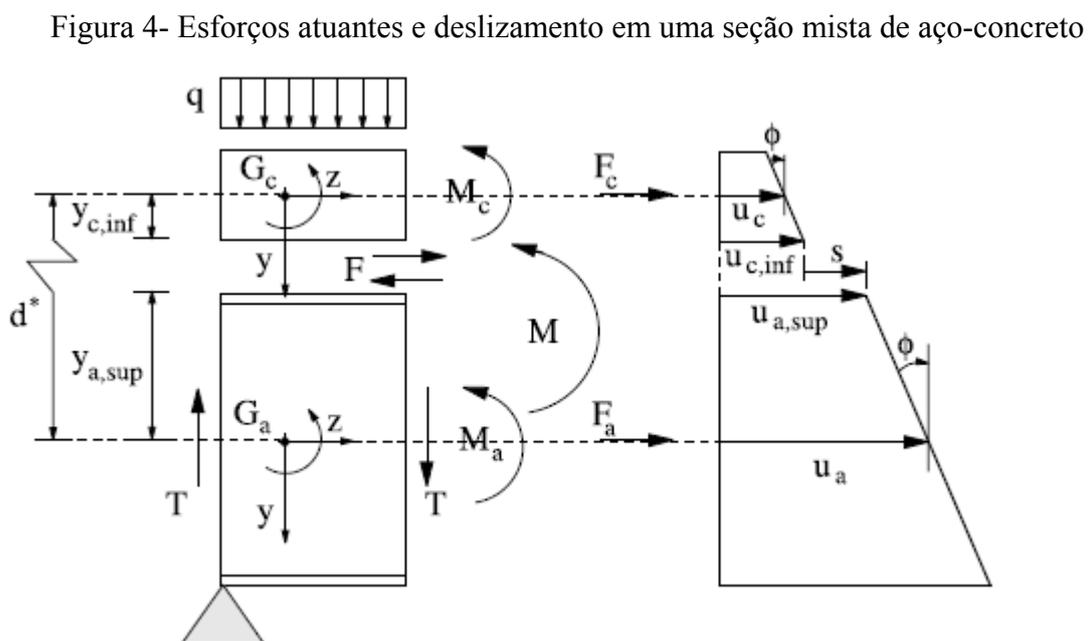
Onde

$u_a^0(z)$ é o deslocamento axial do aço ao longo do eixo de referência z ,

$u_c^0(z)$ é o deslocamento axial do concreto ao longo do eixo de referência z .

ϕ é a inclinação da reta tangente definido na figura 4.

d a distância entre os eixos de referência da laje de concreto e do perfil de aço.



Fonte: FAELLA et al., (2002).

Baseando-se na teoria de Euler Bernoulli, a curvatura sendo a segunda derivada do deslocamento transversal em um ponto determinado do eixo axial; então o momento total atuante na seção mista será dado considerando a soma dos momentos atuantes em cada seção. Este momento é devido ao binário das forças normais na seção em cada material que é expresso em termos da força na interface pelo equilíbrio de forças normais.

A equação de Newmark pode ser expressa em função da curvatura, como mostra a equação 2.

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = \frac{-q}{(EI)_{abs}} - \frac{\alpha^2 M}{(EI)_{full}} + \frac{Kh\varepsilon_{sh}}{(EI)_{abs}} \quad (2)$$

Onde EI_{abs} é a soma das rigidezes à flexão dos dois componentes é a rigidez à flexão na seção transversal quando a conexão de cisalhamento está ausente, $E_c A_c$ e $E_a A_a$ representam as rigidezes à flexão da laje do concreto e do perfil do aço.

$$\alpha^2 = \frac{K(EI)_{full}}{(EA)^*(EI)_{abs}} \quad ; \quad (EA)^* = \frac{(E_a A_a)(E_c A_c)}{E_a A_a + E_c A_c}$$

$(EI)_{full} = (EI)_{abs} + (EA)^* d^2$, é a rigidez à flexão da viga mista com total interação.

A ABNT - (ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS., 2008) define as vigas mistas como o conjunto de um perfil de aço e laje de concreto moldada na obra acima da superfície superior do perfil de aço ou sobre uma forma laminada de aço (*steel deck*). A união entre os dois materiais é possível através de conectores de cisalhamento situados na superfície superior do aço. Estes conectores de cisalhamento permitem ambos componentes trabalhem como um só, assim outorgando uma certa rigidez por cisalhamento.

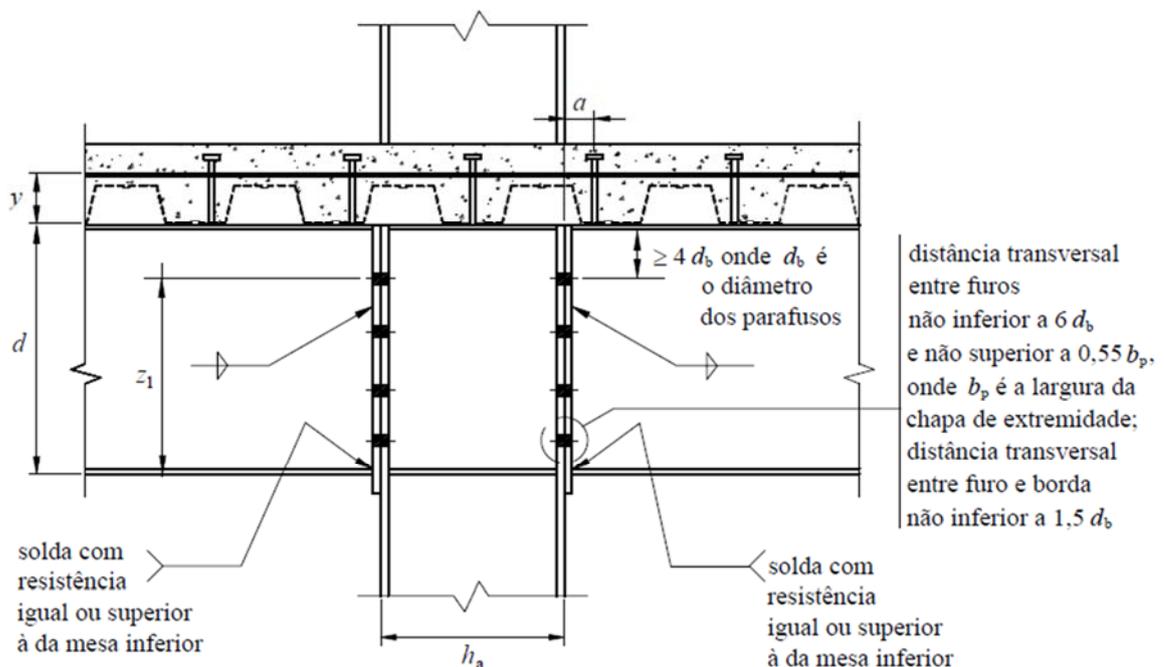
Para os conectores situados na região do momento positivo, na interface entre o perfil e a laje, a resistência de cálculo dos mesmos pode ser superior ou igual à resistência de cálculo do perfil de aço trabalhando a tração ou da laje trabalhando a compressão chamando o assim “Interação Total”. Caso a resistência de cálculo dos conectores nesta região seja menor, provoca-se um deslizamento entre as duas camadas assim conhecido como “Interação Parcial”. Na região do momento negativo, a interação considera-se completa ou total.

3.4.2 Ligações mistas

Uma ligação é considerada mista quando a laje do concreto contribui diretamente na transmissão do momento fletor de uma viga mista para um pilar ou uma viga mista no vão adjacente (ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS., 2008). Nas figuras 5 e 6 são ilustradas ligações mistas de edificações, respectivamente de um pilar e de uma viga, cujo objetivo principal é dar continuidade parcial entre os vãos. Estas ligações podem ser feitas através de chapa de extremidade com altura total ou com cantoneiras parafusadas na alma das duas vigas e na mesa inferior da viga apoiada, entre outras.

Em vigas semicontínuas, a ligação mista é obtida através de uma ligação metálica semi-rígida ou flexível que vai incrementando consideravelmente sua rigidez e sua capacidade resistente ao momento. Para evitar ou prever o colapso da mesma antes que a viga atinja seu estado limite último, é imprescindível que a capacidade de rotação da ligação seja suficientemente resistente frente à resistência a flexão da viga mista suportada por ela.

Figura 5- Ligação mista de edificações de um pilar com chapa na extremidade com altura total



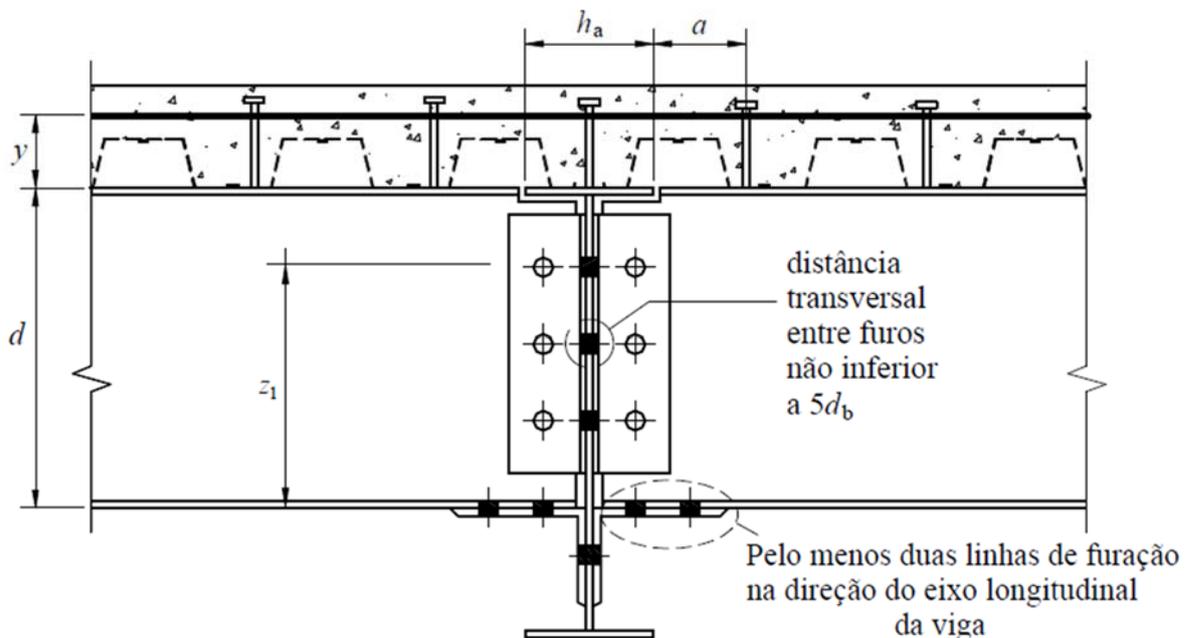
Fonte: NBR-8800, (2008).

A capacidade resistente ao momento na ligação mista é determinada levando em conta três componentes fundamentais, que são as barras da armadura situadas dentro da largura efetiva na região do momento negativo definido, os conectores de cisalhamento

situados na região do momento negativo e a ligação da mesa inferior. Essas três componentes dependem da força horizontal gerada na armadura longitudinal (F_{sl}) que é a relação entre o momento na ligação e o braço de alavanca ($d + y$) mostrado na figura 6.

Como se sabe, a consideração das ligações mistas em edificações requer um trabalho bastante minucioso já que se tem em conta muitos fatores na hora de analisar; por isso a NBR-8800 (2008) no anexo R.3 estabelece as propriedades fundamentais das ligações mistas que são a rigidez inicial ou de serviço, a resistência de cálculo ao momento e a capacidade de rotação.

Figura 6- Ligação mista de edificações de uma viga com cantoneiras parafusadas na alma e na mesa inferior da viga apoiada.



Fonte: NBR-8800, (2008).

3.4.2.1 Barras de armaduras na ligação mista

Segundo LEON *et al.*, (1996), o diâmetro mínimo das barras de armadura superior da laje que trabalham junto com a ligação metálica, deve ser de 12,5mm. A razão desta hipótese é devida à ductilidade destas barras, que é maior para diâmetros maiores. Também a área mínima de armadura recomendada, para efeito de redução conhecido por “*tension stiffening*” na capacidade de deformação é de 5 cm^2 (SCI, 1998).

3.4.2.1.1 Rigidez inicial

Conforme ECCS-109, (1999), a rigidez de serviço das barras de armadura é dada por:

$$k_s = \frac{2 A_{sl} E_s}{h_a} \quad (3)$$

Onde:

A_{sl} é a área total das barras de armadura utilizadas;

E_s é o módulo de elasticidade longitudinal das barras de armadura;

h_a é a largura do apoio, na direção paralela às barras de armadura.

3.4.2.1.2 Resistência de cálculo

A resistência última das barras de armadura, conforme ECCS-109, (1999), é dada por:

$$F_{s,Rd} = f_{sd} A_{sl} \quad (4)$$

Onde:

f_{sd} é a resistência ao escoamento da barra de armadura;

$F_{s,Rd}$ é a resistência última da armadura.

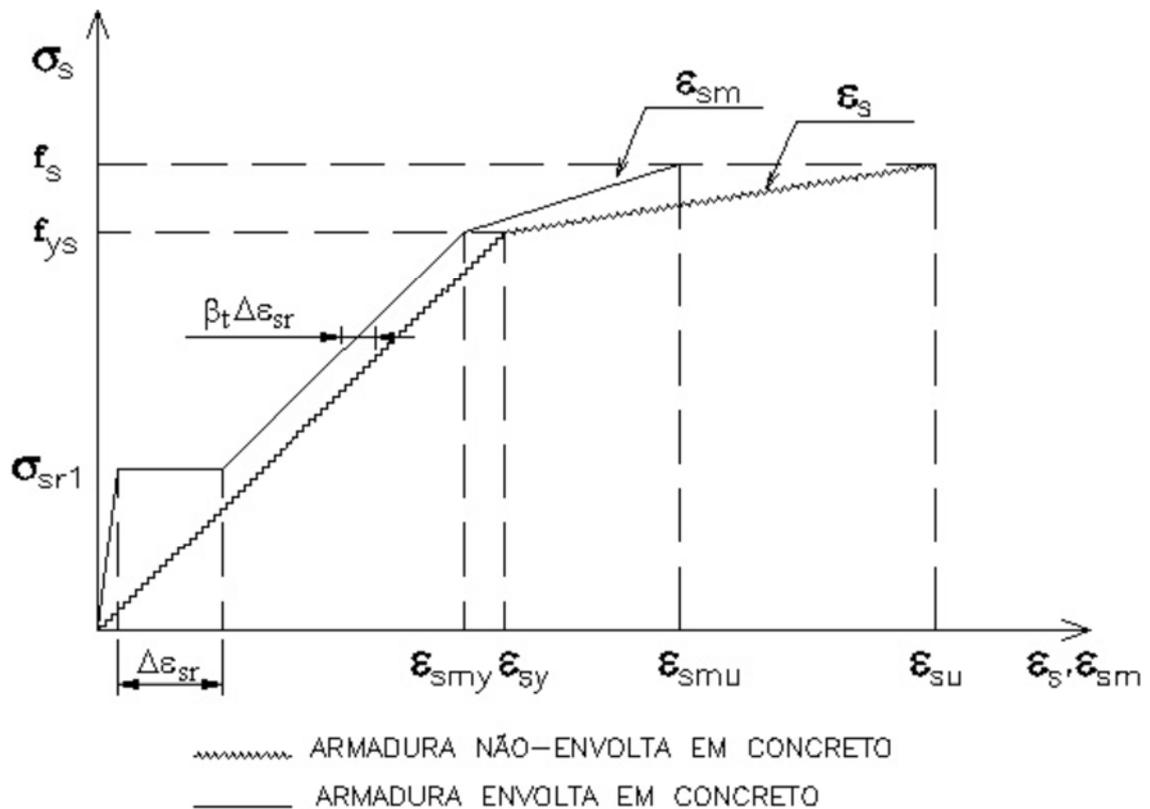
3.4.2.1.3 Capacidade de deformação

Ao aplicar cargas verticais na viga mista, fica tracionado o concreto armado que usualmente é desprezado.

De fato, antes das primeiras fissuras, o concreto tem uma resistência considerável e, após a fissuração, produz um efeito de enrijecimento das barras de armadura. Após a fissuração, o concreto não pode transferir carga pelas fissuras, portanto a mesma tem que ser transferida pelas barras de armadura. Isto reduz a carga nas barras de armadura e conseqüentemente reduz as deformações axiais das mesmas. Por outra parte, a aderência entre aço e concreto causa o escoamento das barras somente na região das fissuras, (Figura 7). Este efeito é denominado “*tension stiffening*” (EASTERLING e REX, 1996a; HANSWILLE, 1997).

A capacidade de deformação para a armadura é limitada pela ruptura das barras que geralmente ocorre em uma fissura transversal entre o suporte e o primeiro conector.

Figura 7– Relação tensão x deformação para armadura (simplificada)



Fonte: HANSWILLE, (1997).

