



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**PEDRO SANDERSON BASTOS BARROS**

**ABORDAGEM ISOGOMÉTRICA PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE DE  
COMPÓSITOS LAMINADOS CONSIDERANDO FALHA PROGRESSIVA**

**FORTALEZA**

**2016**

PEDRO SANDERSON BASTOS BARROS

**ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE DE  
COMPÓSITOS LAMINADOS CONSIDERANDO FALHA PROGRESSIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. D. Sc. Evandro Parente Junior.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

B281a Barros, Pedro Sanderson Bastos.  
Abordagem isogeométrica para o estudo da estabilidade de compósitos laminados considerando falha progressiva / Pedro Sanderson Bastos Barros. – 2016.  
137 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

1. Flambagem. 2. Comportamento Pós-Crítico. 3. Falha Progressiva. 4. Modelo de Degradação Instantânea. 5. Análise Isogeométrica. I. Título.

CDD 624.1

---

PEDRO SANDERSON BASTOS BARROS

**ABORDAGEM ISOGEOMÉTRICA PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE DE  
COMPÓSITOS LAMINADOS CONSIDERANDO FALHA PROGRESSIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. D. Sc. Evandro Parente Junior.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. D.Sc. Evandro Parente Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. Áurea Silva de Holanda (Membro Interno)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. D. Sc. Maurício Vicente Donadon (Membro Externo)  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

*Uma estrela se apagou. Muitos podem dizer  
que o céu continua da mesma forma, mas a  
única certeza que tenho é que hoje ele não  
está mais tão iluminado.*

*À tia Rozileide (in memoriam).*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me guiar, pela força, sabedoria e paciência concedidas a mim para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, por todos os seus ensinamentos, pela calma, suporte e compreensão durante todos estes anos.

À minha tia e mãe de coração, Rozileide Maria Barros Cabral (*in memoriam*), pelos seus cuidados, por sempre me apoiar e nunca me deixar desanimar, mesmo nos momentos mais difíceis de sua vida.

Ao professor Evandro Parente Junior, que é um grande exemplo de profissional, pela sua amizade, orientação, incentivo e conhecimentos repassados ao longo dos anos. Espero um dia poder ser um “Evandro” para aqueles que iniciam sua jornada na engenharia.

Aos professores Antônio Macário Cartaxo de Melo, Tereza Denyse de Araújo e João Batista Marques Souza Junior pelas diversas vezes que me ajudaram durante esta etapa de minha vida.

A todas as amizades feitas no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização ao longo destes anos, por toda a ajuda, pelas brincadeiras e momentos de descontração. De modo especial, agradeço aos meus amigos: Elias Barroso, Pedro Luiz Rocha, Leandro Soares, Edson Dantas, David Rodrigues, Eric Mateus e Daniel Brito.

À Josi e ao Jefferson por proporcionar a mim e a tantos outros um ambiente de trabalho adequado, pela amizade desenvolvida e momentos de descontração.

À minha namorada, Gabriella Uchôa, pelo amor, compreensão, incentivo e companheirismo.

Aos meus amigos: Marcelo Lira, Juliana Cavalcante, Monyque Medeiros, Samara Zaida e Paulo Régis por todo apoio e companheirismo.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta neste trabalho.

A CAPES pelo suporte financeiro.

## RESUMO

A flambagem tem grande importância no projeto de placas e cascas laminadas, já que geralmente estas estruturas são bastante esbeltas. A avaliação do comportamento pós-crítico tem grande importância, pois permite classificar a forma de perda da estabilidade estrutural, obter a capacidade de carga e quantificar a sensibilidade às imperfeições iniciais. A maior parte dos estudos de estabilidade de estruturas laminadas desprezam a falha do material, considerando que toda a perda de estabilidade ocorre no regime elástico. Contudo, mesmo no caso de estruturas esbeltas, a degradação do material pode ocorrer de forma simultânea a problemas de estabilidade e grandes deslocamentos, com a interação entre estes efeitos resultando em uma redução da capacidade de carga da estrutura. A Análise Isogeométrica (AIG) pode ser entendida com uma extensão do Método dos Elementos Finitos (MEF) onde a interpolação da geometria e dos deslocamentos do domínio é realizada por meio das funções utilizadas em programas CAD (*Computer Aided Design*). Com esta abordagem é possível representar exatamente geometrias complexas, independente da discretização adotada, eliminando um dos erros intrínsecos ao MEF. Neste trabalho propõe-se estudar problemas de estabilidade de placas e cascas abatidas considerando a degradação do material utilizando uma abordagem baseada na Análise Isogeométrica. Para isto, aplica-se a Teoria de Marguerre para análise de cascas abatidas com rotações moderadas. Na representação da falha do material, modelos de degradação instantânea são utilizados. São apresentados exemplos de aplicação com foco na determinação da carga crítica de placas laminadas e na obtenção do seu caminho pós-crítico considerando, inicialmente, somente a não linearidade geométrica e, posteriormente, incluindo a falha do material. Em seguida, é apresentado um estudo de estabilidade de cascas abatidas. Verificou-se que efeitos de travamento são reduzidos de forma bastante significativa quando se utiliza polinômios de ordem superiores na AIG. Ainda, observa-se que a utilização de restrições de falha da primeira lâmina em problemas de otimização pode levar a projetos conservadores para este tipo de componentes, uma vez que o início da falha pode ocorrer a níveis consideravelmente inferiores à carga crítica ou da carga limite da estrutura.

**Palavras-chave:** Flambagem, Comportamento Pós-Crítico, Falha Progressiva, Modelo de Degradação Instantânea, Análise Isogeométrica.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de compósitos fibrosos. ....	18
Figura 2 – Compósito laminado. ....	19
Figura 3 – Esquema típico de laminação. ....	20
Figura 4 – Variação das deformações e tensões ao longo de um laminado, usando uma teoria do tipo Lâmina Equivalente. ....	24
Figura 5 - Configuração indeformada e deformada de um trecho de uma placa sob as hipóteses de Reissner-Mindlin. ....	25
Figura 6 - Placa laminada e esforços internos em um elemento infinitesimal. ....	28
Figura 7 – Placa sujeita a esforços no plano. ....	28
Figura 8 – Elemento infinitesimal deformado. ....	29
Figura 9 – Resistências de uma lâmina no sistema de eixos local. ....	33
Figura 10 – Envoltórias de falha. ....	35
Figura 11 – Exemplo de bases B-Splines quadráticas. ....	40
Figura 12 – Exemplo de bases B-Splines quadráticas com multiplicidade 2 no knot $\xi_i = 0.5$ . ....	41
Figura 13 – Formas de refinamento do modelo geométrico na Análise Isogeométrica. ....	42
Figura 14 – Formas de refinamento do modelo geométrico na Análise Isogeométrica. ....	44
Figura 15 – Malha de controle e malha física de uma superfície. ....	45
Figura 16 – Trecho de uma placa com furo. ....	46
Figura 17 – Fenômeno <i>snap-through</i> no caminho de equilíbrio de uma estrutura. ....	56
Figura 18 – Tipos de degradação utilizados em laminados. ....	58
Figura 19 – Processo de falha progressiva. ....	64
Figura 20 – Malha, condições de contorno e carregamento utilizados no FAST e no ABAQUS. ....	66
Figura 21 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento axial obtida pelo ABAQUS. ....	67
Figura 22 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento axial obtidos pelos modelos de degradação instantânea. ....	67
Figura 23 – Identificação dos pontos onde se inicia o processo de falha na placa tracionada. ....	68
Figura 24 – Diagrama de cores obtido no ABAQUS referente ao deslocamento axial na placa. ....	69
Figura 25 – Evolução do dano na matriz da lâmina 2 ( $\theta = 45^\circ$ ). ....	69
Figura 26 – Malha, condições de contorno e carregamento utilizados no ABAQUS. ....	71