3.4.2.2 Conectores de cisalhamentos

A consideração da ligação a cisalhamento reduz substancialmente o escorregamento entre o perfil metálico e a laje nos apoios, mas não é capaz de eliminar ele totalmente. Quando houver uma ligação a cisalhamento entre os componentes da viga mista, há uma tendência de trabalharem em conjunto, tendência que vai aumentando se a ligação for mais resistente e mais rígida. Os efeitos do escorregamento no deslocamento vertical são bem significativos. Em ensaios, o escorregamento manifesta-se basicamente após a perda da aderência.

A ligação entre laje e viga mais utilizada é obtida com conectores tipo pino com cabeça, com diâmetro variando de 13 a 25 mm e comprimento de 50 a 135 mm. A espessura mínima da mesa à qual os conectores são soldados é limitada em função dos diâmetros dos

mesmos. O processo de soldagem é simples e rápido e de forma que os conectores de cisalhamento não obstruam às barras de armadura existentes na laje de concreto.

As propriedades mais relevantes dos conectores são a resistência última, a relação entre a força de cisalhamento transmitida e o escorregamento na interface; relações que são obtidas por meio de ensaios.

3.4.2.2.1 Rigidez inicial

A rigidez inicial ou de serviço depende do número de conectores na região do momento negativo:

$$k_{cs} = \frac{n k_r}{\alpha_1} \quad (5)$$

Onde:

n é o número de conectores na região de momento negativo,

k_r , a rigidez do conector isolado, é igual a 120 kN/mm para conectores de diâmetro de 22 mm (laje maciça) e 100 kN/mm para conectores de diâmetro de 19 mm (laje maciça ou não), (JOHNSON, 1994; EUROCODE 4, 1992),

$$\alpha_1 = v - \frac{(v - 1)(d + y)}{d_s(\xi + 1)}$$

$$v = \left(\frac{(\xi + 1)n k_r L_1 d_s^2}{E_a I_a} \right)^{(1/2)}$$

$$\xi = \frac{I_a}{d_s^2 A_{sl}}$$

Onde:

d e y são as grandezas geométricas, d (altura total do perfil), y (altura da borda superior do perfil até o centro da armadura longitudinal da laje de concreto),

d_s é a distância do centro geométrico do perfil até o centro geométrico da armadura,

I_a é o momento de inércia do perfil de aço,

$L_1 = 15\%$ do vão da viga mista,

E_a é o módulo de elasticidade do aço.

3.4.2.2 Resistência de cálculo

A resistência última dos conectores de cisalhamento também depende do número de conectores na região de momento negativo. Se a quantidade destes conectores for insuficiente na região mencionada, fica comprometida a resistência última da ligação mista. Assim, a resistência dos conectores deve ser igual ou superior à da armadura:

$$F_{cs,rd} = \Sigma Q_{rd} \geq F_{s,rd} \quad (6)$$

$$Q_{rd} \leq \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{A_{cs}(f_{ck}E_c)^{(1/2)}}{\gamma_{cs}} \\ \frac{R_g R_p A_{cs} f_{ucs}}{\gamma_{cs}} \end{cases}$$

Onde:

A_{cs} é a área da seção transversal do concreto,

Q_{rd} é a resistência de cálculo de um conector (cabeça de pino),

$F_{s,rd}$ é a resistência de cálculo das barras de armaduras da laje de concreto,

γ_{cs} é o coeficiente de ponderação da resistência do concreto (1,25 para combinações últimas e 1,10 para combinações excepcionais),

f_{ucs} é a resistência à ruptura do aço do conector,

$R_g * R_p \geq 0,75$ (considera-se o valor de 1 neste trabalho),

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto, não supera os 28 Mpa,

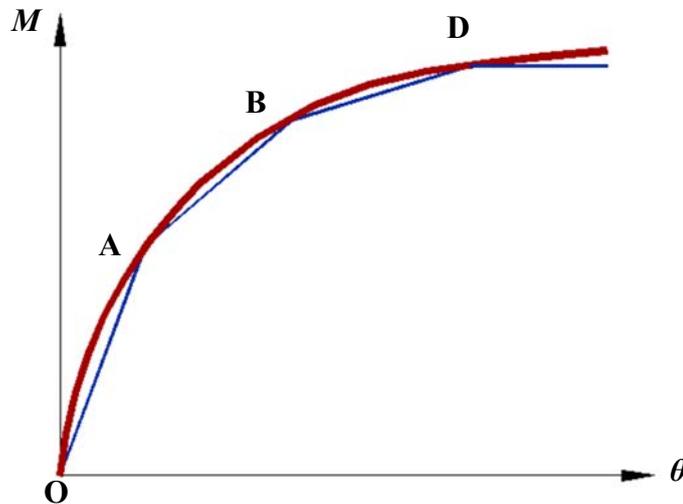
E_c é o módulo de elasticidade do concreto.

3.4.2.2.3 Capacidade de deformação

Mesmo considerando uma interação total no trecho de momento negativo, pode que ocorre escorregamento nessa zona; e por consequência afeta a capacidade rotacional da ligação mista.

Apresenta-se a curva *momento-rotação* (ECCS-109, 1999) para uma ligação mista, considerando-se um comportamento trilinear dos conectores, representado pelos trechos de retas OABD (Figura 8).

Figura 8- Curva aproximada momento-rotação para uma ligação mista



Fonte: ARIBERT, (1996).

Na figura 8, o ponto *A* corresponde ao escoamento do conector de cisalhamento mais solicitado. O valor correspondente da força na armadura $F_s^{(A)}$ e o escorregamento entre a extremidade da laje e a extremidade da viga $S^{(A)}$ podem ser calculados uma vez que a rigidez do conector de cisalhamento k_r é conhecida.

A análise elástica é válida até o ponto *A*, onde a carga máxima no conector mais solicitado é de $0,7Q_{rk}$, sendo Q_{rk} a resistência nominal de um conector.

O escorregamento no ponto *B* é tomado como o valor do escorregamento a ser considerado na ligação mista e para sua obtenção deve ser levado em conta o comportamento elasto-plástico no trecho *A-B*:

$$S^{(B)} = 2 S^{(A)} \frac{F_s^{(B)}}{F_s^{(A)}} \quad (7)$$

Onde:

$S^{(A)} = 0,7Q_{rk}/k_r$ (Escorregamento do trecho inicial em regime elástico),

$F_s^{(A)} = k_{cs}S^{(A)}$ (Força atuante no grupo de conectores), sendo k_{cs} a rigidez do grupo de conectores,

$F_s^{(B)} = A_{sl}f_{ys}$ (Força na armadura, para interação total).

O ponto *B* corresponde à máxima força de interação entre a armadura e o perfil metálico.

3.4.2.3 Ligação parafusada entre a mesa inferior e a cantoneira

ELSATI & RICHARD, (1996), propuseram as equações abaixo para a curva mostrada na Figura 9, com base nos ensaios, onde inicialmente Richard aplicou uma pré-carga com os parafusos na condição de pré-aperto, de forma que se estabelecesse o contato entre parafusos e furos. Aplicou-se, então, a protensão nos parafusos para realizar o ensaio considerando-se que o escorregamento inicial devido à folga dos furos já tenha ocorrido. Entretanto, caso a protensão não seja aplicada, a relação *carga-deslocamento* não sofre alteração substancial (QUEIROZ & MATA, 2000).

$$R(\Delta) = \frac{K_1 \Delta}{\left[1 + \left(\frac{K_1 \Delta}{R_0}\right)^n\right]^{1/n}} + K_p \Delta \quad (8)$$

$$n = \frac{-\ln 2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_0} - \frac{K_p}{K_1}\right)} + K_p \Delta$$

Onde:

R é a força em um parafuso;

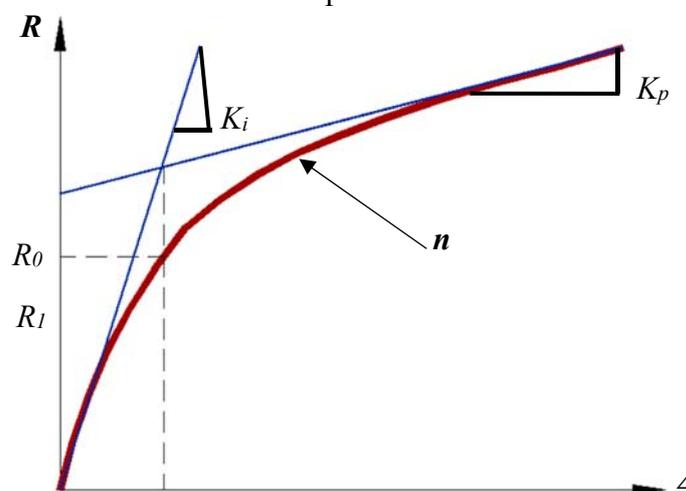
Δ é o deslocamento associado à força em um parafuso;

$K_1 = k_i - K_p$, sendo k_i a rigidez elástica inicial e K_p a rigidez plástica;

n é o parâmetro de forma da curva,

R_1 e R_0 são as forças de referência inicial antes a protensão nos parafusos.

Figura 9 - Relação *carga-deslocamento* para determinar a rigidez inicial da ligação parafusada.



Fonte: ELSATI & RICHARD, (1996).

3.4.2.3.1 Rigidez inicial

No trabalho de EASTERLING e REX (1996b) são citados quatro métodos encontrados na literatura para avaliação da rigidez inicial da ligação parafusada entre a mesa inferior e a cantoneira, sendo um deles baseado no EUROCODE 3 (1993). Além destes métodos, existe a possibilidade da obtenção de equações parametrizadas, em função das variáveis associadas ao comportamento da ligação parafusada entre a mesa inferior e a cantoneira, validadas por ensaios.

Uma vez as comparações feitas entre os métodos citados acima, com exceção das equações parametrizadas, EASTERLING e REX (1996b) consideram que o método dos componentes é o mais adequado, sendo que o modelo do EUROCODE 3 (1993) baseia-se neste método, fornecendo bons resultados, se comparados a dados experimentais. O método dos componentes divide a ligação inferior na ligação mista em três elementos contribuintes: parafusos, cantoneira e mesa inferior. Segundo EUROCODE 3 (1993) e FAELLA et al. (2000), a rigidez inicial pode-se obter da seguinte forma:

$$k_i = \frac{n_l}{\left(\frac{1}{k_{p1}} + \frac{1}{k_{p2}} + \frac{1}{k_b}\right)} \quad (9)$$

Onde:

n_l é o número de linha de parafusos na aba horizontal da cantoneira transversal à direção da força de compressão na mesa inferior apoiada do perfil do aço (dois parafusos por linha);

$k_{p1} = 24k_s k_{t1} d_b f_{u1}$ é a rigidez da cantoneira ao esmagamento;

$k_{p2} = 24k_s k_{t2} d_b f_{u2}$ é a rigidez da mesa inferior ao esmagamento;

$k_b = 16f_{ub} d_b^2 / d_m$ é a rigidez dos parafusos;

f_{u1} e f_{u2} são as resistências à ruptura dos aços estruturais da cantoneira e da mesa inferior do perfil de aço, respectivamente;

f_{ub} é a resistência à ruptura do aço dos parafusos à tração;

d_b é o diâmetro dos parafusos;

d_m é o diâmetro de referência ($d_m = 16mm$);

$k_{t1} = 1,5t_{p1}/d_m \leq 2,5$ Onde t_{p1} é a espessura da cantoneira;

$k_{t2} = 1,5t_{p2}/d_m \leq 2,5$ Onde t_{p2} é a espessura da mesa inferior do perfil de aço;

$k_s = S/(4d_b) + 0,375 \leq 1,25$ é o parâmetro associado ao rasgamento entre furos (em juntas comprimidas não existe rasgamento entre furos e borda);

S é o espaçamento entre parafusos na direção da força.

3.4.2.3.2 Resistência última

Para determinar a resistência última da ligação inferior, deve-se determinar o menor valor entre a resistência dos parafusos, da cantoneira inferior de assento à força de compressão e da resistência da mesa inferior mostrado na equação 10. Uma consideração que deve se levar em conta na determinação da resistência dos parafusos é o cisalhamento dos mesmos e a pressão de contato nos furos. Determina-se a resistência da mesa inferior sujeita à força de compressão com base na resistência à pressão de contato (NBR8800, 2008).

$$F_{i,rd} = \text{menor valor entre} \left\{ \begin{array}{l} n_p F_{b,rd} \\ 1,25 f_{yd} A_{fi} \\ f_{L,yd} A_l \end{array} \right\} \geq F_{s,rd} \quad (10)$$

Estados limites a serem considerados:

a) Esmagamento com ou sem rasgamento entre furos:

$$F_{i,rd} = n_p 1,2 l_f t_p f_u \leq 2,4 d_b t_p f_u$$

Onde:

n_p é o número de parafusos;

t_p é a espessura da aba da cantoneira inferior ou da mesa inferior, a que proporcionar a menor resistência;

l_f é a distância, na direção da força, entre a borda do furo e a borda do furo adjacente ou a borda livre; ;

f_u é resistência à ruptura do aço da parede do furo.

Usou-se 2,4 como coeficiente sendo que a deformação elástica desta ligação é um critério de projeto para o estado limite de utilização.

b) Cisalhamento dos parafusos:

$F_{i,rd} = n_p 0,4 A_b f_{ub} \rightarrow$ Para parafusos de alta resistência quando o plano de corte passa pela rosca e para parafusos comuns;

$F_{i,rd} = n_p 0,5 A_b f_{ub}$ → Para parafusos de alta resistência quando o plano de corte não passa pela rosca.

A_b é a área bruta dos parafusos utilizados.

c) Esmagamento da cantoneira ou da mesa inferior:

$$F_{i,rd} = 1,5 l_f t_p f_y$$

Onde:

f_y é o limite de escoamento do aço da cantoneira ou da mesa inferior.

3.4.2.3.3 Capacidade de deformação

Para determinar a capacidade de deformação, baseia-se nos valores de ensaios. O valor de Δ_{ui} pode ser determinado através da expressão mostrada na equação ...; entretanto também pode ser tomado aproximadamente igual a 4 mm para os parafusos A325, (EASTERLING e REX, 1996b). Este valor corresponderia a um limite de deformação até o qual não há perda de resistência significativa. Entretanto, a NBR8800, (2008), adota que o limite para o deslocamento horizontal da extremidade da mesa inferior da viga mista seja igual a 3mm.

3.4.3 Comportamento das ligações mistas

A análise de ligações mistas com base nos componentes, no caso, armadura, conectores e ligação inferior, apresenta resultados bastante coerentes com os resultados experimentais para sistemas sujeitos a cargas verticais (QUEIROZ *et al*, 2000). A qualidade das respostas da ligação (rigidez, resistência e capacidade de rotação) depende da qualidade das informações sobre os componentes individuais da ligação apresentados anteriormente.

Com o objetivo de associar as rigidezes de descarregamento e recarregamento com a rigidez de serviço e de verificar o grau de degeneração de rigidez das ligações, (Queiroz *et al*, 2000) realizaram 8 ensaios, cada um com 4 a 5 ciclos de *carregamento-descarregamento-recarregamento*. Desta forma, foram obtidas as informações físicas necessárias para estabelecer a curva *momento-rotação* completa da ligação, além de se poder

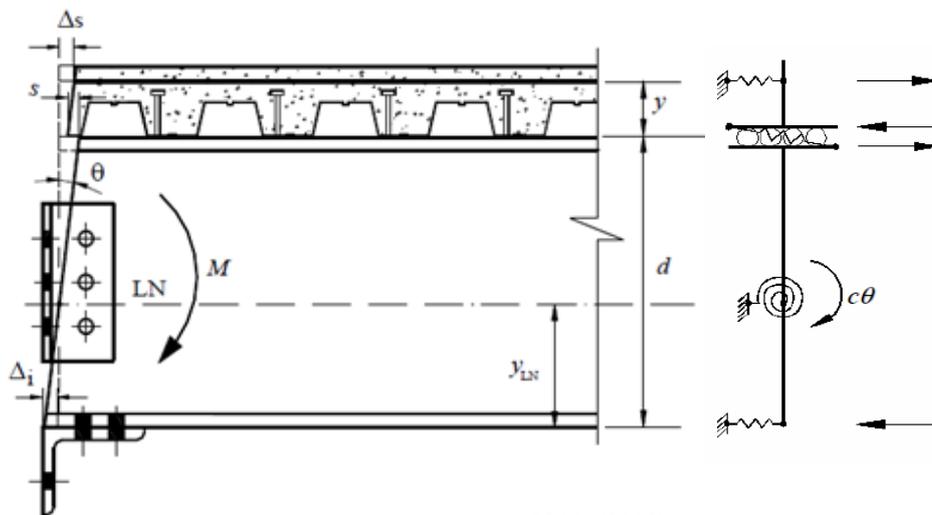
confirmar resultados previsíveis (rigidez de serviço, resistência última e capacidade de rotação).

3.4.3.1 Rigidez inicial

Para cada elemento da ligação mista calcula-se a rigidez separadamente, conforme apresentado anteriormente e determina-se a rigidez da ligação completa.

O modelo para determinação da rigidez inicial do conjunto da ligação mista é mostrado na figura 10 (atua apenas um momento fletor na cantoneira da alma), (QUEIROZ *et al*, 2001).

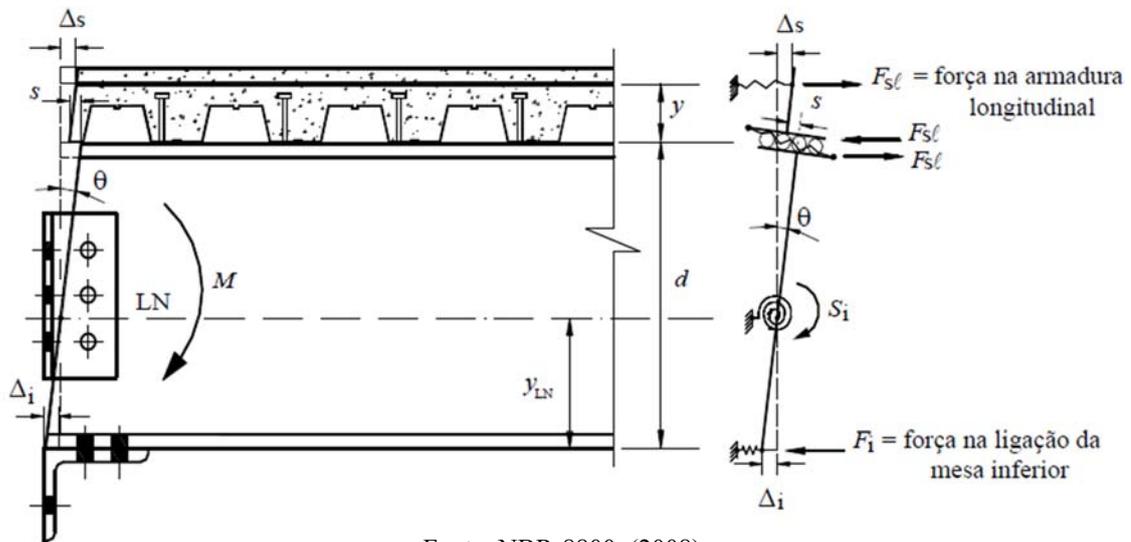
Figura 10 - Modelo para a rigidez do conjunto da ligação mista



Fonte: NBR-8800, (2008).

Na figura 11 tem-se Δ_s , S e Δ_i iguais ao deslocamento da armadura, escorregamento entre a laje e o perfil metálico e deslocamento na ligação inferior respectivamente, na situação de serviço e as suas respectivas forças na armadura longitudinal e na ligação da mesa inferior.

Figura 11- Modelo para os deslocamentos dos componentes da ligação mista



Fonte: NBR-8800, (2008).

A rigidez inicial determinada na equação 11 permite realizar a análise elástica das vigas semicontínuas e a verificação do estado limite de serviço. Ela é a relação entre o momento solicitante M e a rotação da ligação θ .

$$S_i = \frac{M}{\theta} = \frac{(d + y)^2}{\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{cs}} + \frac{1}{k_i}\right)} + C \quad (11)$$

Onde:

k_s , k_{cs} e k_i são as rigidezes iniciais respectivas da barra da armadura, dos conectores e da ligação inferior dadas respectivamente nos itens R.2.3.1, R.2.4.1 e R.2.5.2.2 ou R.2.5.2.3 da NBR-8800(2008).;

d e y são a altura do perfil de aço e a distância do topo do perfil de aço até o centro da armadura;

C é o constante de mola rotacional (C tem um valor nulo, quando a capacidade da cantoneira a momento já foi esgotada antes da cura do concreto).

3.4.3.2 Resistência última

O momento fletor resistente dado na equação 12 permite realizar uma análise plástica das vigas semicontínuas e a verificação do estado limite último. Sabendo que este momento fletor resistente da ligação mista tem que ser sempre inferior ao momento fletor

plástico negativo da viga mista, então neste caso não terá uma rotação plástica no elemento suporte, se não na ligação por isso é importante a determinação da capacidade de rotação.

$$M_{Rd}^- = f_{sd}A_{sl}(d + y) + M_{uw} \quad (12)$$

Onde:

f_{sd} a resistência ao escoamento do aço da armadura;

A_{sl} a área da armadura dentro da largura efetiva da laje;

M_{uw} é a resistência última a momento das cantoneiras da alma, desprezível sempre e quando as espessuras das cantoneiras da alma e da chapa sejam inferior ou igual a 0,5 vezes o diâmetro dos parafusos e a posição da linha neutra plástica estejam dentro das cantoneiras.

3.4.3.3 Capacidade de rotação disponível

Esta capacidade de rotação deve de ser maior ou igual à capacidade de rotação necessária para o desenvolvimento do momento máximo positivo da viga na hora de fazer a análise plástica.

$$\theta_u = \frac{\Delta_{us} + S^{(B)} + \Delta_{ui}}{(d + y)} \quad (13)$$

Na equação 13, Δ_{us} e Δ_{ui} são as capacidades respectivas de alongamento das barras da armadura e de deslocamento da ligação inferior dadas nos itens R.2.3.3 e R.2.5.2.2.3 e R.2.5.2.3.3 e $S^{(B)}$ a capacidade de escorregamento associada à deformação dos conectores definida no item R.2.4.3 da NBR-8800(2008). A capacidade de rotação θ_u é função dos deslocamentos máximo sofridos pelos componentes de aço e da laje e tem que ser maior ou igual à capacidade de rotação necessária definida no item R.4 da norma supracitada.

3.4.4 Análise de sistemas indeslocáveis com ligações mistas

Na análise de sistemas indeslocáveis com cargas verticais, é importante ter em consideração a armadura longitudinal da laje sobre o apoio, já que se for composta de uma tela soldada, pode contribuir no controle de fissuras; por outro lado, se for composta de barras

individuais, tais barras podem contribuir para a resistência no momento da ligação mista, juntamente com uma ligação metálica rígida ou não-rígida.

Há que mencionar que a resistência à flexão da viga semicontínuas depende da resistência a momento positivo da viga mista no vão e também da resistência a momento negativo da ligação. Muitas vezes, a fase de construção em sistemas não-escorados é a fase mais crítica no dimensionamento das vigas semicontínuas.

Uma análise elástica é feita para o estado limite de utilização e uma análise rígido plástica para estados limites últimos. Sob cargas de serviço, a ligação mista em questão comporta-se aproximadamente como uma mola elástica. Para cargas de cálculo, a análise rígido-plástica é usada devido à sua simplicidade.

3.4.4.1 Capacidade de rotação necessária da ligação mista

Em uma ligação mista com resistência parcial, a resistência última da mesma é menor que o momento plástico da viga mista, sendo assim, a própria ligação tem que garantir a rotação necessária para o desenvolvimento do momento positivo máximo da viga antes da plastificação da mesma, tornando assim o conjunto o mais econômico possível.

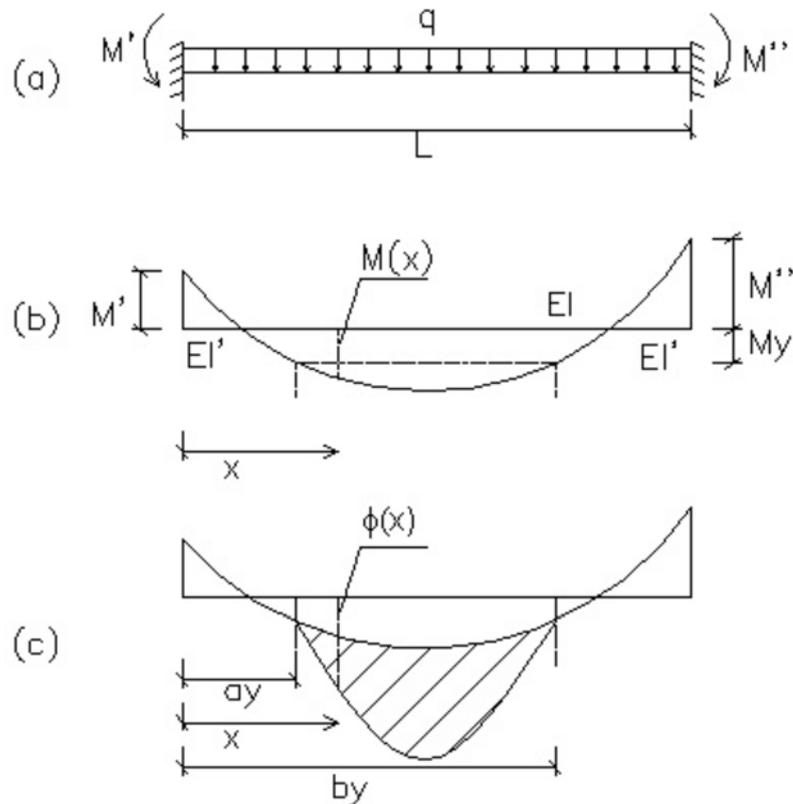
LI *et al.*, (1993) utilizam um programa de análise e apresentam vários resultados devido à variação de parâmetros que influenciaram a rotação necessária da ligação mista; entre eles, a altura do perfil de aço (d) e a altura total da laje (hc). Através dos resultados apresentados, pode-se concluir que a curvatura $\phi(M)$ diminui sobre tudo com o aumento de d e hc . A conclusão dos autores é de que os dois primeiros parâmetros citados (d e hc) influenciam significativamente a curvatura $\phi(M)$ e somente estes participam da equação empírica proposta para a curvatura.

Além desses parâmetros, é importante mencionar que as rigidezes à flexão das vigas mistas são diferentes nas regiões de momento negativo e positivo. Se a razão *momento na ligação/momento no vão* for relativamente alta e o *momento de cálculo no vão* for menor que o *momento de início de escoamento*, a diferença entre as rigidezes à flexão positiva e negativa da seção mista afeta bastante as rotações necessárias. Porém, esta diferença tem pequeno efeito nas rotações totais necessárias das ligações se a plasticidade estiver se desenvolvendo no vão da viga e a razão *momento na ligação/momento no vão* for relativamente pequena.

Uma vez que o momento positivo de cálculo pode se aproximar do momento plástico da viga mista, a plasticidade é desenvolvida sobre o vão da viga em uma extensão que

depende da forma do diagrama de momentos fletores. A deformação plástica no vão contribui para as rotações necessárias e, portanto, esta plasticidade deve ser considerada na análise da rotação necessária. Assim, pode-se dizer que para uma viga cujo momento positivo de cálculo aproxima-se do momento plástico da seção, a rotação necessária nos apoios apresenta uma componente elástica e outra plástica. Na Figura 12 é apresentada a curvatura ao longo da viga, onde pode ver-se: na Figura 12(a) as condições de contorno e o carregamento, na 12(b) o diagrama de momento fletor e na 12(c) as distintas parcelas das deformações elástica (parte não rajada) e plástica (parte rajada).

Figura 12 - Curvatura ao longo da viga



Fonte: Vanessa Heckert (2003).

Para a situação mostrada na figura 13(b) e usando o método da carga unitária em uma das extremidades da viga, a parcela elástica da rotação necessária pode ser determinada por (LI *et al.*, 1996):

$$\theta_{nec(e)} = \int_0^L \frac{M(x)M_1(x)}{EI(x)} dx = \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \quad (14)$$

Onde:

$\theta_{nec(e)}$ é a parcela elástica da rotação necessária (em um ponto);

$EI_{(x)}$ é a rigidez à flexão da viga;

$M_{(x)}$ é o momento fletor devido ao carregamento real;

$M_{1(x)}$ é o momento fletor devido ao momento unitário aplicado na extremidade da viga;

L é o comprimento do vão da viga.

Para determinar a parcela plástica da rotação necessária da ligação é necessário conhecer a relação *momento-curvatura* da viga mista na flexão positiva para momento superior ao momento de escoamento. A curvatura da viga correspondente ao momento atuante na seção mista é dada pela seguinte expressão:

$$\varnothing(M) = \frac{M}{EI^{(+)}} + \left[5,7 \left(\frac{d}{h_c} \right)^{0,2} \frac{M_y}{EI^{(+)}} - \frac{M}{EI^{(+)}} \right] \left(\frac{M - M_y}{M_{pl}^{(+)} - M_y} \right)^2 \quad (15)$$

Onde:

$\varnothing(M)$ é a curvatura da viga correspondente ao momento atuante M ;

M é o momento atuante na seção mista;

M_y é o momento positivo correspondente ao início do escoamento da viga mista ($W_{tr} * f_y$);

$M_{pl}^{(+)}$ é o momento plástico positivo da viga mista;

d é a altura total do perfil de aço;

h_c é a altura total da mesa do concreto.

Aplicando-se um momento fletor unitário em uma das extremidades da viga, a parcela plástica da rotação necessária pode ser determinada através da integração da curvatura $\varnothing(M)$ calculada anteriormente:

$$\theta_{nec(p)} = \int_{a_y}^{b_y} \left\{ \varnothing[M(x)] - \frac{M_{(x)}}{EI^{(+)}} \right\} M_{1(x)} dx$$

$$\theta_{nec(p)} = \int_{a_y}^{b_y} \left[5,7 \left(\frac{d}{h_c} \right)^{0,2} \frac{M_y}{EI^{(+)}} - \frac{M}{EI^{(+)}} \right] \left(\frac{M - M_y}{M_{pl}^{(+)} - M_y} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx \quad (16)$$

Onde:

$\theta_{nec(p)}$ é a parcela plástica da rotação necessária (em um ponto);

a_y é a distância da ligação esquerda à primeira seção com momento de escoamento (ver figura 13-c);

b_y é a distância da ligação esquerda à segunda seção com momento de escoamento.

Após várias situações de estudos e baseando-se no método de determinação da rotação necessária proposto acima, os autores concluem que:

- A rotação necessária aumenta com a relação vão/altura da viga mista;
- A rotação necessária diminui com o aumento da relação entre os momentos na ligação mista e no vão;
- Em quanto maior a tensão de escoamento f_y do material utilizado para a viga, maior é a rotação necessária da ligação;
- Caso todos os parâmetros forem constantes, inclusive a relação *vão/altura* da viga, a altura do perfil metálico tem pouca importância no processo de cálculo.
- Quando a viga tem duas cargas concentradas aplicadas nos terços do vão da mesma, exige uma maior rotação necessária no apoio, caso a carga concentrada esteja aplicada no meio do vão, a rotação necessária é menor no apoio e, sendo um carregamento uniformemente distribuído, nesta exige um valor intermediária.
- Com a finalidade de utilizar-se uma rotação necessária menor, pode-se limitar o momento positivo máximo com coeficientes de minoração com valores como $0,9M_p$ ou $0,85M_p$.

3.5 Solução numérica

A seguir são apresentados alguns trabalhos de autores adotando soluções numéricas tanto para problemas de vigas mistas com interação parcial como para vigas mistas considerando a semi-continuidade entre vãos.

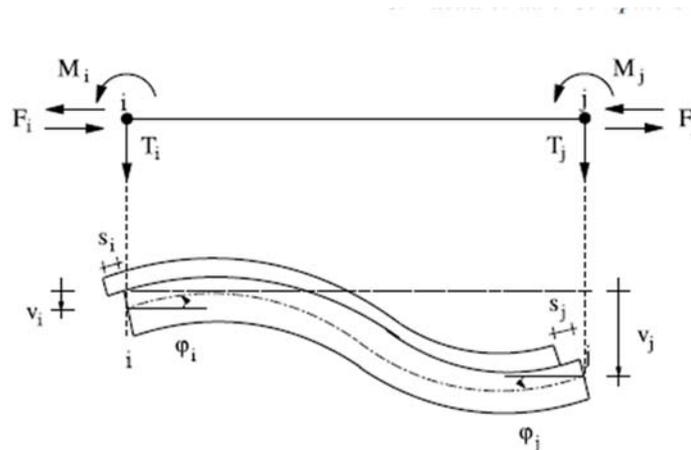
3.5.1 Vigas mistas com interação parcial

Neste tópico, serão citados alguns resumos dos trabalhos mais recentes sobre as soluções numéricas de vigas mistas de aço concreto com interação parcial.

Faella *et al.*,(2002) se basearam na equação cinemática de Newmark para determinar a expressão “exata” da matriz de rigidez e o vetor de forças nodais em vigas mistas com conexão flexível. Na sua proposta, consideraram um elemento linear unidimensional ao longo do comprimento de uma viga bi apoiada com carregamento uniformemente distribuído referindo-se ao método dos elementos finitos. O elemento possui seis graus de liberdade no total, com três graus de liberdade por nó como mostrado na Figura 13. O parâmetro dos deslocamentos nodais em cada nó é composto de rotação, deslocamento vertical e o deslizamento relativo na interface dos dois componentes.

Os autores afirmam que adotaram o mesmo modelo e hipóteses de Newmark para a solução “exata” do elemento finito para vigas mistas com conexão flexível. A introdução dos termos das expressões “exatas” da matriz de rigidez e do vetor da força nodal equivalente (derivadas da solução exata de Newmark), permite empregar o modelo facilmente em programação computacional de elemento finito para análises de diferentes tipos de vigas mistas e suas condições de carga.