Figura 27 – Modo de flambagem obtido no ABAQUS. ....	71
Figura 28 – Curva de convergência da carga crítica da placa analisada. ....	72
Figura 29 – Curva carga-deslocamento axial obtidos no ABAQUS. ....	74
Figura 30 – Curva carga-deslocamento axial para diversos critérios de falha. ....	74
Figura 31 – Identificação dos pontos de início do processo de falha progressiva na placa retangular. ....	75
Figura 32 – Deformada da placa sujeita à compressão axial. ....	76
Figura 33 – Região danificada no instante da perda de estabilidade da placa. ....	76
Figura 34 – Efeito das imperfeições iniciais na curva carga-deslocamento da placa aplicando o modelo de degradação baseado no Critério da Máxima Tensão. ....	77
Figura 35 – Efeito das imperfeições iniciais na curva carga-deslocamento da placa aplicando o modelo de degradação de Kuirashi <i>et al.</i> (2002). ....	78
Figura 36 – Discretização, condições de contorno e carregamento utilizados. ....	79
Figura 37 – Modo de flambagem da placa com furo sujeita à compressão axial. ....	79
Figura 38 – Curva carga-encurtamento obtidos pelo ABAQUS. ....	80
Figura 39 – Curva carga-encurtamento obtidos pelos modelos de degradação instantânea. ..	80
Figura 40 – Identificação dos pontos de início do processo de falha progressiva na placa retangular. ....	81
Figura 41 – Configuração deformada obtida pelo ABAQUS. ....	82
Figura 42 – Região danificada no instante da perda de estabilidade da placa para vários modos de falha. ....	83
Figura 43 – Malha adotada e primeiro modo de flambagem da estrutura analisada. ....	85
Figura 44 – Pontos de integração em uma placa quadrada com diversas ordens de interpolação e integração completa. ....	86
Figura 45 – Pontos de Gauss em uma placa quadrada com diversas ordens de interpolação e integração reduzida. ....	87
Figura 46 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação $a/h = 30$ . ....	89
Figura 47 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação $a/h = 50$ . ....	90
Figura 48 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação $a/h = 100$ . ....	91
Figura 49 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação $a/h = 500$ . ....	92
Figura 50 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação $a/h = 1000$ . ....	93
Figura 51 – Curvas das relações entre a carga crítica de uma placa <i>cross-ply</i> antissimétrica com $n$ lâminas e a solução ortotrópica ideal para várias razões $a/h$ . ....	98

Figura 52 – Estudo paramétrico da influência do ângulo $\theta$ de um laminado <i>angle-ply</i> simétrico em relação à sua carga crítica para $a/h = 30$ . .....	99
Figura 53 – Estudo paramétrico da influência do ângulo $\theta$ de um laminado <i>angle-ply</i> simétrico em relação à sua carga crítica para $a/h = 50$ . .....	100
Figura 54 – Curvas das relações entre a carga crítica de uma placa <i>angle-ply</i> simétrica com $n$ lâminas e a solução ortotrópica ideal para várias razões $a/h$ . .....	100
Figura 55 – Estudo paramétrico da influência do ângulo $\theta$ de um laminado <i>angle-ply</i> antissimétrico em relação à sua carga crítica para $a/h = 30$ . .....	101
Figura 56 – Estudo paramétrico da influência do ângulo $\theta$ de um laminado <i>angle-ply</i> antissimétrico em relação à sua carga crítica para $a/h = 50$ . .....	102
Figura 57 – Curvas das relações entre a carga crítica de uma placa <i>angle-ply</i> antissimétrica com $n$ lâminas e a solução ortotrópica ideal para várias razões $a/h$ . .....	102
Figura 58 - Placa simplesmente apoiada sujeita a carregamento biaxial. ....	103
Figura 59 – Aplicação da curvatura inicial na placa. ....	104
Figura 60 - Placa isotrópica ( $a/h = 50$ ) simplesmente apoiada sujeita a carregamento uniaxial ( $\Delta = 10^{-4}$ ). ....	105
Figura 61 - Placa ( $a/h = 10$ ) simplesmente apoiada sujeita a carregamento biaxial. ....	106
Figura 62 – Verificação da influência da consideração da não linearidade física em placas imperfeitas. ....	108
Figura 63 – Modelo isogeométrico de uma placa quadrada com furo central com relação $d/a = 1/5$ dividida em 8 <i>patches</i> . ....	111
Figura 64 – Convergência do valor da carga crítica em função do grau do polinômio e do número de divisões em cada <i>patch</i> da placa analisada. ....	112
Figura 65 – Pontos de controle de uma placa laminada com furo central para a relação $d/a = 1/5$ . ....	113
Figura 66 – Curvas não lineares obtidas para as placas <i>cross-ply</i> em função do diâmetro do furo. ....	115
Figura 67 – Curvas não lineares obtidas para as placas <i>angle-ply</i> em função do diâmetro do furo. ....	117
Figura 68 – Casca abatida sujeita a carga concentrada. ....	119
Figura 69 – Caminho de equilíbrio da casca abatida com laminação [0/90/0] de Sze <i>et al.</i> (2004). ....	120

Figura 70 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga $P$ com laminação $[90/0]_{n/2}$ . .....	121
Figura 71 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga $P$ com laminação $[0/90]_{n/2}$ . .....	121
Figura 72 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga $P$ com laminação $[(45/-45)_{n/4}]_s$ . .....	122
Figura 73 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga $q$ para a laminação $[(0/90)_{n/4}]_s$ . .....	124
Figura 74 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga $q$ para a laminação $[(45/-45)_{n/4}]_s$ . .....	124
Figura 75 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga $q$ para a laminação $[(\theta/-\theta)_2]_s$ . .....	125

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades mecânicas da fibra de carbono-epóxi T300/1034-C. ....	65
Tabela 2 – Energias de fratura associadas fibra de carbono-epóxi T300/1034-C (J/m <sup>2</sup> ). ....	65
Tabela 3 – Comparação entre as cargas de ruptura da placa para diferentes critérios. ....	66
Tabela 4 - Propriedades mecânicas do compósito de carbono-epóxi T300/5208. ....	70
Tabela 5 – Estudo de convergência da carga crítica da placa analisada. ....	72
Tabela 6 – Comparação entre as cargas de ruptura da placa para diferentes critérios. ....	73
Tabela 7 – Valores das cargas críticas obtidas no ABAQUS para as relações lado/espessura consideradas. ....	88
Tabela 8 – Estudo de convergência para as placas com relação $a/h = 30$ . ....	89
Tabela 9 – Estudo de convergência para as placas com relação $a/h = 50$ . ....	90
Tabela 10 – Estudo de convergência para as placas com relação $a/h = 100$ . ....	91
Tabela 11 – Estudo de convergência para as placas com relação $a/h = 500$ . ....	92
Tabela 12 – Estudo de convergência para as placas com relação $a/h = 1000$ . ....	93
Tabela 13 – Número de pontos de integração ( <i>NPI</i> ) usados em cada modelo. ....	94
Tabela 14 – Valores das cargas críticas para laminados <i>cross-ply</i> simétricos. ....	96
Tabela 15 – Valores dos coeficientes da matriz <b>D</b> em laminados <i>cross-ply</i> simétricos. ....	96
Tabela 16 – Relação entre a carga crítica da placa com $n$ lâminas e a solução obtida pela TCL. ....	97
Tabela 17 - Dados do Exemplo 2 com unidades no sistema britânico de medidas. ....	104
Tabela 18 - Propriedades mecânicas da fibra de carbono A-S/Epóxi 1. ....	108
Tabela 19 – Valor da carga quando ocorre a falha da primeira lâmina e carga limite. ....	109
Tabela 20 – Estudo de convergência da malha e do polinômio de interpolação. ....	111
Tabela 21 – Estudo da influência do tamanho do furo na capacidade de carga de placas <i>cross-ply</i> simétricas com $n$ lâminas. ....	114
Tabela 22 – Estudo da influência do tamanho do furo na capacidade de carga de placas <i>angle-ply</i> simétricas com $n$ lâminas. ....	114
Tabela 23 – Carga referente à FPF e cargas limites (Valores em Newtons). ....	122

## ÍNDICE

1.	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
1.1.	<b>Objetivos e Contribuições</b> .....	16
1.2.	<b>Organização do Texto</b> .....	16
2.	<b>COMPÓSITOS LAMINADOS</b> .....	18
2.1.	<b>Relações Constitutivas</b> .....	20
2.2.	<b>Teoria de Reissner-Mindlin</b> .....	23
2.3.	<b>Estabilidade de Placas</b> .....	27
2.4.	<b>Critérios de Falha</b> .....	32
2.4.1.	<i>Máxima Tensão e Máxima Deformação</i> .....	33
2.4.2.	<i>Tsai-Wu</i> .....	35
2.4.3.	<i>Hashin</i> .....	36
3.	<b>B-SPLINES E NURBS</b> .....	38
3.1.	<b>B-Splines</b> .....	38
3.2.	<b>NURBS</b> .....	43
3.2.1.	<b>Múltiplos Patches</b> .....	46
4.	<b>ANÁLISE NÃO LINEAR</b> .....	47
4.1.	<b>Elemento de Casca Abatida</b> .....	47
4.1.1.	<i>Análise Isogeométrica</i> .....	49
4.1.2.	<i>Solução da Equação de Equilíbrio Não Linear</i> .....	54
4.2.	<b>Análise Não Linear Física</b> .....	56
4.2.1.	<i>Modelos de Degradação do Material</i> .....	60
4.2.2.	<i>Avaliação Numérica</i> .....	62
4.2.3.	<i>Validação dos Modelos de Degradação</i> .....	63
5.	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b> .....	84
5.1.	<b>Carga Crítica de uma Placa</b> .....	84
5.1.1.	<i>Laminados Cross-ply Simétricos</i> .....	95
5.1.2.	<i>Laminados Cross-ply Antisimétricos</i> .....	97
5.1.3.	<i>Laminados Angle-ply Simétricos</i> .....	98
5.1.4.	<i>Laminados Angle-ply Antisimétricos</i> .....	101
5.2.	<b>Análise Não Linear Geométrica de Placas Isotrópicas e Laminadas</b> .....	103

<b>5.3.</b>	<b>Estabilidade de Placas Laminadas Considerando a Falha Progressiva.....</b>	<b>107</b>
<b>5.4.</b>	<b>Estabilidade de Placas Laminadas com Furo Considerando a Falha do Material</b>	<b>110</b>
<b>5.5.</b>	<b>Análise Não Linear Física e Geométrica de Cascas Abatidas .....</b>	<b>119</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>126</b>
<b>6.1.</b>	<b>Sugestões para Trabalhos Futuros .....</b>	<b>128</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>129</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A elevada capacidade resistente e o baixo peso, aliados à versatilidade de fabricação, tem feito crescer a aplicação de materiais compósitos na engenharia. Deste modo, placas e cascas laminadas têm sido amplamente utilizadas na fabricação de componentes das indústrias aeronáutica, automobilística e naval.

A flambagem tem grande importância no projeto destas estruturas, já que geralmente elas são muito esbeltas, de modo que a sua falha possa ocorrer com as tensões inferiores à resistência do material. Desta forma, o projeto de muitos componentes estruturais é determinado a partir de restrições de estabilidade juntamente com resistência e rigidez (LIU *et al.*, 2000; BLOOMFIELD *et al.*, 2009).

A avaliação do comportamento pós-crítico tem notável importância, pois permite classificar a forma de perda de estabilidade, obter a capacidade de carga e quantificar a sensibilidade às imperfeições iniciais destas estruturas. Assim, existem diversos trabalhos disponíveis na literatura, onde se estuda a estabilidade de placas e cascas laminadas, incluindo a determinação do caminho pós-crítico (RASHEED & YOUSIF, 2005; HOULIARA & KARAMANOS, 2006; LE-MANH & LEE, 2014). Contudo, estes trabalhos geralmente desprezam a falha do material, considerando que toda a perda de estabilidade ocorre no regime elástico.

Na prática, mesmo no caso de estruturas esbeltas, os fenômenos não lineares físicos, devido à degradação ou falha do material, podem ocorrer de forma simultânea a problemas de estabilidade e grandes deslocamentos e a interação entre essas não linearidades pode resultar em uma redução da capacidade de carga da estrutura, em relação à resistência calculada considerando um comportamento puramente elástico.

Ainda, é importante notar que o início do processo de falha em estruturas laminadas não implica que ela atingiu necessariamente sua capacidade de carga, uma vez que as tensões resistidas pelo material que falhou podem ser redistribuídas para as lâminas adjacentes.

Sabe-se que o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método mais utilizado para a análise de estruturas, sejam elas feitas de material homogêneo e isotrópico ou compósitos laminados. Usualmente, no MEF é utilizada uma formulação isoparamétrica, de

modo que os polinômios que interpolam os deslocamentos sejam os mesmos usados para descrever a geometria da estrutura. Deste modo, em exceção às formas geométricas simples, modelos de elementos finitos contêm erros provenientes tanto do campo de deslocamentos, quanto da aproximação da geometria analisada. Ambos os erros são reduzidos, mas não eliminados, à medida que se refina o modelo, discretizando a malha utilizada (refinamento  $h$ ) ou aumentando o grau do polinômio que interpola os deslocamentos (refinamento  $p$ ).

A Análise Isogeométrica (AIG) pode ser entendida como uma extensão do Método dos Elementos Finitos que propõe utilizar na descrição da geometria e na interpolação dos deslocamentos as mesmas funções utilizadas em programas CAD (*Computer Aided Design*), como *B-splines* e NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*). O uso destas funções permite representar exatamente geometrias complexas, independente da discretização adotada para aproximar o campo de deslocamentos. Com isso, um dos erros intrínsecos do MEF é eliminado. A AIG permite a utilização de três tipos de refinamento: refinamento  $p$  (referente ao aumento do grau dos polinômios de interpolação dos deslocamentos no MEF), que é bastante limitado em elementos finitos por conta da sua complexidade de implementação; o refinamento  $h$ , que é equivalente ao aumento do número de elementos; e o refinamento  $k$  que corresponde à superposição dos anteriores com a vantagem de aumentar a continuidade entre os elementos. A Análise Isogeométrica foi inicialmente proposta por Hughes *et al.* (2005) e vem sendo explorada em vários trabalhos desde então (BAZILEVS *et al.*, 2006a, 2006b; COTTRELL *et al.*, 2006, 2007, 2009; KAPOOR & KAPANIA, 2012; BORDEN *et al.*, 2011; ESPATH *et al.*, 2014).

Vários trabalhos com a finalidade de aplicar a Análise Isogeométrica em problemas de flambagem vêm sendo publicados: Yu *et al.* (2016) fazem um estudo da carga crítica de placas FGPs com furos sob efeito da temperatura e os autores obtêm bons resultados em relação a métodos semi analíticos propostos na literatura. Thai *et al.* (2012; 2013) realizam análises estáticas, de vibração livre e flambagem em placas laminadas de diversas geometrias. Shojaee *et al.* (2012) e Yin *et al.* (2015) apresentam estudos de cálculo de cargas críticas e de frequências naturais para placas retangulares laminadas, variando os esquemas de laminação. Yin *et al.* (2015) também avaliam a eficiência da AIG para placas com vários tipos de furos. Existem também alguns trabalhos com foco na análise não linear geométrica de placas laminadas, como Le-Mahn & Lee (2014), Kapoor & Kapania (2012) e Yu *et al.* (2015).

Nestes trabalhos são utilizados elementos com deformações moderadas de von Kármán para representar a não linearidade geométrica.

Há vários trabalhos presentes na literatura que mostram o efeito da falha progressiva em estruturas laminadas aplicando o Método dos Elementos Finitos (LANZI, 2004; DEGENHARDT *et al.*, 2008; LOPEZ *et al.*, 2009). Entretanto, o mesmo não ocorre quando se trata da Análise Isogeométrica.

Neste trabalho propõe-se avaliar o comportamento não linear, físico e geométrico, de placas e cascas abatidas utilizando uma abordagem baseada na Análise Isogeométrica. Para isto, aplica-se a Teoria de von Kármán para o cálculo das deformações e a Teoria de Marguerre para a consideração das imperfeições iniciais. Para a representação da falha do material, optou-se pela utilização de modelos de degradação instantânea.

### **1.1. Objetivos e Contribuições**

Este trabalho tem como objetivo avaliar o efeito da falha progressiva no comportamento pós-crítico e na capacidade de carga de estruturas laminadas de material compósito e comparar com os resultados obtidos por análises puramente não lineares geométricas.