Figura 13- forças nodais e deslocamentos de uma viga mista com conexão flexível



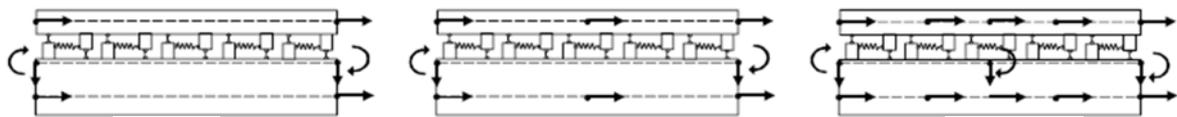
Fonte: FAELLA et al., 2002

DALL'ASTA; ZONA (2002) apresentaram em seu trabalho, a análise não linear de vigas mistas baseando-se no método de deslocamento adaptado por Newmark (1951). Na sua formulação baseado no método dos elementos finitos, adotaram um elemento de 16 graus de liberdade com uma aproximação polinomial no campo de deslocamento introduzindo mais nós e uma função polinomial de quarta ordem para os deslocamentos axiais, uma função polinomial de Hermite de quinta ordem para as deflexões, enquanto calibraram os nós internos de forma que o grau da função polinomial da contribuição do deslizamento na interface seja o mesmo para evitar um eventual travamento na interface, Figura 14.

Posteriormente foi comparada este elemento com outros de 8 e 10 graus de liberdade com objetivo de buscar o caminho de equilíbrio e a convergência da solução numérica à da literatura.

Os autores determinaram o vetor de carga, o vetor de força nodais e a matriz de rigidez tangente através da integração numérica usando a regra dos trapézios e mediante a integração de Gauss ao longo do comprimento do elemento. Através o método de controle de deslocamento, uma implementação foi feita baseando-se na formulação proposta por Bazot e Dhatt (1979), já que esta formulação tem a capacidade de controlar a evolução da estrutura de uma forma simples e traçar um caminho de equilíbrio suave.

Figura 14- Campos de deslocamento dos elementos finitos com 8, 10 e 16 graus de liberdade (GL)



Fonte: DALL'ASTA; ZONA, (2002).

Com o objetivo de avaliar a influência dos tipos de elementos finitos adotados na análise, foi usado uma mesma quantidade de graus de liberdade total com os diferentes elementos anteriormente mencionados em um problema de viga mista contínua de aço concreto com dois vãos e simplesmente apoiada.

Os resultados da comparação demonstram significativa diferença entre os elementos analisados. Principalmente o elemento de 8 graus de liberdade mostra pior resultado para o erro local, com possibilidade da ocorrência de travamento na interface. Os autores afirmaram que a efetividade do grau de liberdade do elemento diminuiu quando a rigidez da conexão atinge consideráveis valores. Enquanto o elemento de 16 graus de liberdade deu resultados bastante aceitáveis para o erro tanto local como global e converge para a solução analítica. No entanto precisa de uma implementação mais complexa e por tanto um custo computacional elevado.

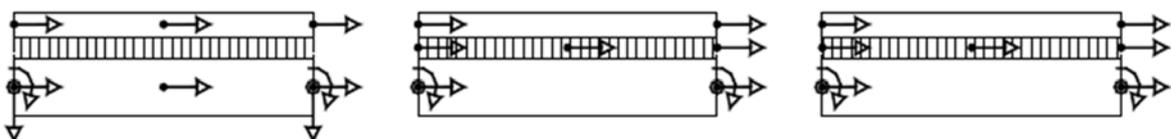
DALL'ASTA; ZONA,(2004) propuseram em seu trabalho uma comparação entre a formulação de um elemento misto que utiliza três campos diferentes (deslocamento, deformação e tensão) e os elementos baseados em deslocamento. Através do método dos elementos finitos os autores formularam sua solução para o elemento baseado em deslocamento com graus de liberdades diferentes para o elemento apresentado no seu trabalho anterior (DALL'ASTA; ZONA, 2002), ver figura 14. Enquanto o elemento misto de 10 graus de liberdade apresentado pelos autores para os três diferentes campos foi formado pelas funções de forma da seguinte maneira:

- Deslocamento
 - ✓ Axiais: Polinômio quadrático
 - ✓ Transversais: Polinômio de Hermite de 3ra ordem
- Deformação
 - ✓ Axiais: Polinômio linear
 - ✓ Curvatura: Polinômio linear
 - ✓ Deslizamento: Polinômio quadrático
- Tensão
 - ✓ Axiais: Polinômio linear
 - ✓ Momento: Polinômio linear
 - ✓ Deslizamento: Polinômio quadrático

Na figura 15 são apresentados os respectivos campos de deslocamento, deformação e tensão de um elemento misto, onde os dígitos 112 representam respectivamente os números de graus polinomial das funções de forma no eixo axial, da deflexão e na interface.

Os autores concluíram que dos resultados da comparação entre os elementos baseados em deslocamento e a formulação do elemento misto apresentada descreve um comportamento bastante similar e especialmente com respeito ao erro local do campo de tensão que apresenta uma curva mais suave da força axial e do momento fletor e sem embargo aparece descontinuidades na curva da força cortante. Por outro lado, a comparação da formulação do elemento misto com respeito à literatura mostra resultados confiáveis e mais realista.

Figura 15- Campos de deslocamento, deformação e tensão do elemento misto



HW212 campo de deslocamento HW112 campo de deformação HW112 campo de tensão

Fonte: DALL'ASTA; ZONA, 2004

Xu; Wu,(2007) desenvolveram um novo modelo de tensão plana de vigas mistas com interação parcial considerando através do método de estado espaço feito em seu trabalho anterior (WU et al, 2003) que é a derivada das equações que governam problemas de tensão plana. A formulação foi baseada apenas para vigas simplesmente apoiada e a expansão do método de Fourier para resolver a solução analítica bidimensional. Os autores não consideraram as hipóteses da deformação de Euler-Bernoulli, porque envolveram o efeito da deformação cortante para que possa ser bidimensionalmente exata; e desta forma poder usar o modelo para determinar as distribuições de forma mais real das deformações laterais e longitudinais na interface parcial da viga mista.

Uma vez desenvolvido o modelo, os autores compararam com o modelo unidimensional (Teoria de viga de Euler Bernoulli) com o objetivo de comprovar a sua precisão e eficácia. XU; WU,(2007) confirmaram que a teoria unidimensional não prevê corretamente a deflexão na presença de cortante. Contudo afirmaram que quando a relação comprimento altura é maior que 5, a deformação não tem muita influência na viga mista já que proporciona um erro menor que 5%.

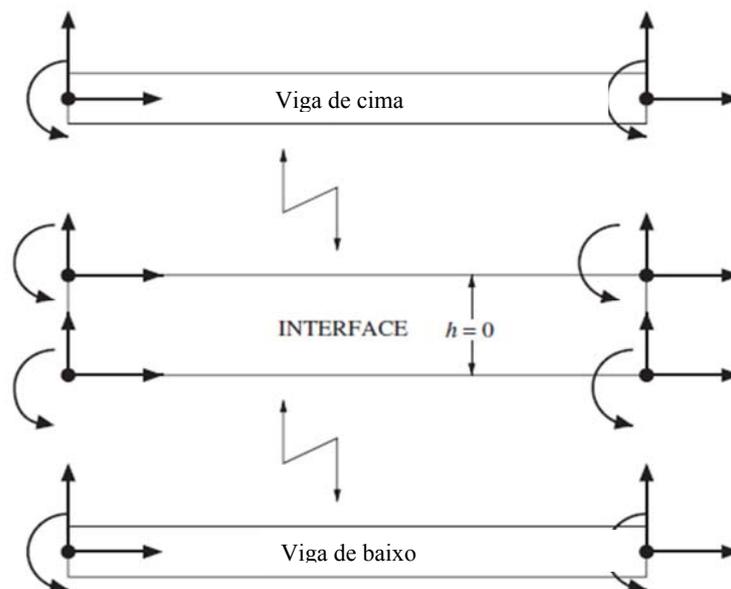
Da.SILVA, SOUSA Jr J.B.M.,(2008) apresentaram em seu trabalho a formulação de uma família de elementos de interface com espessura zero para a simulação de vigas mistas com deformação horizontal na conexão ou com deslizamento entre camadas, utilizando tanto a teoria de Euler como a teoria de Timoshenko. A formulação numérica do elemento de interface foi elaborada de forma que os elementos de interface tenham os mesmos graus de liberdade que os elementos da viga, como mostrado na figura 16.

Os autores propuseram para suas soluções numéricas, agregar na formulação baseada na teoria de Euler Bernoulli um grau de liberdade extra na interpolação do deslocamento axial do elemento de interface com espessura nula e três outros elementos de interface com diferentes esquemas de interpolação para a formulação baseada na teoria de Timoshenko como mostrado na Figura 17. Tanto a consideração do grau de liberdade extra no elemento de interface da viga de Euler Bernoulli como a proposta dos três esquemas de interpolação do elemento de interface para a formulação baseada em Timoshenko tem como

objetivo de prever e aliviar os efeitos de travamento uma vez combinados os elementos da viga com os elementos de interface.

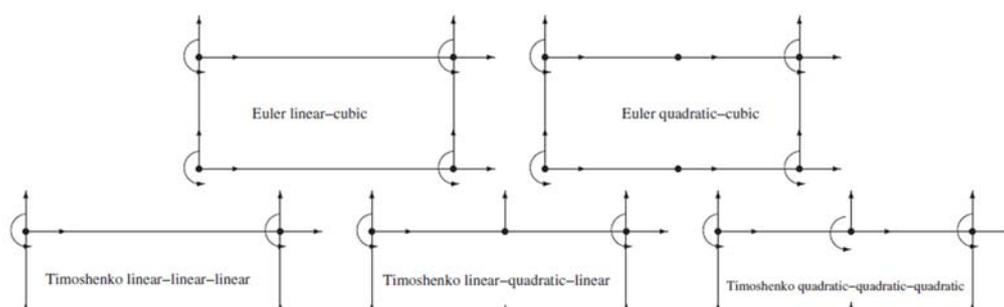
Os autores concluíram que dos resultados obtidos e comparados com as soluções analíticas da literatura, mostram que os elementos quadráticos baseados na teoria de viga de Timoshenko convergem para a solução exata para pequenos valores de rigidez na conexão. Contudo apresentam um comportamento estranho da distribuição do deslizamento quando a conexão na interface alcança grandes valores. O elemento de interface quadrática de Timoshenko junto com o elemento de viga de deformação por cisalhamento (Elemento quadrático melhorado de Timoshenko) dão resultados mais concretos e sem efeito de travamento no deslizamento ou no cortante. Este elemento é capaz de modelar com precisão quando se apresenta problemas de vigas mistas bidimensionais complexos. Por outro lado, o elemento quadrático de Euler Bernoulli tanto para pequenos ou grandes valores apresentam resultados satisfatórios respeito à solução analítica.

Figura 16- Ligação entre elemento de interface e elementos de viga



Fonte: SILVA, DA; SOUSA Jr JBM, (2008).

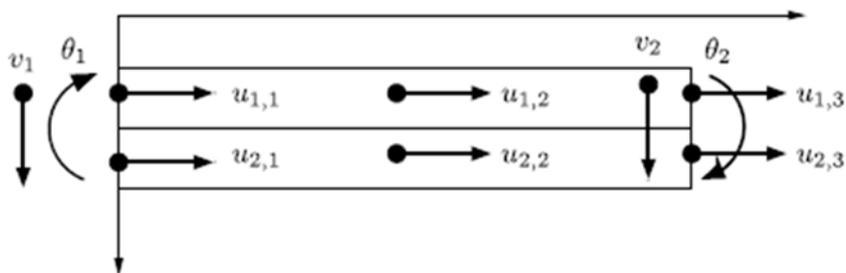
Figura 17- Graus de liberdade do elemento de interface.



Fonte: SILVA, DA; SOUSA Jr JBM, 2008

SOUSA Jr J.B.M. et al., (2009) propuseram um modelo de elemento finito baseado em deslocamento para materiais não lineares e análise geométrica de viga-coluna mista com interação parcial através da formulação total lagrangiana dos elementos finitos. Um elemento de 10 graus de liberdade foi apresentado na formulação do modelo como mostra-se na Figura 18 e para mostrar uma continuidade no deslocamento transversal e em sua primeira derivada, empregaram uma função de forma de Hermite (Polinômio de terceira ordem) em quanto que para os deslocamentos axiais um polinômio de segunda ordem.

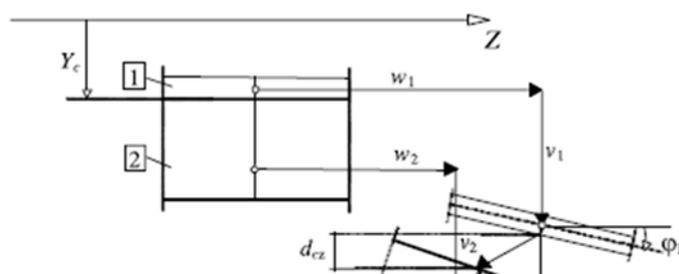
Figura 18- Elemento de 10 graus de liberdade da viga mista.



Fonte: SOUSA Jr JBM et al., (2009).

Dos resultados obtidos da sua formulação e comparados com os resultados da literatura, são bastante precisos; o modelo pode se qualificar como um modelo simples e confiável para análise não linear de viga-coluna mista com interação parcial (SOUSA Jr JBM et al.,2009).

Figura 19- Campo de deslocamento do modelo de viga mista

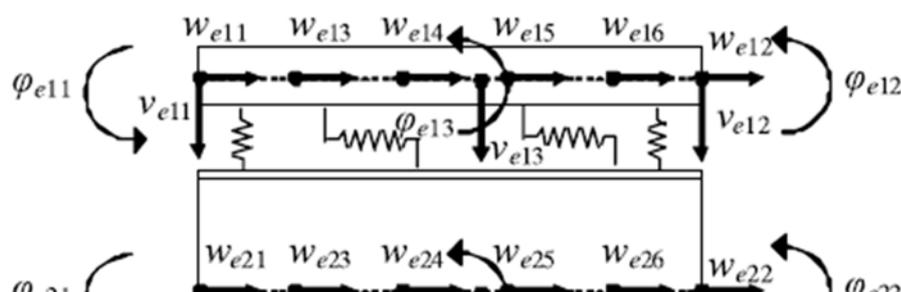


Fonte: RANZI et al., (2010).

RANZI et al.,(2010) realizaram um modelo cinemático para vigas mistas plana que inclui a integração parcial longitudinal e transversal dentro da teoria de deformação finita não linear. Esta formulação foi derivada sobre a base da teoria de pequenas deformações e rotações moderadas com objetivo de aproximar-se dos problemas da vida real. A consideração da interação parcial tanto no eixo longitudinal como transversal (ver figura 19) permite, segundo os autores, proporcionar de forma ampla uma descrição da deformação e da tensão na conexão do elemento, com objetivo de mostrar a importância que tem os efeitos da não linearidade geométrica e como aqueles se vem influenciados pela rigidez de conexão de cisalhamento. Ranzi *et al.*, ilustraram dois exemplos de vigas mistas onde se basearam na formulação do método dos elementos finitos baseado em deslocamento para determinar e comparar os resultados da solução numérica usando elemento finito de 24 graus de liberdade para um modelo geométrico não linear e um elemento de 22 graus de liberdade para um modelo geométrico linear respectivamente representados nas Figuras 20 e 21. Em ambos elementos foram usadas funções polinomiais de quinta ordem para as deflexões e deslocamentos axiais.

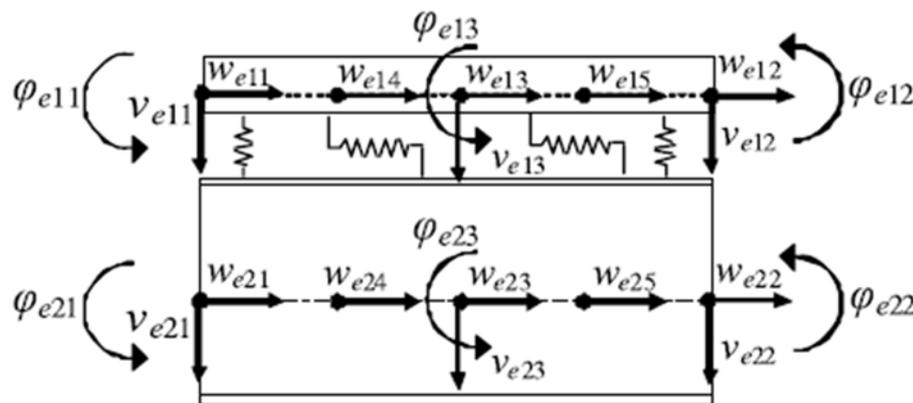
Como resultados da comparação, os autores afirmam que o modelo geométrico não linear mostra um incremento da deflexão com respeito ao modelo geométrico não linear para a viga em balanço que vai aumentando na medida que a rigidez da conexão vai diminuindo e um decremento de deflexão com respeito ao modelo geométrico não linear para a viga **pregada** que também vai aumentando quando a rigidez de conexão vai diminuindo.