Deste modo, foi utilizada a formulação de um elemento finito isoparamétrico clássico de casca abatida implementado por Rocha (2013) no programa FAST (*Finite element AnalySis Tool*). Esta formulação foi estendida para a Análise Isogeométrica com base no trabalho de Barroso (2015).

As principais contribuições desenvolvidas foram as implementações de critérios de falha e modelos de degradação instantânea. A validação dos critérios de falha e dos modelos de degradação implementados foram feitas utilizando resultados experimentais, além da avaliação da Análise Isogeométrica em problemas de estabilidade.

### **1.2. Organização do Texto**

O presente trabalho foi dividido em seis capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos acerca dos materiais compósitos. Uma breve introdução é feita, juntamente com os tipos e classificações para este tipo de material. É dado maior enfoque nos compósitos laminados, uma vez que eles foram empregados. Neste trabalho, é apresentado o

desenvolvimento físico e matemático das equações que regem o comportamento mecânico de uma lâmina. De modo a incorporar o efeito de todas as lâminas é apresentada a Teoria de Reissner-Mindlin para placas. Em seguida, é mostrada a formulação matemática que rege um problema de estabilidade de placas. No final do capítulo são apresentados os critérios de falha utilizados nesta dissertação.

No Capítulo 3 é feita uma breve revisão acerca dos conceitos básicos de *B-Splines* e *NURBS*, base da ideia da Análise Isogeométrica. As *B-Splines* são importantes de se mencionar, uma vez que as *NURBS* são uma extensão delas.

No Capítulo 4 é apresentado o desenvolvimento do elemento isogeométrico de casca abatida. Neste elemento é utilizada a formulação Lagrangeana Total na consideração de deformações e rotações moderadas. Na sequência é apresentada a forma de consideração da não linearidade física e é feito um breve comentário acerca de como a avaliação numérica da falha é realizada em um programa de elementos finitos. Finalizando o capítulo são apresentados alguns exemplos de validação dos modelos de degradação implementados.

O Capítulo 5 contém os exemplos numéricos da dissertação. Inicia-se por um estudo da influência do esquema de laminação no valor da carga crítica de laminados. Em seguida é apresentada uma verificação da AIG em análises não lineares geométricas. Posteriormente, são propostos estudos numéricos de placas considerando a não linearidade física e geométrica. Um exemplo com placas com furo central também é avaliado e é feito um estudo da influência do tamanho deste furo na capacidade de carga e no comportamento não linear da estrutura. Finalmente, são apresentados estudos de estabilidade em cascas abatidas.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões da dissertação e comentários finais e são deixadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2. COMPÓSITOS LAMINADOS

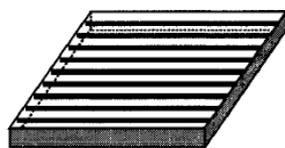
Material composto ou compósito é o resultado da união de dois ou mais materiais em escala macroscópica, cujo objetivo final é se obter um novo material com propriedades físicas e mecânicas superiores aos de seus constituintes isoladamente para determinadas solicitações consideradas em projeto.

De um modo geral, os compósitos podem ser classificados como *particulados*, *fibrosos* ou *laminados*.

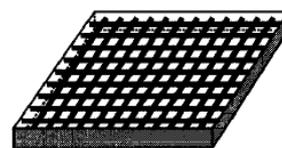
Os compósitos particulados consistem em partículas, apresentando várias formas e tamanhos, dispersas em uma matriz. Por conta da distribuição aleatória das partículas, em escala macroscópica estes materiais são aproximadamente homogêneos e isotrópicos. O concreto convencional e o asfáltico, utilizado na pavimentação, são bons exemplos desse tipo de compósito.

Os compósitos fibrosos consistem em fibras dispersas em uma matriz (geralmente polimérica, mas podem ser encontradas matrizes metálicas e cerâmicas). As fibras, que podem ser curtas ou longas, são as responsáveis pela resistência mecânica do sistema, já a matriz é a responsável pela transferência das tensões de cisalhamento (distribuição das tensões). Devido à orientação das fibras (unidirecionais, bidirecionais, trançadas ou aleatórias), os compósitos fibrosos são materiais ortotrópicos. A Figura 1 mostra os tipos de materiais compósitos fibrosos.

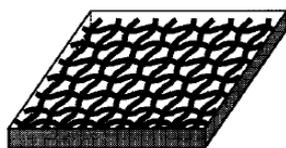
Figura 1 – Tipos de compósitos fibrosos.



(a) Fibras unidirecionais



(b) Fibras bidirecionais



(c) Fibras trançadas

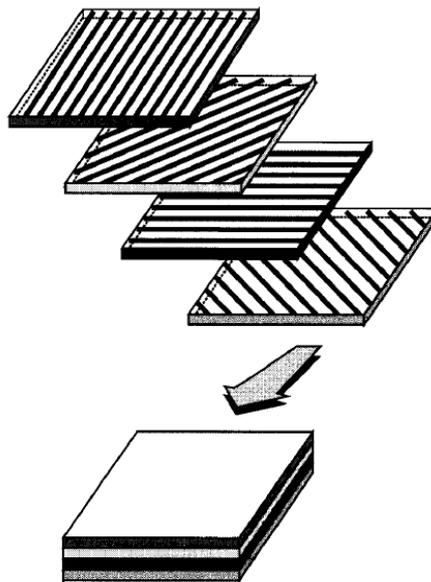


(d) Fibras aleatórias

Fonte: Reddy, 2004.

Os compósitos laminados, foco do presente trabalho, consistem em camadas (ou lâminas) empilhadas, umas sobre as outras, e “perfeitamente” unidas, onde estas lâminas podem ser de materiais diferentes (compósitos laminados híbridos) ou não. Segundo Jones (1999), a laminação é utilizada para combinar as melhores características dos constituintes das lâminas, de modo a se obter um material mais eficiente. Uma estrutura de alto desempenho pode ser o resultado de um laminado constituído de matriz polimérica, reforçada por fibras unidirecionais (Compósito Laminado Reforçado por Fibras). A Figura 2 mostra um esquema geral de laminação.

Figura 2 – Compósito laminado.

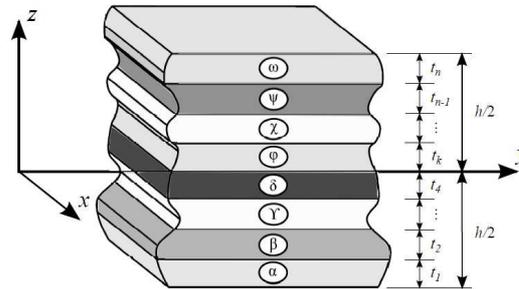


Fonte: Reddy (2004).

Dentre as principais características dos compósitos reforçados por fibras, podem-se citar: elevadas relações resistência/peso e rigidez/peso, resistência à corrosão e à abrasão, boa trabalhabilidade em baixas ou elevadas temperaturas, baixa condutividade térmica e elétrica, bom isolamento acústico, boa resposta à fadiga sob carregamentos cíclicos.

A maneira mais comum de se representar o esquema de laminação de um laminado é adotando a forma  $[\alpha/\beta/\gamma/.../\omega]$ , sendo, respectivamente,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos de orientação das fibras da primeira, segunda, terceira camada do laminado em relação a algum eixo de referência e assim sucessivamente. A Figura 3 apresenta a representação de um laminado.

Figura 3 – Esquema típico de laminação.



Fonte: Rocha (2013).

Quanto à orientação das fibras, podem-se dividir os laminados em *cross-ply* ou *angle-ply*. Nos laminados *cross-ply* as lâminas apresentam ângulos defasados de  $90^\circ$  em sua configuração, enquanto nos laminados *angle-ply* as lâminas podem apresentar quaisquer direções dentro do intervalo  $[-90^\circ, +90^\circ]$ .

Em relação à simetria, os laminados podem ser classificados como simétricos, antissimétricos ou assimétricos. Os laminados simétricos, antissimétricos e assimétricos são aqueles que apresentam espessuras, orientações e material simétricos, antissimétricos e assimétricos em relação à superfície média do laminado, respectivamente.