Figura 20- Elemento finito geométrico não linear de 24 graus de liberdade com interação parcial horizontal e transversal



Fonte: RANZI et al., (2010).

Figura 21- Elemento finito geométrico linear de 22 graus de liberdade com interação parcial horizontal e transversal



Fonte: RANZI et al., (2010).

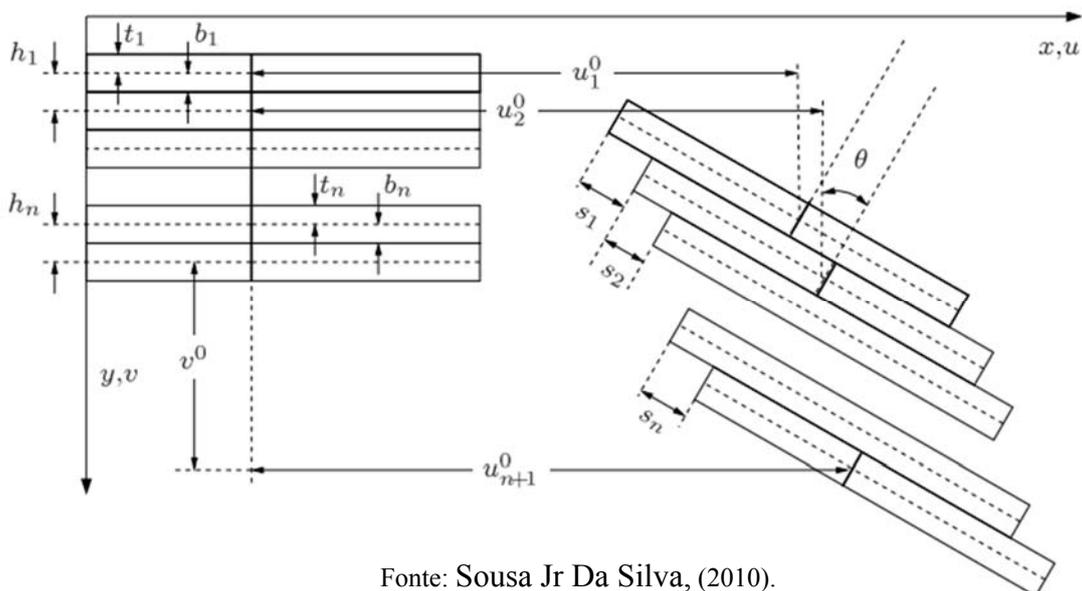
SOUSA Jr JBM; SILVA, DA,(2010) desenvolveram em seu trabalho as soluções das formulações baseadas nas análises analítica e numérica de vigas mistas com múltiplas camadas considerando apenas a interação parcial horizontal entre elementos, figura 22. A solução analítica foi desenvolvida sob a hipótese da teoria de viga de Euler Bernoulli e de Timoshenko onde consideraram como únicas incógnitas em seu sistema de equação diferencial os valores das distribuições do deslizamento entre a quantidade de camada. Em quanto ao desenvolvimento da análise numérica foi empregado elementos de interface de espessura zero especialmente baseando-se na formulação original de Goodman, Taylor e Breke. Os autores foram calibrando a formulação com objetivo de associar os elementos de interface de forma adequada com respeito aos elementos finitos da viga.

Dois diferentes elementos de interface foram desenvolvidos; onde o primeiro foi baseado na formulação da teoria de viga de Euler Bernoulli com interpolação linear e quadrática no deslocamento axial e interpolação de Hermite no deslocamento transversal, em

quanto que no segundo, empregaram um elemento com interpolação quadrática para o deslocamento axial, transversal e a rotação na formulação para elementos de Timoshenko.

Dos resultados mostrados, os autores afirmam que com uma combinação bem-feita entre elementos de interface e elementos de viga oferece uma modelação numérica precisa, simples e confiável para análises de vigas de múltiplas camadas, ademais usando interpolação quadrática nos deslocamentos axiais mostram melhores resultados comparando com elementos com interpolação linear; já que quando a rigidez de conexão começa a ter grandes valores, começa a aparecer efeitos de travamentos no deslizamento.

Figura 22- Campo de deslocamento para uma viga mista de múltiplas camadas



Fonte: Sousa Jr Da Silva, (2010).

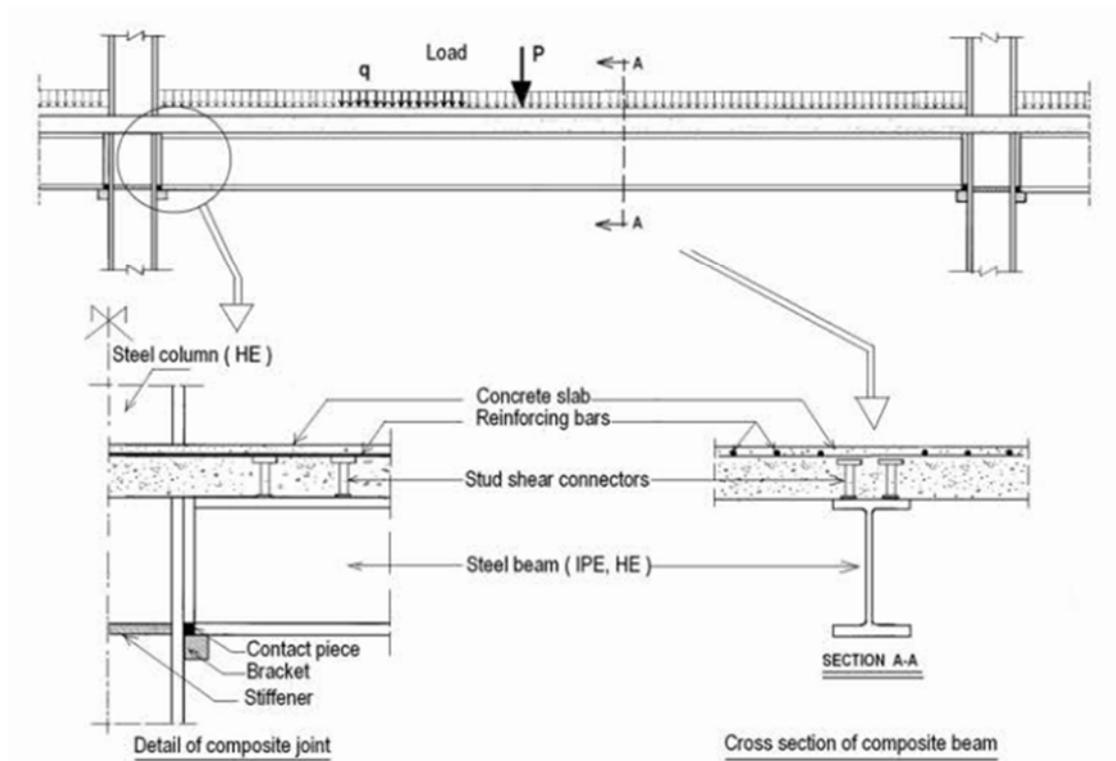
TITOUM et al., (2008) apresentaram um modelo de análise de vigas mistas semi-contínuas com interação parcial usando elementos finitos bidimensionais. O modelo foi desenvolvido através do programa ANSYS, onde o objetivo foi estudar o comportamento da viga mista semi-contínua com interação parcial, principalmente nas suas regiões de momento positivo (meio da viga) e negativo (na ligação). O conceito da interação parcial na região do momento negativo neste caso será válido sempre e quando os conectores de cisalhamento sejam o suficientemente dúcteis. Os autores realizaram um estudo paramétrico para investigar os efeitos da interação parcial junto com os efeitos da proposição de reforçamento sobre o suporte e a presença dos reforços nas colunas para o comportamento da viga mista semi-contínua.

A Figura 23 ilustra um sistema de viga mista semi-contínua composta de uma viga mista conectada nas suas extremidades por duas colunas através de ligações mistas. A

simulação do sistema foi realizada através de um modelo de elementos finitos bidimensional, onde os autores consideraram a não linearidade das propriedades dos componentes dos materiais e desprezaram os efeitos da não linearidade geométrica devido à hipótese da consideração de pequenas deformações relativas na estrutura. Após discretização e consideração das condições de contorno da viga mista, os autores procederam a uma comparação do modelo com respeito aos resultados experimentais disponíveis na literatura para avaliar sua precisão e eficácia.

Os autores, chegaram à conclusão de que quando o grau da rigidez na conexão diminui, a capacidade de carregamento último diminui levemente e a deflexão no meio do vão e a rotação na ligação aumentam bastante. Quando o grau da rigidez na conexão é parcial tanto na região do momento positivo como negativo, não se observa uma falha ou ruptura dos conectores de cisalhamento.

Figura 23- Sistema de viga mista semicontínua.



Fonte: MASSAOUD TITOUIM et al., (2008).

A presença das barras de reforços longitudinais contribuem consideravelmente na ação mista na ligação viga-coluna; ademais quando a proporção do reforço no suporte aumenta, a capacidade de carga tende a aumentar e a deflexão no meio do vão e a rotação na ligação diminuem. Por último com a presença dos reforços transversais na coluna, provoca um aumento da capacidade de carga e evita uma eventual flambagem local da coluna.

4 MÉTODO DE ANÁLISE PROPOSTO

Neste capítulo é feita uma descrição do modelo utilizado no programa desenvolvido e dos tipos de análises necessárias.

Uma formulação numérica é implementada através do método dos elementos finitos para vigas mistas com deslizamento na interface de dois ou mais componentes e outra para ligações mistas considerando a semi-continuidade entre vãos. O desenvolvimento dos modelos numéricos partirá da definição, para cada elemento a ser implementado, da sua

formulação básica para uma solução não linear devida ao comportamento dos materiais e da relação carga deslizamento na interface da seção mista.

4.1 Modelo para análise de vigas mistas contínuas

A primeira análise a ser considerada para o desenvolvimento da formulação através do método dos elementos finitos para vigas mista parcialmente conectadas, é o estabelecimento da relação cinemática entre os campos de deslocamentos e os campos de tensões generalizadas correspondentes. As principais hipóteses adotadas neste trabalho são as seguintes:

- As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga deformada.
- Existem deslocamentos axiais relativos entre os componentes da viga mista ao longo da direção axial, mas não na direção transversal da viga.
- Considere pequenas deformações, grandes deslocamentos e rotações moderadas.

As equações que correspondem às hipóteses cinemáticas, quais são descritas na Figura 17, são apresentadas como:

$$s_i(x) = u_{i+1}^0(x) - u_i^0(x) + h_i \Phi(x) = u_{i+1}^0(x) - u_i^0(x) + h_i v'(x) \quad (17)$$

$$u_i(x, y) = u_i^0(x) - (y - y_i) v'(x) \quad (18)$$

$$v(x, y) = v^0(x) \quad (19)$$

A deformação axial $\varepsilon_i(x)$ nas seções analisadas ao longo do elemento misto é dada através da derivada do deslocamento em relação à variável x da equação 18.

$$\varepsilon_i(x, y) = \varepsilon_i^0(x) - (y - y_i) \kappa(x) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (20)$$

Na equação 20, $\kappa(x)$ é a curvatura da seção transversal analisada ao longo do eixo x , $\varepsilon_i^0(x)$ a deformação axial no eixo de referência. Daí pode-se generalizar o vetor das deformações que contribuem na expressão do trabalho interno no elemento em função dos deslocamentos nodais.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \langle \varepsilon_1^0 \quad \cdots \quad \varepsilon_n^0 \quad \kappa \quad s_1 \quad \cdots \quad s_{n-1} \rangle^T = \partial \mathbf{u} \quad (21)$$

Matricialmente a relação de compatibilidade entre elementos e seus respectivas incrementos é dada da forma seguinte.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \vdots \\ \varepsilon_n^0 \\ \kappa \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & & & \frac{1}{2}(\partial_x v)\partial_x \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \partial_x & \frac{1}{2}(\partial_x v)\partial_x \\ & & & -\partial_{xx} \\ -1 & 1 & & h_1\partial_x \\ & \cdots & & \vdots \\ & & 1 & h_{n-1}\partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v \end{bmatrix} \quad (22)$$

e

$$\begin{bmatrix} \delta\varepsilon_1^0 \\ \vdots \\ \delta\varepsilon_n^0 \\ \delta\kappa \\ \delta s_1 \\ \vdots \\ \delta s_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & & & (\partial_x v)\partial_x \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \partial_x & (\partial_x v)\partial_x \\ & & & -\partial_{xx} \\ -1 & 1 & & h_1\partial_x \\ & \cdots & & \vdots \\ & & 1 & h_{n-1}\partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \vdots \\ \delta u_n \\ \delta v \end{bmatrix}$$

Como se pode perceber na relação de compatibilidade da matriz da deformação generalizada tem termos não lineares devido à segunda derivada do deslocamento transversal mostrado na equação 20.

Enquanto a expressão da tensão generalizada é dada em função dos esforços presentes na seção transversal do elemento. Esta operação da equação 23 requer a integração desses esforços, do mesmo que das suas derivadas com respeito às variáveis deformacionais na hora de determinar os módulos de elasticidades tangente dos materiais.

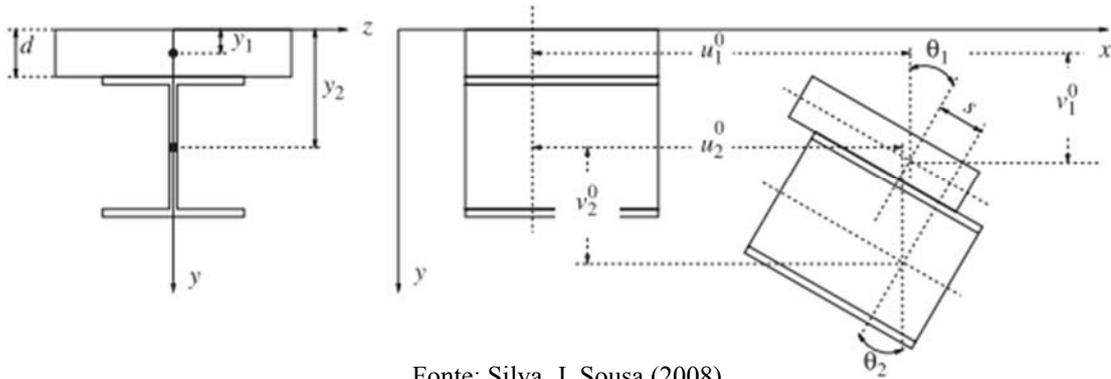
$$\boldsymbol{\sigma} = \langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \quad M \quad S_1 \quad \cdots \quad S_{n-1} \rangle^T \quad (23)$$

$$N_i(x) = \int_A \sigma_i dA \quad (24)$$

$$M(x) = \sum_1^n M_i(x) = \sum_1^n \int_A (y - y_i) \sigma_i dA \quad (25)$$

Onde N_i é a força normal em cada camada, M é o momento total gerado na viga mista devido à deformação por flexão e S_i a força de conexão gerada em cada interface.

Figura 24- Deformação de um segmento da viga mista com interação parcial



Fonte: Silva, J. Sousa (2008)

Com a possibilidade das relações tensão-deformação e carga-deslizamento respetivamente dos materiais e nas interfaces dos componentes, as expressões das mesmas poderão ser não lineares, sendo assim a determinação dos módulos de elasticidades tangente. O módulo da seção tangente corresponde às derivadas das forças em cada seção respeito às deformações generalizadas.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon_i^0} = \int_A \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i^0} dA = \int_A E_{ii} dA = \overline{EA}_i \quad (26)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \kappa} = \int_A \frac{\partial \sigma_i}{\partial \kappa} dA = \int_A E_{ii} (y - y_i) dA = \overline{ES}_i$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial \varepsilon_i^0} = \int_A \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i^0} (y - y_i) dA = \int_A E_{ii} (y - y_i) dA = \overline{ES}_i$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial \kappa} = \int_A \frac{\partial \sigma_i}{\partial \kappa} (y - y_i) dA = \int_A E_{ii} (y - y_i)^2 dA = \overline{EI}_i$$

Sendo E_{ii} a derivada da relação uniaxial da tensão-deformação para cada componente da seção transversal.

Através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), após uma adequada discretização do modelo, determina-se a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas de cada elemento. Há de saber que estas operações mencionadas acima são fundamentais na implementação computacional.