Os laminados são ditos balanceados quando para cada lâmina, acima da superfície média do laminado, existe outra com mesmo material e espessura, mas com direção oposta, abaixo desta superfície (REDDY, 2004).

## 2.1. Relações Constitutivas

Em condições usuais de serviço e para cargas estáticas onde o efeito das deformações lentas é desprezado, o comportamento mecânico dos laminados pode ser considerado como linear elástico (JONES, 1999). Neste caso, o comportamento tensão-deformação pode ser representado pela lei de Hooke generalizada.

Devido à ortotropia das lâminas, a relação entre deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  e tensões  $\boldsymbol{\sigma}_1$  no sistema de eixos da lâmina é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (1)$$

onde  $\mathbf{S}$  é simétrica (JONES, 1999) e é conhecida como matriz de flexibilidade do material, cujos coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} & S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{31}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2)$$

sendo as variáveis  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  os módulos de elasticidade nas direções principais, enquanto  $\nu_{ij}$  é o coeficiente de Poisson na direção  $i$ , devido a aplicação de uma carga na direção  $j$  e  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$  são os módulos de elasticidade ao cisalhamento.

Para materiais elásticos ortotrópicos, os coeficientes de Poisson ( $\nu_{ij}$ ) devem satisfazer a seguinte relação (JONES, 1999):

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j=1,2,3) \quad (3)$$

Em placas finas, é usual a consideração da hipótese de Estado Plano de Tensões (EPT), ou seja,  $\sigma_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Aplicando as equações mostradas anteriormente nas relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade, pode-se obter a matriz de transformação  $\mathbf{T}_m$  que relaciona as deformações no sistema global para o local, como se segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}_m \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

Invertendo a Equação (1), considerando o EPT, tem-se a relação tensão-deformação no sistema do material:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (5)$$

onde:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (6)$$

Quando as lâminas são espessas, torna-se necessário captar o efeito do cisalhamento transversal. Deste modo as componentes de deformação  $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{23}$  devem ser consideradas. Verifica-se que, pela Teoria da Elasticidade, pode-se obter uma matriz  $\mathbf{T}_s$  que transforma as deformações de cisalhamento entre os sistemas global e local:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{T}_s^t \boldsymbol{\gamma} \quad (7)$$

As tensões de cisalhamento referentes a estas deformações são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\tau} \quad (8)$$

sendo  $Q_{44} = G_{13}$  e  $Q_{55} = G_{23}$ .

Pode-se mostrar também que a transformação das tensões do sistema local para o sistema global é realizada através de:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_m^t \boldsymbol{\sigma}_1 \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_s^t \boldsymbol{\tau}_1 \quad (9)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (4) e (5) e as Eqs. (7) e (8) na Eq. (9), obtêm-se as relações tensão-deformação no sistema de coordenadas global:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{T}_m^t \mathbf{Q}_m \mathbf{T}_m \quad \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{Q}}_s \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^t \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s \quad (10)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{Q}}_m = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{Q}}_s = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}}_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}}$  é a matriz constitutiva transformada e os coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$  são calculados conforme as operações apresentadas anteriormente.

## 2.2. Teoria de Reissner-Mindlin

A Teoria Clássica de Laminação (TCL) é uma extensão para compósitos laminados da teoria de placas de Kirchhoff. A TCL é derivada da Teoria da Elasticidade tridimensional, onde hipóteses simplificadoras são feitas no que se refere às relações cinemáticas de deformação ou estados de tensões ao longo da espessura do laminado (REDDY, 2004). A partir destas simplificações, o problema tridimensional passa a ser tratado como bidimensional.

Entretanto, a teoria clássica leva a bons resultados para placas finas, mas esta precisão diminui à medida que a espessura da estrutura aumenta. Os resultados obtidos pela Teoria da Elasticidade para alguns problemas mostra que este erro é da ordem do quadrado da espessura da placa (SZILARD, 2004). Com esta limitação da TCL para placas espessas, tornou-se necessário o desenvolvimento de teorias mais refinadas, de modo a se obter resultados mais precisos para este tipo de estrutura.

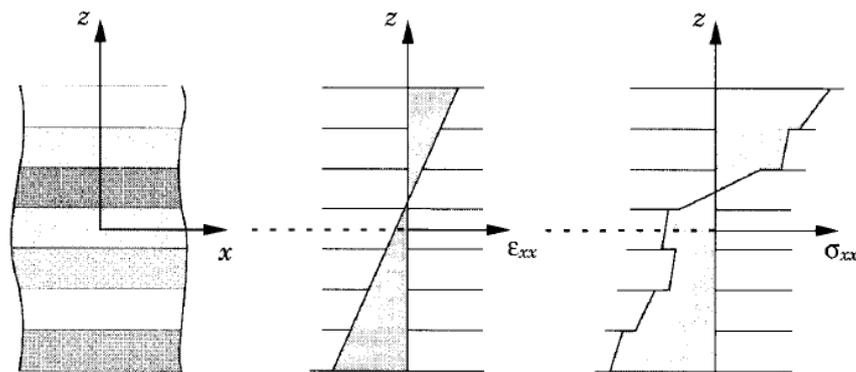
Experimentos ainda mostram que a TCL subestima as deflexões e superestima as frequências naturais e cargas críticas de placas espessas (SZILARD, 2004). Estas discrepâncias se devem pelo fato de se desprezar o efeito do cisalhamento transversal.

Assim, diversas teorias foram desenvolvidas com a finalidade de levar em conta o efeito do cisalhamento transversal. Reissner (1945) desenvolveu uma teoria onde as tensões eram tratadas como variáveis e, em seguida, Mindlin (1951) tratou os deslocamentos como variáveis do problema. Em ambas as teorias, o cisalhamento transversal é tratado como constante ao longo da seção, sendo conhecidas como teorias de primeira ordem.

Recentemente, teorias mais sofisticadas vêm sendo apresentadas, de modo que o cisalhamento não é mais aproximado de forma constante, mas quadraticamente, como se requer em um problema de flexão sob carregamento uniforme (BALUCH & VOYIADJIS, 1980; REDDY, 1984B; MURTY & VELLAICHAMY, 1988; SHI, 2007). Estas teorias são conhecidas como Teorias de Alta Ordem.

Ainda, é importante notar que nas teorias mencionadas anteriormente, o laminado é tratado como uma lâmina equivalente. Deste modo, é feita uma compatibilidade nas deformações do laminado e as suas tensões são descontínuas ao longo da espessura, como mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Variação das deformações e tensões ao longo de um laminado, usando uma teoria do tipo Lâmina Equivalente.



Fonte: Reddy (2004).

Entretanto, existem teorias que não aproximam o laminado como uma lâmina equivalente, mas consideram o efeito de cada lâmina isoladamente. Estas são ditas Teorias *Layerwise*. Nessas teorias, faz-se uma compatibilidade das tensões, de modo que as faces das lâminas apresentem uma continuidade e, portanto, haja equilíbrio (REDDY, 2004; CARRERA, 2002).

Teorias como a *Layerwise*, assim como as teorias de alta ordem para modelos de Lâmina Equivalente, se tornam importantes quando a espessura das estruturas analisadas faz com que a distribuição de tensões fora do plano ( $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\sigma_z$ ) se tornem relevantes (REDDY, 2004; CARRERA, 2002; 2003). Teorias do tipo *Layerwise* estão fora do escopo do presente trabalho.

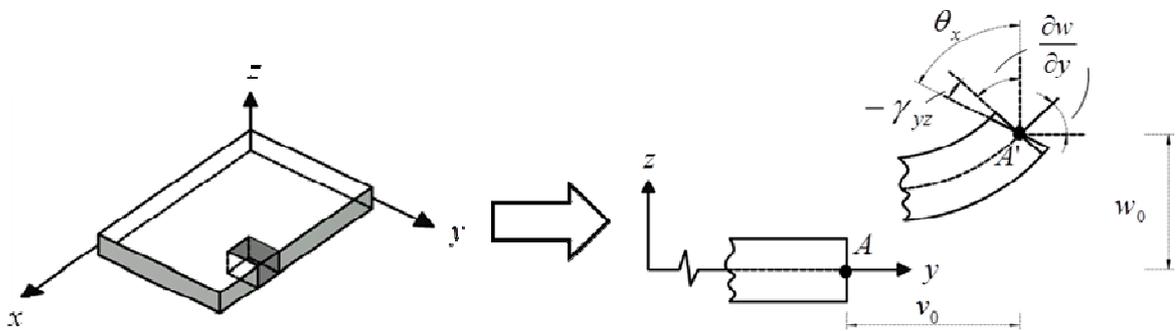
A hipótese básica da Teoria de Mindlin é que uma reta normal ao plano médio da placa permanecerá reta, mas não necessariamente normal a este plano após a deformação,

como mostrado na Figura 5. Deste modo, pode-se constatar que os deslocamentos em qualquer ponto da placa são dados por:

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z\theta_y \quad u_y(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_x \quad u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (13)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos no plano  $x$ ,  $y$  e  $z$  e  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da reta normal em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Figura 5 - Configuração indeformada e deformada de um trecho de uma placa sob as hipóteses de Reissner-Mindlin.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando os deslocamentos são moderadamente grandes, há uma interação entre os efeitos de membrana e flexão, devido aos deslocamentos transversais. Para levar em conta este acoplamento, utilizam-se as deformações de von Kármán, que são as deformações de Green-Lagrange, desprezando os termos não-lineares associados às componentes do deslocamento nas direções do plano da placa,  $u_x$  e  $u_y$  (CRISFIELD, 1991). Neste caso, as componentes de deformações em qualquer ponto da placa são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m) + z \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^b \quad (14)$$

onde as duas primeiras parcelas correspondem às deformações de membrana ( $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ ) e a terceira parcela está associada à curvatura ( $\boldsymbol{\kappa}$ ) da placa.

As deformações de membrana são compostas por duas parcelas: a primeira é proveniente do comportamento linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0^m$ ) e a outra por conta do efeito não linear dos deslocamentos transversais ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L^m$ ). Como se sabe, as deformações devido ao cisalhamento transversal são calculadas por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (15)$$

As forças e momentos resultantes são obtidos por integração das tensões ao longo da espessura da placa:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (16)$$

É importante notar que as deformações são contínuas ao longo da espessura da lâmina, sendo que o mesmo não ocorre com as componentes de tensão. Em geral, isso se dá devido à mudança das propriedades de cada lâmina (espessura, material e/ou orientação da fibra).

De modo a simplificar as expressões anteriores, os esforços internos generalizados  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , podem ser escritos em forma matricial como se segue:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

onde as componentes das sub-matrizes são dadas por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} \quad (18)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n f_s \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k)$$

Sendo **A**, **B**, **D** e **G** as matrizes de rigidez extensional, de acoplamento membrana-flexão, flexional e de cisalhamento, respectivamente, e  $f_s = 5/6$  é o fator de correção das tensões de cisalhamento (REDDY, 2004). A matriz **C** é normalmente chamada de matriz constitutiva do laminado e seus componentes são funções dos termos  $Q_{ij}$  e da orientação das lâminas.

As expressões da TCL podem ser obtidas fazendo  $\theta_y = -w_{,x}$  e  $\theta_x = w_{,y}$  na Eq. (15), que são o resultado da hipótese das seções planas e *perpendiculares* assim permanecerem após a aplicação das cargas. Com isto, têm-se, ainda que  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  (Eq. (16)) e  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$  (Eq. (17)).

### 2.3. Estabilidade de Placas

O principal objetivo deste capítulo é apresentar as equações que regem um problema de estabilidade de placas laminadas baseadas na Teoria de Reissner-Mindlin. De posse das equações, mostra-se a dificuldade inerente à obtenção de soluções analíticas para a determinação da carga crítica de placas laminadas.

Considere uma placa com  $n$  lâminas e de espessura uniforme, conforme mostrado na Figura 6-a. Se retirarmos um elemento infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $h$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, pode-se mostrar os esforços internos neste trecho, como apresentado na Figura 6, para os esforços normais ( $N_x$  e  $N_y$ ), de cisalhamento no plano ( $N_{xy}$ ), momentos fletores ( $M_x$  e  $M_y$ ) e torsões ( $M_{xy}$ ) e esforços de cisalhamento transversal ( $V_x$  e  $V_y$ ).

Fazendo o somatório das forças internas e de momentos nas direções  $x$  e  $y$  e das forças internas na direção  $z$  nulas na configuração de equilíbrio, obtêm-se as seguintes expressões:

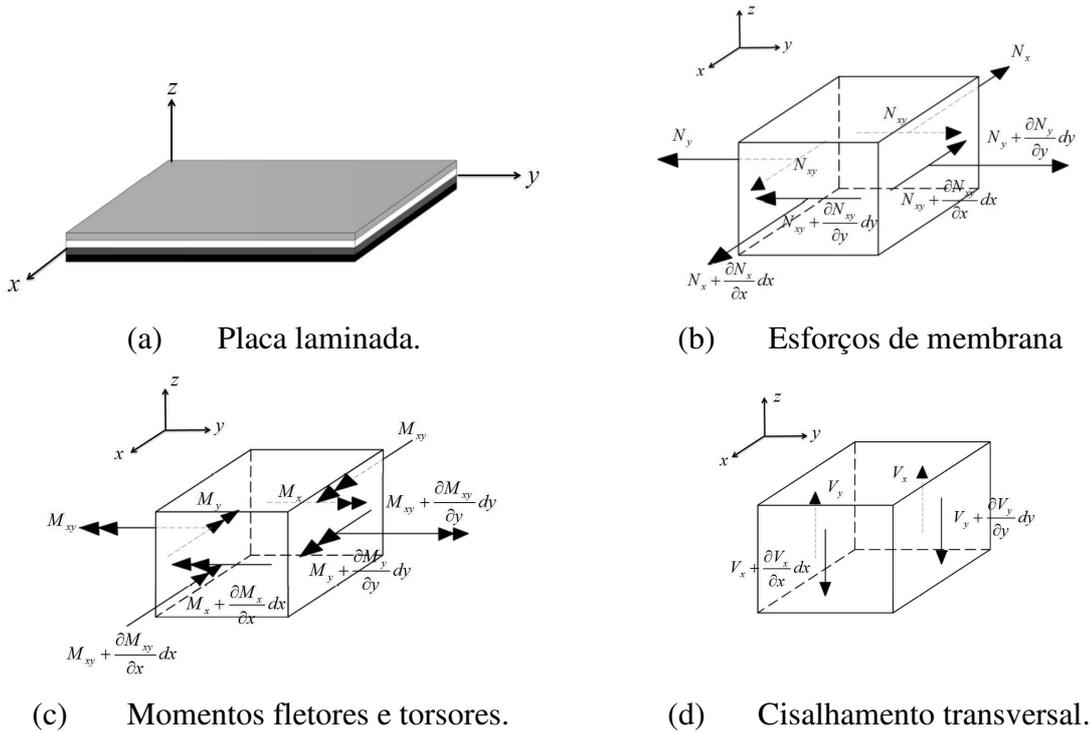
$$\begin{aligned} \sum F_x = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \sum F_y = \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad \sum F_z^V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \\ \sum M_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y = 0 \quad \sum M_y = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Considerando, ainda, que a placa analisada está submetida às cargas externas por unidade de comprimento  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{N}_y$  e  $\bar{N}_{xy}$ , como mostrado na Figura 7, e supondo que as deformações são pequenas, a configuração de um elemento infinitesimal após a aplicação destas cargas é dado pela Figura 8. Admitindo que os deslocamentos sejam pequenos, o seno do ângulo formado entre a aresta do elemento antes e depois da aplicação das cargas pode ser

aproximado pelo próprio ângulo. Assim, o somatório das forças verticais devido às solicitações é dado por:

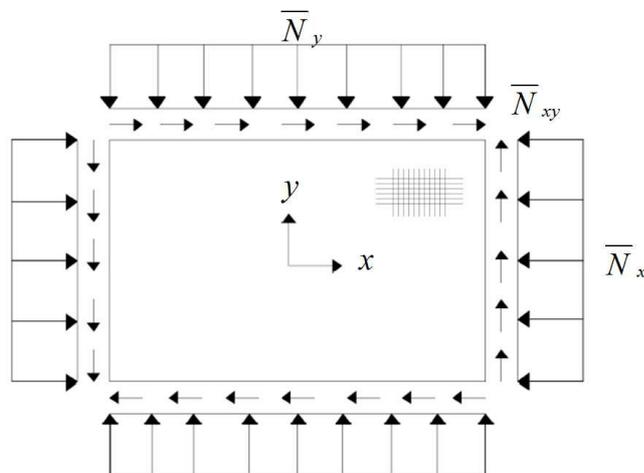
$$\sum F_z \bar{N} = \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (20)$$

Figura 6 - Placa laminada e esforços internos em um elemento infinitesimal.