Fonte: Dall'Asta e Zona (2004a)

Para a avaliação total da deformação virtual, tem-se,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta(\partial \mathbf{u}) = \delta(\partial \Phi \mathbf{d}) = \overline{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} \quad (28)$$

A variação do trabalho interno é necessária para a avaliação do vetor de força interna como seguinte.

$$\delta W_i = \int_0^\ell \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \delta \mathbf{u}^T \int_0^\ell \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (29)$$

Devido à relação não linear tensão deformação dos materiais na seção mista e da relação carga deslizamento na interface, a equação de equilíbrio incrementais será não linear, levando então à obtenção de uma matriz de rigidez tangente K_T para a solução não linear. A matriz de rigidez tangente definida através da derivada do vetor de forças internas dos elementos individuais em relação aos deslocamentos nodais.

$$k_T = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} = \int_0^\ell \left(\overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} \right) dx \quad (30)$$

O primeiro termo da rigidez tangente também chamado de rigidez tangente do material é dada por,

$$k_{Tm} = \int_0^\ell \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} dx = \int_0^\ell \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \overline{\mathbf{B}} dx = \int_0^\ell \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \overline{\mathbf{B}} dx \quad (31)$$

Onde a matriz \mathbf{C} contém o módulo de elasticidade tangente da seção, do mesmo que a rigidez de conexão.

O segundo termo da rigidez tangente também chamado de rigidez tangente da geometria é dada por,

$$k_{Tg} = \int_0^\ell \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} dx = \int_0^\ell \frac{\partial (\overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma})_{\sigma=const}}{\partial \mathbf{d}} dx = \int_0^\ell \frac{\partial (\overline{\mathbf{B}}_1 N_1 + \dots + \overline{\mathbf{B}}_n N_n)}{\partial \mathbf{d}} dx = \int_0^\ell \mathbf{B}_{NL} \left(\sum_{i=1}^n N_i \right) dx \quad (32)$$

A derivada da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ pode ser obtida notando que só as colunas relacionadas com as forças normais têm derivadas não nula. Enquanto a matriz \mathbf{B}_{NL} é dada na seguinte expressão.

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{v,x} \Phi_{v,x}^T \end{bmatrix} \quad (33)$$

Uma vez conhecida as forças internas e a matriz de rigidez tangente, pode ser obtida a equação de equilíbrio incrementais a partir de métodos incrementais iterativos (Newton Raphson), equação 34.

$$G(d, \lambda) = g_{(d)} - \lambda P = 0 \quad (34)$$

Onde $g_{(d)}$ é o vetor das forças nodais internas da estrutura em função dos deslocamentos,

λP é o vetor das forças externas aplicada (λ , o fator de carga).

$$K_T = \frac{\partial g_{(d)}}{\partial d}$$

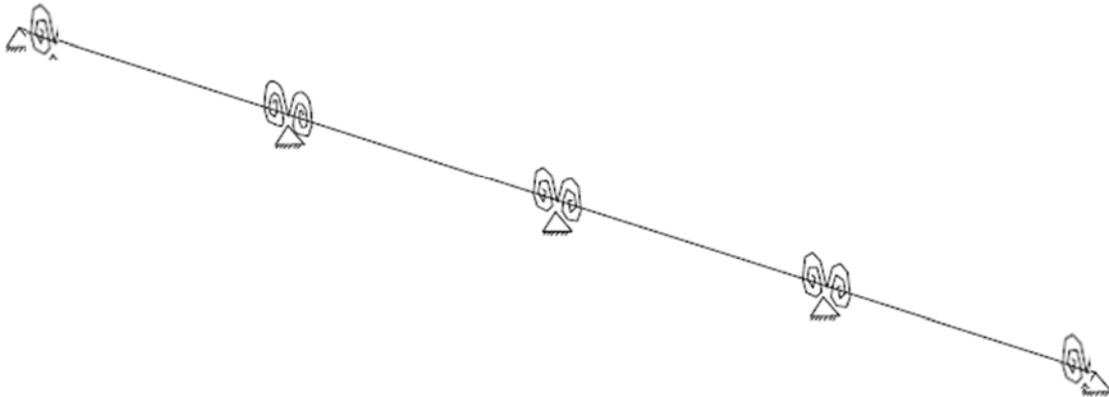
$$K_T \Delta_d - \Delta_\lambda P = 0 \quad (35)$$

4.2 Modelo para análise de ligações mistas em vigas semicontínuas

No modelo desenvolvido no programa para análise de ligações, os elementos de apoios tanto de viga como de pilar são considerados como apoios indesejáveis no modelo.

Quando a viga mista tem como elemento de apoio a alma do pilar, esse último não vai ter uma rigidez suficiente para neutralizar o momento negativo na ligação. Caso o elemento de apoio for a mesa de pilar, neste caso a rigidez é significativa. Contudo pode ser necessária a utilização de enrijecedores transversais para garantir a não flambagem do pilar. Adotou-se a hipótese de que o momento absorvido pelo pilar, estando a ligação na alma ou na mesa, seria desprezível. Já quando o elemento de apoio é uma viga, é necessário que suas propriedades como viga de aço ou como viga mista sejam utilizadas corretamente na análise de deslocamentos. As extremidades das vigas mistas e as extremidades dos elementos suportes são sempre consideradas rotuladas no plano de flexão (Figura 27).

Figura 26- Modelo de análise para ligações mistas



Fonte: Vanessa Heckert (2003).

A implementação computacional do modelo numérico desenvolvido neste trabalho de análise avançada de vigas mistas semicontínuas partirá da implementação feita pelo Professor João Batista Marques de Sousa Junior (2014). Através da linguagem interna da plataforma Maple, foram implementados códigos em linguagem de programação de alto nível através da utilização de ferramentas de matemática simbólica permitindo um procedimento de cálculo para a análise numérica de vigas mistas de mais de uma camada (Euler Bernoulli) considerando a não linearidade geométrica e física e usando elementos de mola para simular a conexão semi-rígida nos apoios. Para considerar as ligações mistas implementou-se uma alteração da matriz de rigidez original do programa, para que se possa introduzir a rigidez de serviço da ligação adequada à análise desejada. Com base neste programa obtém-se todas as propriedades elásticas e plásticas das vigas mistas e das ligações mistas. Obtém-se também os esforços solicitantes de cálculo nas vigas mistas.

A solução para a equação de equilíbrio incremental, (equação 34) pode ser obtida através de dois métodos que são o método de controle de deslocamento e o método de controle de carga. Contudo existem também outros métodos para a solução do problema entre eles, o método de comprimento de arco, o método de incremento constante de Trabalho externo etc.

Para determinar a solução do problema através do controle de carga, basta fixar o fator de carga em cada passo e para o controle de deslocamento estima-se um valor inicial do deslocamento de um ponto fixo, que se vai incrementando em cada passo determinando os

fatores de carga correspondentes. Vale salientar que neste trabalho, as soluções dos problemas apresentados são obtidas através do controle de deslocamento; onde o incremento de deslocamento é introduzido nos dados de entrada com o objetivo de gerar os correspondentes fatores de cargas que serão multiplicados pela carga de referência aplicada no elemento.

5 EXEMPLOS APLICADOS

Neste capítulo, foram resolvidos alguns exemplos de vigas mistas semicontínuas com interação parcial de forma a validar as implementações feitas neste trabalho.

Inicialmente foi resolvido um problema de viga mista simplesmente apoiada, uniformemente carregada, com relações tensão-deformação e carga-deslizamento lineares tanto dos materiais como da conexão respetivamente. Em seguida são ilustrados dois casos do mesmo problema com mudanças nas condições de apoios; ou seja, um caso considerando os

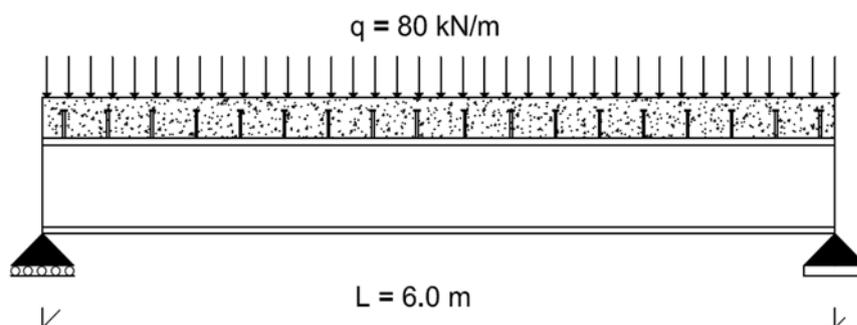
apoios engastados e o outro semi-rígido. Com estas propriedades dos materiais e conexão mencionadas acima, pode-se utilizar o processo de solução analítica da equação diferencial de Newmark para a determinação da solução exata do problema e posteriormente comparar com a solução numérica utilizada neste trabalho.

Em seguida, resolve-se um problema de viga mista com interação parcial, com dois vãos simétricos e analisando o sistema considerando o α como contínuo, engastado e finalmente semicontínuo. O exemplo foi tratado pelos autores Dall'Asta e Zona (2004a) em seus trabalhos anteriores, nos quais são fornecidas respostas que serão utilizadas na comparação da análise numérica realizada usando os elementos implementados neste trabalho.

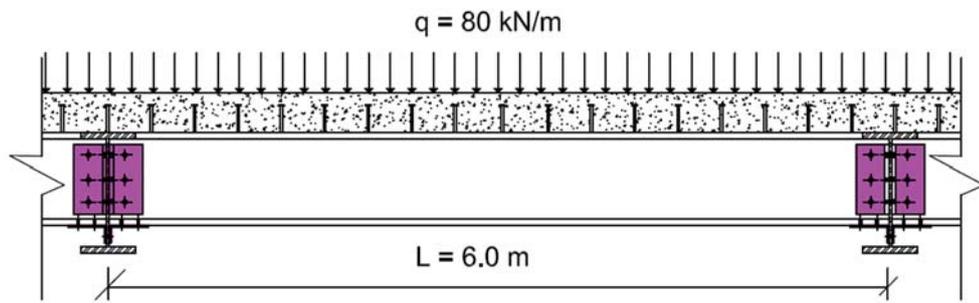
5.1 PRIMEIRO EXEMPLO – Análise linear de viga mista uniformemente carregada em um vão.

Nesta seção, é apresentado um problema de viga mista formada de três diferentes tipos de apoios representados na Figura 27a, 27b e 27c, uniformemente carregada, com relações tensão-deformação dos materiais linear e carga-deslizamento da conexão também linear. Com estas propriedades, pode se utilizar a equação diferencial de Newmark para determinar a solução exata do problema, que posteriormente será comparada com as soluções numéricas encontradas através da implementação dos elementos neste trabalho.

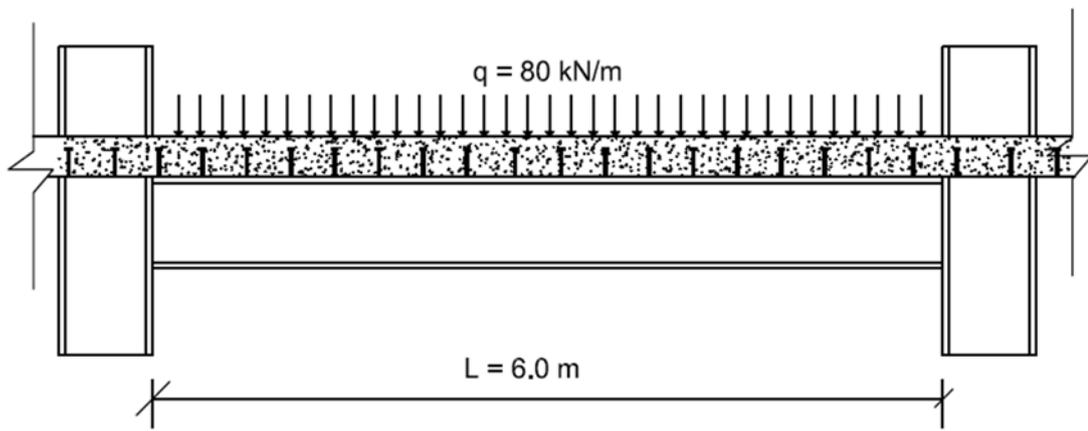
Figura 27 – Viga mista com interação parcial uniformemente carregada: a) Biapoiada; b) Semi-rígida; c). Engastada; d) Seção transversal (mm).



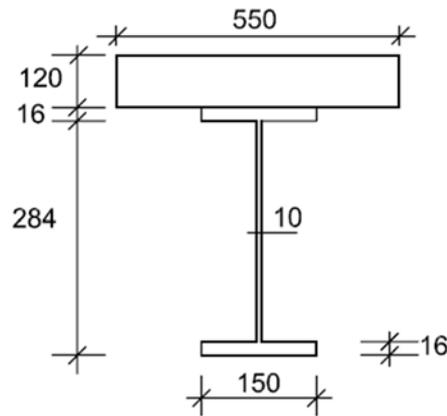
a) Biapoiada



b) Semi-rígida



c) Engastada



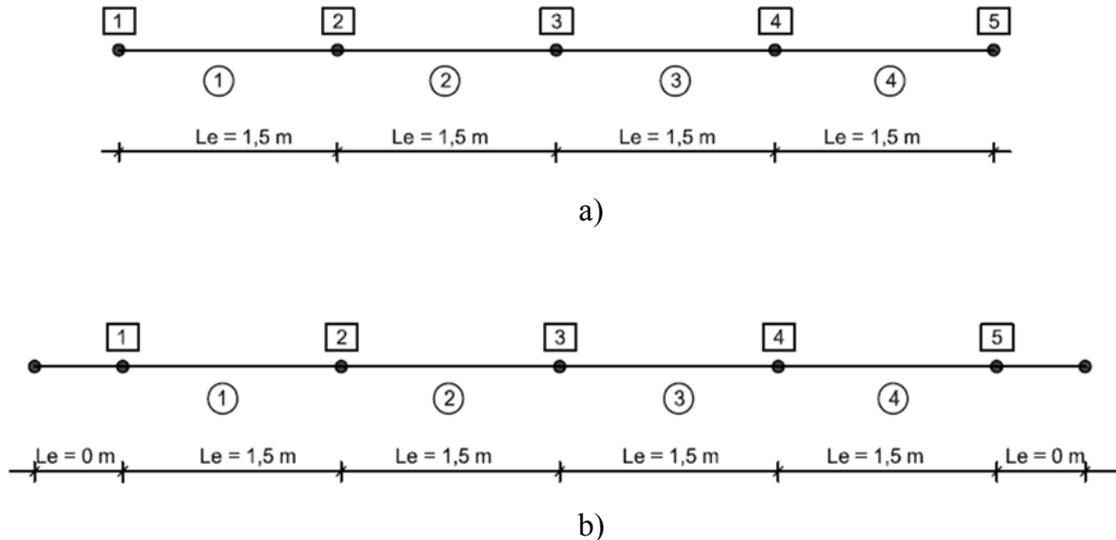
d) Seção transversal

Fonte: Autor.

A solução numérica obtida da implementação neste trabalho é dada, em cada elemento da discretização, por polinômios obtidos através das funções de interpolação dos deslocamentos nodais do elemento. Sendo assim, para os elementos implementados neste trabalho a solução numérica para os deslocamentos transversais será formada por polinômios cúbicos e quadráticos para os deslocamentos axiais.

A finalidade principal deste exemplo (Figura 27) consiste em analisar a deformada de uma viga mista semi-rígida comparada com uma simplesmente apoiada e outra engastada nas suas extremidades. A viga está submetida a carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão e a caracterização do seu comportamento foi testada para diferentes valores da rigidez de serviço na ligação mista. A discretização do elemento foi feita utilizando-se 4 elementos e através da análise do método de controle de carga (figura 28), onde foi aplicada um fator de carga em cada passo para a determinação dos deslocamentos ao longo da estrutura. Foram admitidos $E_c = 5700 \text{ MPa}$, $E_s = 205000 \text{ MPa}$ para os módulos de deformação do material do concreto e do aço respectivamente. A rigidez de conexão na interface da viga mista que foi adotada neste exemplo foi de $K_s = 120 \text{ MPa/m}$. O valor da rigidez de serviço S_i foi de $0,1 \text{ kN.m/rad}$, 100 kN.m/rad , 1000 kN.m/rad , 10000 kN.m/rad e 100000 kN.m/rad . Para a solução exata da equação diferencial de Newmark, foram considerados, a carga uniformemente distribuída $q = 80 \text{ kN/m}$ ao longo de um comprimento de $L = 6 \text{ m}$.

Figura 28 – Discretização do elemento de viga mista: a) Biapoiada e Engastada; b) Semi-rígida



Fonte: Autor.

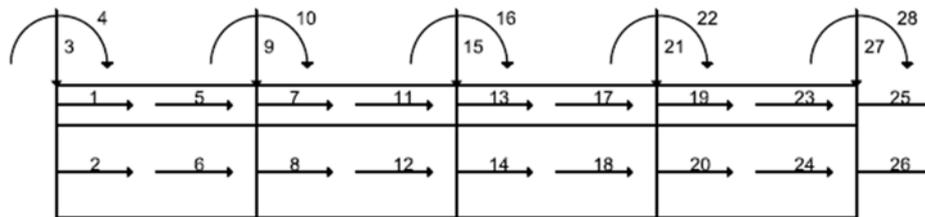
As hipóteses cinemáticas ligadas à deformação de um elemento de viga de Euler-Bernoulli exigem, para o modelo de elementos finitos de barra que procura modelar este tipo de estrutura, funções de interpolação que garantam a continuidade dos deslocamentos transversais, axiais e das rotações nas extremidades dos elementos, sendo estas últimas consideradas iguais às derivadas dos deslocamentos transversais.