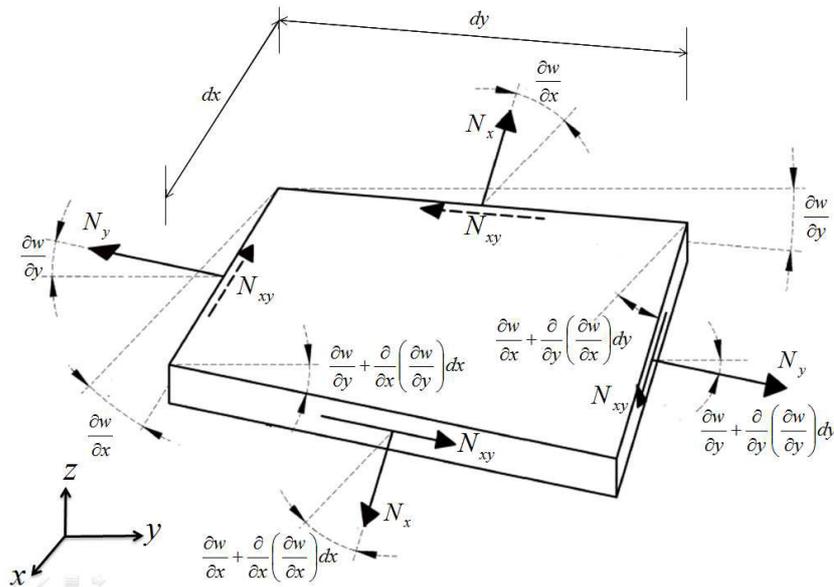
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Placa sujeita a esforços no plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Elemento infinitesimal deformado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No equilíbrio, os esforços internos devem ser iguais aos externos. Portanto:

$$\sum F_z = \sum F_z^v + \sum F_z^{\bar{N}} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

Derivando as expressões para os momentos fletores da Eq. (19) em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente, somando-as e substituindo a Equação (21) nesta soma, temos que:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

Combinando a Eq. (17) com a Eq. (22) e utilizando as relações cinemáticas da Eq. (14), obtêm-se as equações de equilíbrio em função dos termos  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&+ A_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{16} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
&+ A_{66} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\
&- (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} - B_{26} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\sum F_y &= A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&+ A_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{26}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{26} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
&+ A_{66} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + B_{16} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \\
&- B_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - 2B_{26} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= D_{16} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^3} \\
&- 3D_{16} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x \partial y^2} - D_{26} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \\
&- (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \\
&- B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
&- B_{16} \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - B_{26} \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
&- 2B_{66} \left[ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - 2(B_{16} + B_{26} + B_{66}) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
&= \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{25}$$

Nota-se, a partir das Equações (23), (24) e (25) que, para um laminado qualquer, o cálculo da carga crítica requer a solução acoplada destas três equações diferenciais. Entretanto, para alguns tipos de laminados, as equações mencionadas são simplificadas. Por exemplo, no caso de laminados simétricos, os termos  $B_{ij}$  são nulos. Supondo que os deslocamentos são pequenos, os termos quadráticos de membrana da Eq. (14) são desprezados, fazendo com que o cálculo da carga crítica recaia na solução da seguinte equação diferencial:

$$D_{16} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^3} - 3D_{16} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x \partial y^2} - D_{26} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} = \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (26)$$

Mais simplificações podem ser feitas a partir da configuração do laminado. Para laminados do tipo *cross-ply* simétrico tem-se que, além dos termos de acoplamento membrana-flexão, os termos de acoplamento ao cisalhamento  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são nulos. Pode-se mostrar que os termos mencionados anteriormente tendem a se tornar desprezíveis quando o número de lâminas de um laminado cresce muito, mantendo sua espessura total constante (JONES, 1999). Um estudo acerca deste efeito será apresentado posteriormente.

Em contrapartida, em laminados do tipo *angle-ply* simétricos tem-se que os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  não são anulados, porém, à medida que o número de lâminas do laminado aumenta, mantendo-se sua espessura, mostra-se que a magnitude destes termos diminui, em comparação com os outros termos das matrizes **A** e **D** (DANIEL & ISHAI, 1994).

Temos ainda que a aplicação de um laminado balanceado implica na anulação dos termos de acoplamento ao cisalhamento da matriz de rigidez extensional **A** do laminado, ou seja,  $A_{16} = A_{26} = 0$ . Estes laminados podem ser simétricos, antissimétricos ou assimétricos. Sabe-se que no laminado balanceado antissimétrico, os termos de acoplamento ao cisalhamento da matriz de rigidez flexional **D** do laminado também são nulos, ou seja,  $D_{16} = D_{26} = 0$ . Mostra-se que, se o laminado for do tipo *cross-ply* balanceado antissimétrico, os termos  $A_{11} = A_{22}$ ,  $D_{11} = D_{22}$ ,  $B_{11} = -B_{22}$ ,  $B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = 0$ . Para laminados balanceados *angle-ply* antissimétricos tem-se que, além dos termos de acoplamento ao cisalhamento das matrizes **A** e **D** do laminado também serem nulos, os termos  $B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0$ . Daniel

& Ishai (1994) ainda afirmam que os termos não nulos da matriz de acoplamento membrana-flexão  $\mathbf{B}$  tendem à zero, à medida que se aumentam o número de camadas do laminado, mantendo-se a espessura total do mesmo.

Considerando que a Teoria de Kirchhoff pode ser aplicada, tem-se que  $\theta_x = w_{,y}$  e  $\theta_y = -w_{,x}$ . Portanto, a Eq. (26) pode ser expressa por:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (27)$$

Finalmente, para uma placa isotrópica, temos que os termos  $D_{11} = D_{22} = D$ ,  $D_{12} = \nu D$ ,  $2D_{66} = (1-\nu)D$  e  $D_{16} = D_{26} = 0$ . Deste modo, a Eq. (27) assume a forma apresentada por Chajes (1974):

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Rightarrow D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (28)$$

sendo  $D$  a rigidez à flexão da placa,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $h$  é a espessura total e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

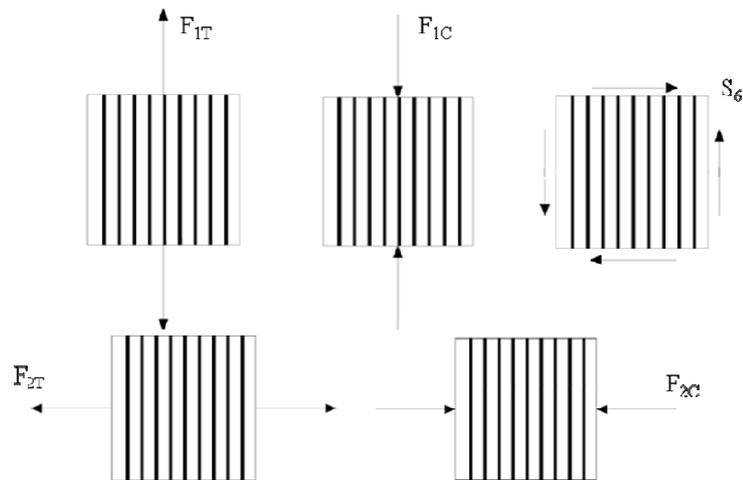
## 2.4. Critérios de Falha

No item 2.1, mostrou-se a relação tensão-deformação de um laminado no regime linear elástico. Entretanto, apenas com esta hipótese, teoricamente, o laminado nunca falharia, o que não condiz com a realidade. Para isto, foram desenvolvidos vários critérios que estimam quando uma lâmina falha (TSAI & WU, 1971; HASHIN, 1980; PUCK & SCHURMANN, 1998; PINHO *et al.*, 2005; CAMANHO *et al.*, 2015) e, com estes, estima-se a capacidade de carga da estrutura analisada (LANZI, 2004; CHEN & SOARES, 2007; DEGENHARDT *et al.*, 2008).