Para garantir tais exigências e a condição de representatividade das equações diferenciais que governam o problema, deve-se ter no mínimo um polinômio de terceiro grau para interpolação dos deslocamentos transversais e no mínimo linear para os deslocamentos axiais.

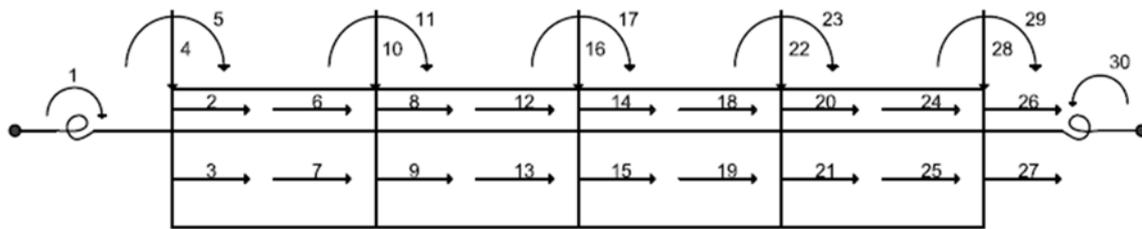
A figura 29.a ilustra os deslocamentos nodais \mathbf{u} do elemento finito utilizado neste trabalho para formulação de viga mista com interação parcial para os apoios considerados simplesmente apoiados e engastados, em quanto a figura 29.b mostra os deslocamentos nodais para a viga considerada semi-rígida. Para considerar a viga mista como biapoiada, basta na implementação, restringir os deslocamentos na direção axial do elemento em um dos apoios e livre no outro apoio e os deslocamentos transversais são todos restringidos nos apoios e as rotações consideradas livres. Para a viga engastada, tanto os deslocamentos transversais, axiais como rotações são restringidos nos apoios. Por outro lado, para a viga semi-rígida, as

restrições são feitas tanto para os deslocamentos axiais como transversais; nas rotações, são adotados valores da rigidez da ligação em função das mesmas nos apoios.

Figura 29 – Graus de liberdade do elemento finito usado neste trabalho: a) viga simplesmente apoiada e engastada; b) viga semi-rígida



a) Viga simplesmente apoiada e engastada.



b) Viga semi-rígida.

Fonte: Autor.

A solução exata do problema da figura 27 para os deslocamentos transversais dada pela equação diferencial de Newmark e as soluções numéricas aproximadas para diferentes condições de contorno usando os elementos implementados neste trabalho são apresentadas na figura 30, com as variações da rigidez de serviço (S_I) da ligação mista. As configurações das deformadas da viga mista são mostradas a continuação para as três diferentes condições de contorno.

A tabela 1 a seguir mostra os valores numéricos obtidos para o deslocamento vertical no meio do vão da viga mista analisada, segundo a equação diferencial de Newmark e o método numérico utilizado neste trabalho para as três condições de apoios.

Figura 30 – Deformada da viga mista

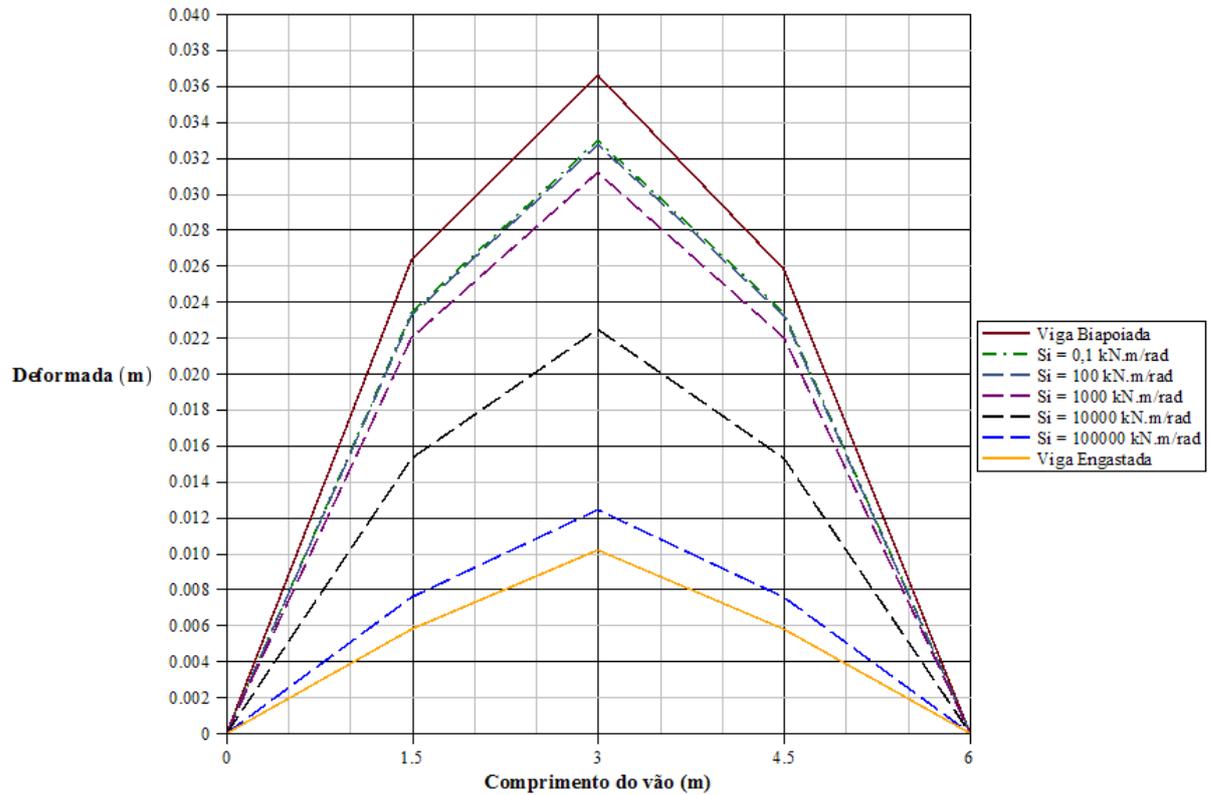


Tabela 1- Deslocamento vertical no meio do vão (cm)

Solução exata	Solução Numérica						
	Viga biapoiada	Viga semi-rígida					Viga engastada
Si=0,1 kN.m/rad		Si=100 kN.m/rad	Si=10e2 kN.m/rad	Si=10e3 kN.m/rad	Si=10e4 kN.m/rad		
3,954	3,661	3,295	3,284	3,127	2,251	1,245	1,019

Fonte: Autor.

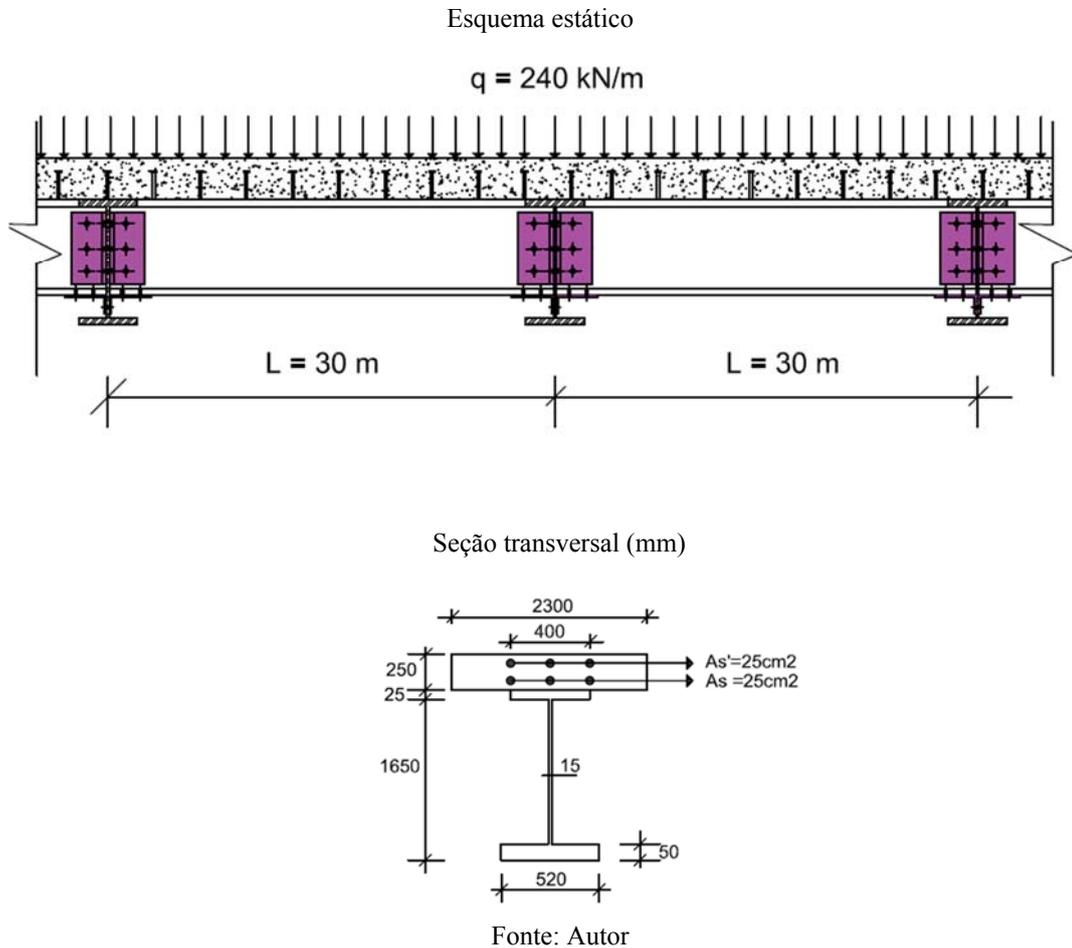
Da análise da figura 30 e da tabela 1, pode se perceber como esperado que a viga mista sob diferentes condições de apoios cumpre com a lógica deformada correspondente. A convergência entre a solução analítica da equação diferencial de Newmark (viga considerada biapoiada) e a solução numérica do elemento implementado é bastante próxima com um erro de 7,41% e isso discretizado em só quatro elementos. Para diferentes valores da rigidez inicial na ligação mista que foi analisado na implementação, correspondeu a uma deformada dentro do intervalo daquelas para quando a viga está simplesmente apoiada e engastada. Percebe-se que para grandes valores de rigidez na ligação mista, pequenas deformadas são obtidas e do mesmo jeito, para menores valores de rigidez, maiores deformadas no longo do vão da viga. Isso acontece devido ao fato de que quando a rigidez inicial acrescenta valor, começa a se comportar como uma viga rígida (engastada) e por tanto diminui a deformada ao longo do vão aproximando se ao valor da deformada para a viga engastada como se pode observar na figura 30. O efeito contrário acontece quando a rigidez perde resistência, onde a viga se comporta como simplesmente apoiada e a deformada aumenta se aproximando à da viga biapoiada em se.

5.2 SEGUNDO EXEMPLO: Análise não linear de viga mista semicontínua com dois vãos uniformemente carregada

É apresentado neste item a solução numérica do problema de viga mista semicontínua com interação parcial apresentado na figura 31. O esquema estático desta viga foi analisado por duas razões: primeiro, porque este esquema é usado com frequência na engenharia estrutural e nas construções de pontes e segundo, porque é uma análise complexa para elementos de viga mista, devido ao alto grau do deslizamento entre camadas, dos parâmetros dos componentes da ligação mista nos suportes da viga e das localizações das deformadas entre outros. Este problema foi resolvido por Dall'Asta e Zona (2004a), considerando a viga como simplesmente apoiada nos suportes.

As seguintes leis constitutivas dos materiais, tanto nas análises feitas neste trabalho como no do Dall'Asta e Zona, apresentadas na figura 32 são definidas tal que: As leis constitutivas elastoplástica são assumidas para o material de aço e as barras de reforços da laje de concreto; A não linearidade da conexão na interface é considerada no regime de tração para o material de aço; para o material de concreto, considere-se um regime de compressão.

Figura 31 - Viga mista semicontínua com interação parcial e sua correspondente seção transversal

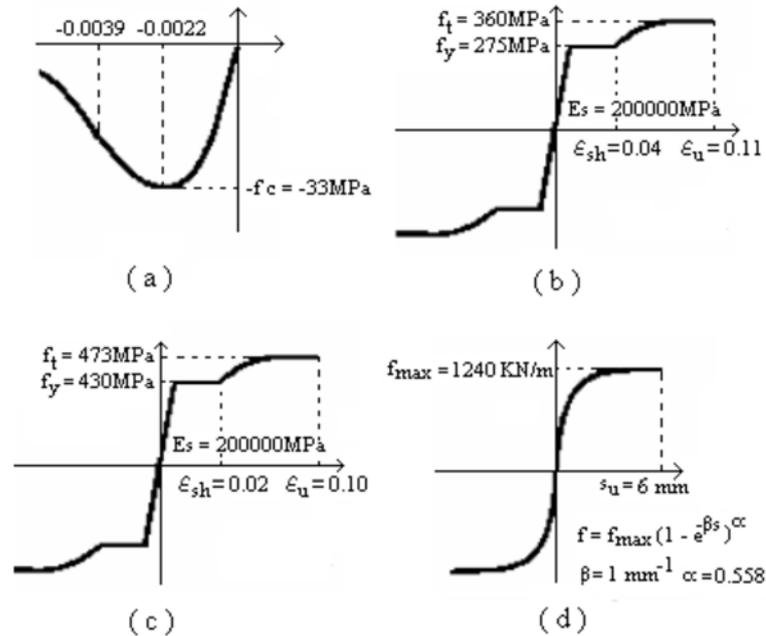


O cálculo das matrizes de rigidezes dos elementos e dos vetores da força interna é realizado através da integração numérica e usando a quadratura de Gauss-Lobatto com quatro pontos de integração ao longo do comprimento do elemento.

As análises não lineares foram realizadas através do controle de deslocamento incremental (grau de liberdade controlado no meio do vão da viga), cuja previsão é corrigida pelo processo iterativo de Newton-Raphson. Já que é simétrica e simetricamente carregada, só é analisada até a metade da viga ($L=30.00\text{m}$). As análises são interrompidas quando a tensão máxima dos materiais for atingida.

A discretização do elemento de viga mista foi feita utilizando-se 16 elementos finitos (8 até o meio do vão) e através da análise do método de controle de deslocamento foi aplicada um incremento de deslocamento de 0,05 m em cada passo para a determinação do fator de carga correspondente.

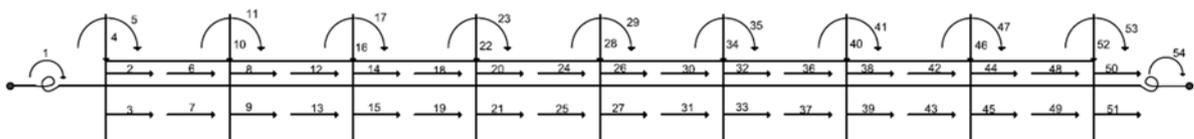
Figura 32 – Leis constitutivas: a) concreto; b) aço; c) barra de reforço; d) conexão da interface



Fonte: Dall'Asta e Zona (2004).

A figura 33 ilustra os deslocamentos nodais para o problema de viga mista semicontínua analisado neste exemplo, sendo o grau de liberdade 28 a ser controlado. Para levar a cabo a análise do problema, considerou-se, no início, a viga mista como simplesmente apoiada quando tendendo o limite da rigidez da ligação mista para zero nos apoios. Em seguida analisa-se a viga considerando os apoios como um engaste perfeito, tendendo assim o limite da rigidez da ligação mista para infinito. Por último, realiza-se a análise da viga adotando valores intermediários ($k=1e05\text{ kN.m/rad}$, $k=1e09\text{ kN.m/rad}$, $k=1e15\text{ kN.m/rad}$) da rigidez da ligação, assim sendo caracterizada a viga como uma viga semicontínua.

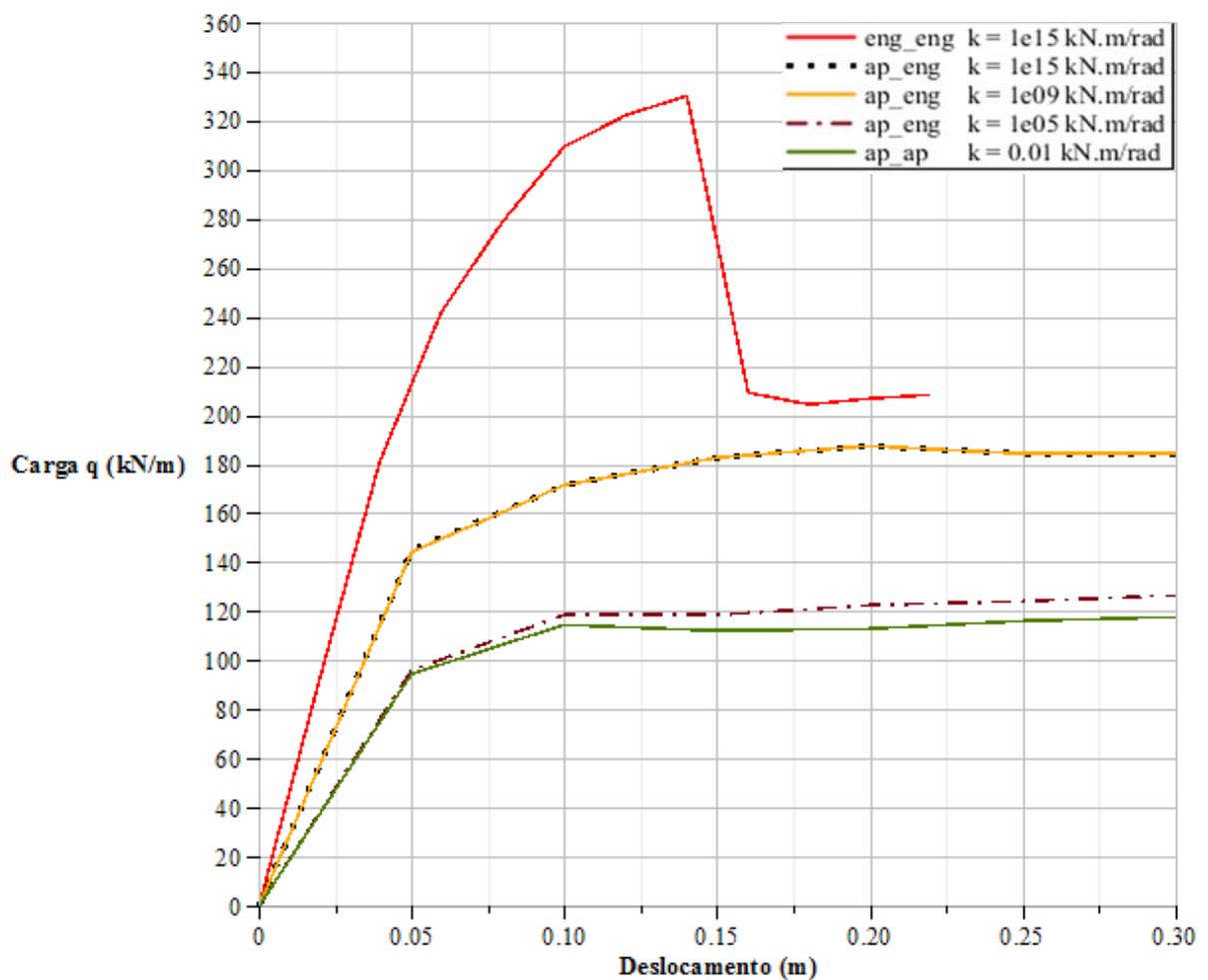
Figura 33 – Graus de liberdade correspondente aos deslocamentos nodais do elemento de viga



Fonte: Autor

O comportamento global para diferentes condições de apoios da viga analisada é apresentado na figura 34, onde as curvas carga uniformemente distribuída versus deslocamento no meio do vão são reportadas. As cargas últimas e deslocamentos calculados em cada caso para o mesmo grau de liberdade, 28 neste caso são apresentados na tabela 2.

Figura 34 – Curvas Cargas-Deslocamentos com diferentes condições de apoios



Fonte: Autor

Da interpretação dos resultados para os elementos implementados neste trabalho para diferentes condições de apoios e cujo gráfico das curvas cargas-deslocamentos ilustrado na figura 34, percebe-se que quando considerada a viga mista simplesmente apoiada, o seja

outorgando valores que tendem a zero para rigidez da ligação mista nos apoios, gera uma carga máxima $q = 117.432 \text{ kN/m}$ com um deslocamento máximo de $v = 0.30 \text{ m}$ no meio do vão da viga analisada.

Tabela 2 – Cargas últimas e correspondentes deslocamentos

Viga	Rigidez na ligação (kN.m/rad)		Carga última (kN/m)	Deslocamento máximo (m)
	Esquerda	Direita		
Ap*_Ap*	0.01	0.01	117.432	0.30
Semicontínua	0.01	1e05	126.814	0.30
	0.01	1e09	187.160	0.30
	0.01	1e15	187.161	0.30
Eng*_Eng*	1e15	1e15	330.089	0.22

Fonte: Autor

*Ap → Apoiada.

*Eng → Engastada.

Em bora, a medida que vai se aumentando a rigidez da ligação em uns dos apoios (rigidez intermediária), a carga última vai se incrementando respetivamente e assim se caracterizando a viga mista como semicontínua. Por último, quando a rigidez na ligação mista nas extremidades da viga tende para infinito, apresenta um valor elevada da carga última de 330.089 kN.m/rad comparada com as cargas últimas das vigas analisadas acima; aproximando se então como um engaste perfeito (tabela 2).

6 CONCLUSÕES

O objetivo principal desta dissertação foi o desenvolvimento de modelos numéricos, baseados no Método dos Elementos Finitos, para simulação do comportamento de vigas mistas semi-rígida com interação parcial entre seus componentes, com ênfase nas vigas mistas de aço e concreto.

Uma revisão bibliográfica foi feita sobre métodos analíticos e numéricos de resolução do problema de vigas mistas. Apresentou-se a solução analítica para a Equação de Newmark (1951) para problemas lineares. Verificou-se que esta solução analítica só é aplicável na prática para casos simples como materiais com propriedades lineares e condições de contorno também simples. Comprovou-se que análises numéricas do elemento estrutural de viga mista semi-rígida com conexão parcial, através de elementos unidimensionais, ainda é pouco explorada no país. Internacionalmente, encontram-se vários artigos técnicos sobre o assunto, nos quais a maioria dos autores enfatiza a solução numérica como um vantajoso método para solução do problema de vigas mistas com interação parcial. No entanto, observou-se que existem poucos trabalhos abordando a consideração de problemas de ligações semi-rígidas.

Para tal, uma formulação baseada em deslocamentos, bem como uma formulação usando molas rotacionais para simular as conexões semi-rígidas no processo de análises numéricas de vigas mistas de Euler Bernoulli sob condições de não linearidade física e geométrica dos materiais, foram desenvolvidas e implementadas. As seções transversais dos elementos constituintes foram representadas de forma genérica e os esforços resistentes, bem como as rigidezes generalizadas destas seções, puderam ser avaliados de forma exata.

Os procedimentos e formulações desenvolvidos neste trabalho foram capazes de modelar os problemas de viga mista semicontínuas com interação parcial, admitindo comportamento não linear dos materiais que compõem os componentes dos elementos mistos, bem como das relações carga-deslizamento da conexão na interface de deslizamento e momento-rotação na ligação mista.

Admitiu-se a hipótese de Euler-Bernoulli sobre a deformação de seções planas e, a partir desta hipótese, foram desenvolvidas equações que consideravam os efeitos de segunda ordem. Estas equações foram utilizadas, juntamente com o Princípio dos Trabalhos Virtuais e a definição dos esforços resistentes, para desenvolver a matriz de rigidez tangente de um elemento com dez graus de liberdade. Adicionalmente foram implementados elementos de mola para simular a conexão semi-rígida nos apoios alterando, portanto, a matriz de rigidez

original do programa para que se possa introduzir a rigidez de serviço da ligação adequada à análise desejada. Neste desenvolvimento admitiu-se interação total e parcial nas direções vertical e horizontal, respectivamente.

Exemplos retirados de alguns dos trabalhos citados na revisão bibliográfica foram comparados com o modelo proposto para verificar a eficácia do mesmo. Uma vez desenvolvido, o modelo proposto apresentou resultados coerentes quando comparado com resultados numéricos de outros autores. A solução exata do problema de viga mista com interação parcial obtida através do método analítico da equação diferencial de Newmark apresentado em trabalhos anteriores, permitiu a avaliação dos elementos implementados neste trabalho através de uma comparação entre as relações cargas-deslocamentos do problema considerando três distintas condições nos apoios sendo, biapoiadas, engastadas e finalmente semi-rígidas, figuras 27. Os resultados foram considerados satisfatórios.

No caso do segundo exemplos apresentado no capítulo 5 deste trabalho, as respostas das análises numéricas, representadas pelas curvas carga-deslocamento da figura 34, apresentaram resultados coerentes das cargas últimas para diferentes condição de contorno e assim validando a precisão e eficácia do modelo implementado neste trabalho.

Mesmo que uma discussão mais aprofundada acerca de outros tipos de análises como a da análise avançada de vigas mistas semi-rígidas em situações de incêndio não tenha sido objeto do escopo desta dissertação, pode-se concluir que esta concepção estrutural se mostrou bem eficiente, econômica e, com as ferramentas elaboradas, de fácil implementação. Com essas inovações no quadro do progresso da tecnologia, impõe-se aos engenheiros, que muitas vezes se mostram mais receptivos a progressos na tecnologia de materiais do que na de projetos, uma necessidade de maior assimilação na hora de projetar uma obra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NBR 8800 - **Projeto de Estruturas de aço e de Estruturas mistas de aço e concreto de Edifícios** (2008), ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, Brasil.

BODE, H., KRONENBERGER, H. J., MICHAELI, W. Composite Joints –Further Experimental Results. Conference Report, **International Conference Composite Construction**, Conventional and Innovative, Innsbruck, Áustria, pp. 433- 438, 1997.

BYFIELD, M. P.; DHANALAKSHMI, M.; GOYDER, H. G. D. Modelling of unpropped semi-continuous composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 60, n. 9, p. 1353–1367, 2004.

CECCOTTI, A; FRAGIACOMO, M.; GIORDANO, S. Long-term and collapse tests on a timber-concrete composite beam with glued-in connection. **Materials and Structures**, v. 40, n. 1, p. 15–25, 2007.

Cláudio, E. M. O. **Análise Não-Linear Geométrica de Vigas-Colunas com Interação Parcial, Dissertação de Mestrado**. Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil, 2009.

COUCHMAN, G. H.; WAY, A. Ductility Requirements for Composite Connections. The Steel Construction Institute. **Journal of Constructional Steel Research**, May, 1999.

DA SILVA, A. R.; SOUSA, J. B. M. A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, n. 5, p. 305–314, 2009.

DA SILVA, A. R. **Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial**. [s.l.] (Dissertação de Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, 2006.

DALL’ASTA, A.; ZONA, A. Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach. **Computers & Structures**, v. 80, n. 27-30, p. 2217–2228, 2002.

DALL’ASTA, A.; ZONA, A. Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams. **Computers and Structures**, v. 82, n. 23-26, p. 2117–2130, 2004a.

DALL'ASTA, A.; ZONA, A. Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, n. 4, p. 425–448, 2004b.

EASTERLING, W. S., REX, C. O. Behavior and Modeling of Partially Restrained Composite Beam-Girder Connections. **Report N°. CE/VPI-ST 96/17. Blacksburg**, Virginia, USA: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996a.

EASTERLING, W. S., REX, C. O. Behavior and Modeling of Single Bolt Lap Plate Connections. **Report No. CE/VPI-ST 96/15. Blacksburg**, Virginia, USA: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996b.

EUROCODE 3. Design of Steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, Bruxelles: **European Committee for Standardisation**, DD ENV 1993-1-1:1993.

EUROCODE 4. Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings., Bruxelles: **European Committee for Standardisation**, DD ENV 1994-1-1:1992

ECCS - TECHNICAL COMMITTEE 11 –Design of Composite Joints for Buildings, Bruxelles: European Committee for Standardization, **Composite Structures**, N°. 109. 1a Edição 1999.

FAELLA, C.; MARTINELLI, E.; NIGRO, E. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: “Exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. **Computers and Structures**, v. 80, n. 11, p. 1001–1009, 2002.

FERRIER, E.; LABOSSIRE, P.; NEALE, K. W. Mechanical behavior of an innovative hybrid beam made of glulam and ultrahigh-performance concrete reinforced with FRP or Steel. **Journal of Composites for Construction**, v. 14, n. Compendex, p. 217–223, 2010.

FERRIER, E.; LABOSSIERE, P.; NEALE, K. W. Modelling the bending behaviour of a new hybrid glulam beam reinforced with FRP and ultra-high-performance concrete. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, n. 8, p. 3883–3902, 2012.

GIRHAMMAR, U. A.; PAN, D. H.; GUSTAFSSON, A. Exact dynamic analysis of composite beams with partial interaction. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 51, n. 8, p. 565–582, 2009.

HANSWILLE, G. Cracking of Concrete Mechanical Models of the Design Rules in Eurocode 4. Proceedings of an Engineering Foundation Conference, **Composite Construction in Steel and Concrete III**, ASCE, pp. 420-433, 1997.

JOHNSON, R.P. **Composite Structures of Steel and Concrete**, Blackwell Scientific Publications, Oxford, *Volume 1*. 2ª Edição 1994.

LEON, R. T., HOFFMAN, J. J., TEAGER, T. Partially Restrained Composite Connections: **American Institute of Steel Construction**. *AISC Design Guide N°8*. Chicago, USA, 1996.

LEON, R. T. Uso de Estruturas Metálicas na Construção Civil, **Design of PR Composite Connections**. IV Seminário Internacional, I CICOM, O, São Paulo, SP, Brasil, 2001.

LI, T.Q., CHOO, B.S., NETHERCOT, D.A. Moment Curvature Relations for Steel and Composite Beams. **Steel Structures, Journal of Singapore Structural Steel Society**, Vol. 4, N° 1 Dezembro , pp.35-51, 1993.

LI, T. Q., AHMED B. e LAWSON R. M. Required Rotation of Composite Connections, 1996.

LI, T. Q.; CHOO, B. S.; NETHERCOT, D. A. Determination of rotation capacity requirements for steel and composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 32, n. 3, p. 303–332, jan. 1995.

OLIVEIRA, T. J. L. - Análise de Pisos Mistos com Ligações Semi-Rígidas. **Dissertação de Mestrado**, COPPE / Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.

PIRES, V. H. S. Automação do cálculo de vigas mistas semi-contínuas incluindo ligações mistas. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2003.

QUEIROZ, G., MATA, L. A. C., ALVES, V. C. G. Parâmetros que Influenciam Resistência, Rigidez e Capacidade de Rotação de Ligações Mistas. **III Seminário Internacional**, O Uso de Estruturas Metálicas na Construção Civil, Belo Horizonte, MG, Brasil. 2000.

QUEIROZ, G., MATA, L. A. C., VIOLANTE, J. S. S. Desempenho de um Piso com Ligações Mistas e Comparação com Resultados Teóricos. **IV Seminário Internacional**, I CICOM, O Uso de Estruturas Metálicas na Construção Civil, São Paulo, SP, Brasil. 2001.

QUEIROZ, G., LANNA, J. C. e MACHADO, J. C. Rotação Necessária para Ligações Mistas Considerando-se a Flexibilidade dos Conectores a Cisalhamento. **IV Seminário Internacional**, I CICOM, O Uso de Estruturas Metálicas na Construção Civil, São Paulo, SP, Brasil. 2001a.

QUEIROZ, G., PIMENTA, R. J., MATA, L. A. C. Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto. 1ª Edição, Editora O Lutador, Belo Horizonte, MG, Brasil. 2001b.

RICHARD R. M., HSIA, W. K., CHMIELOWIEC M. Derived Moment-Rotation Curves of Double Framing Angles. **Computers and Structures**, 30 (3), pp. 485- 494, 1988.

RICHARD, R. M. Force Distributions in Partially Restrained Connections **Developments in Computational Techniques for Civil Engineering**, pp. 121-128, 1995.

SCI-213. The Steel Construction Institute. Joints in Steel Construction, Composite Connections. **The Steel Construction Institute**, SCI & BSCA, Ascot. 1998.

QUEIROZ, P. G. et al. Ligação mista viga-pilar resistente a momento, **Dissertação de mestrado**, 2011.

RANZI, G. et al. A geometric nonlinear model for composite beams with partial interaction. **Engineering Structures**, v. 32, n. 5, p. 1384–1396, 2010.

SOUSA, J. B. M. Exact finite elements for multilayered composite beam-columns with partial interaction. **Computers and Structures**, v. 123, p. 48–57, 2013.

SOUSA, J. B. M.; DA SILVA, A. R. Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. **Engineering Structures**, v. 32, n. 6, p. 1671–1680, 2010.

SOUSA, J. B. M.; OLIVEIRA, C. E. M.; DA SILVA, A. R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n. 6, p. 772–779, 2010.

TITOUM, M. et al. Analysis of semi-continuous composite beams with partial shear connection using 2D finite element approach. **Journal of Applied Sciences**, 2008.

VEGA, G.; XIAO, R. Advanced study of non-linear semi-continuous beam-column endplate connection and metal-decking floor modelling. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 95, p. 191–197, 2014.

XU, R.; WU, Y. F. Two-dimensional analytical solutions of simply supported composite beams with interlayer slips. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 1, p. 165–175, 2007.

YANG, B.; TAN, K. H.; XIONG, G. Behaviour of composite beam–column joints under a middle-column-removal scenario: Component-based modelling. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 104, p. 137–154, 2015.