Na análise da falha de uma lâmina isolada, vários critérios podem ser utilizados, cada qual fornecendo diferentes envoltórias de resistência para o mesmo material. Tais envoltórias geralmente consistem no ajuste de curvas a séries de pontos obtidas experimentalmente e fornecem resultados com precisão variada, dependendo do tipo de

laminado e carregamento aplicado. Além disso, alguns critérios são capazes de prever o modo pelo qual se dará a falha (chamados critérios fenomenológicos), auxiliando em um posterior procedimento de degradação. Vários trabalhos abordam os diferentes critérios de falha utilizados em compósitos laminados e discutem suas vantagens e desvantagens (SODEM *et al.*, 1998; LOPEZ *et al.*, 2009; NALI & CARRERA, 2012).

Figura 9 – Resistências de uma lâmina no sistema de eixos local.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes da definição dos critérios de falha, é importante se conhecer os parâmetros de resistência de uma lâmina. Em uma análise bidimensional da lâmina é necessária a determinação de 5 constantes (Figura 9):  $F_{1T}$ ,  $F_{1C}$ ,  $F_{2T}$ ,  $F_{2C}$  e  $S_6$ , onde  $F_{iT}$ ,  $F_{iC}$  e  $S_6$  são as resistências à tração e à compressão nas direções  $i$  ( $i = 1, 2$ ) e a resistência ao cisalhamento no plano 1-2, respectivamente. É importante mencionar que o sinal das resistências ao cisalhamento é irrelevante.

#### 2.4.1. Máxima Tensão e Máxima Deformação

O critério da máxima tensão foi idealizado para refletir o resultado de ensaios de tensão uniaxiais. No critério, a falha em cada direção do sistema do material é tratada separadamente. A falha da lâmina ocorre, portanto, quando a tensão em uma das direções ultrapassa a respectiva resistência. Sua envoltória de falha para o caso bidimensional é dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{cases} F_{1T}, & \text{quando } \sigma_1 > 0 \\ -F_{1C}, & \text{quando } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\
\sigma_2 &= \begin{cases} F_{2T}, & \text{quando } \sigma_2 > 0 \\ -F_{2C}, & \text{quando } \sigma_2 < 0 \end{cases} \\
|\tau_{12}| &= S_6
\end{aligned} \tag{29}$$

O Critério da Máxima Deformação é análogo ao Critério da Máxima Tensão. Deste modo, as deformações em cada direção são tratadas independentemente, e a falha ocorre quando pelo menos uma deformação ultrapassa a resistência do material. Em sua forma bidimensional, o critério pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \begin{cases} \varepsilon_{1T}^u, & \text{quando } \varepsilon_1 > 0 \\ -\varepsilon_{1C}^u, & \text{quando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\
\varepsilon_2 &= \begin{cases} \varepsilon_{2T}^u, & \text{quando } \varepsilon_2 > 0 \\ -\varepsilon_{2C}^u, & \text{quando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\
|\gamma_{12}| &= \gamma_{12}^u
\end{aligned} \tag{30}$$

onde  $\varepsilon_{iT}^u$ ,  $\varepsilon_{iC}^u$  ( $i = 1, 2$ ) e  $\gamma_{12}^u$  são as deformações normais e de cisalhamento máximas do material, respectivamente.

Ambos os critérios são considerados dependentes do modo de falha, pois os mesmos contêm expressões específicas para cada modo de falha.

Apesar de ser considerado não-interativo, alguns termos de interação surgem se o Critério da Máxima Deformação for escrito em termos de tensões. Tais interações são decorrentes do efeito dos coeficientes de Poisson:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2 &= \begin{cases} F_{1T}, & \text{quando } \varepsilon_1 > 0 \\ -F_{1C}, & \text{quando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\
\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1 &= \begin{cases} F_{2T}, & \text{quando } \varepsilon_2 > 0 \\ -F_{2C}, & \text{quando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\
|\tau_{12}| &= S_6
\end{aligned} \tag{31}$$

Apesar das expressões anteriores representarem envoltórias de falha (Figura 10), muitas vezes é interessante a obtenção de um Fator de Segurança ( $S_f$ ), que é um multiplicador

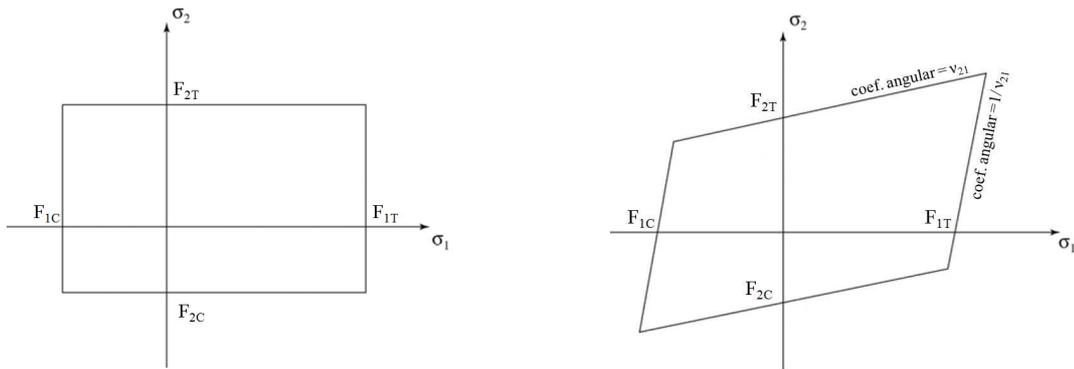
que, quando aplicado às componentes de tensão, produz um estado crítico para que se dê a falha. Para o critério da Máxima Tensão, tal fator é calculado como:

$$S_f = \min\left(\frac{F_{1T}}{\sigma_1}, -\frac{F_{1C}}{\sigma_1}, \frac{F_{2T}}{\sigma_2}, -\frac{F_{2C}}{\sigma_2}, \frac{S_6}{|\tau_{12}|}\right) \quad (32)$$

De forma semelhante, para o Critério da Máxima Deformação, temos que o Fator de Segurança é dado por:

$$S_f = \min\left(\frac{\varepsilon_{1T}''}{\varepsilon_1}, -\frac{\varepsilon_{1C}''}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_{2T}''}{\varepsilon_2}, -\frac{\varepsilon_{2C}''}{\varepsilon_2}, \frac{\gamma_{12}''}{|\gamma_{12}|}\right) \quad (33)$$

Figura 10 – Envoltórias de falha.



(a) Critério da Máxima Tensão.

(b) Critério da Máxima Deformação.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

#### 2.4.2. Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu baseia-se em uma teoria polinomial de falha que utiliza tensores baseados nas resistências básicas do material para ponderar os valores das tensões. Critérios baseados em teorias polinomiais não têm embasamento físico, sendo obtidos a partir de ajustes de curvas (TSAI & WU, 1971; LIU & TSAI, 1998). Neste critério, considera-se um critério quadrático que pode ser expresso da seguinte forma:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (34)$$

Para o caso de Estado Plano de Tensões, pode-se mostrar que a equação acima toma a seguinte forma:

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_{11} \sigma_1^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \tau_6^2 = 1 \quad (35)$$

onde

$$f_i = \frac{1}{F_{iT}} - \frac{1}{F_{iC}} \quad f_{ij} = \frac{1}{F_{iT} F_{jC}} \quad (36)$$

Em geral, a determinação do termo de interação é difícil ou pouco precisa. Entretanto, Liu & Tsai (1998), mostram que o termo  $f_{12}$  pode ser aproximado de forma razoável por:

$$f_{12} = \beta_{12} \sqrt{f_{11} f_{22}} \quad (37)$$

onde  $\beta_{12}$  é um parâmetro de interação. Para lâminas típicas com fibras de carbono ou vidro, o parâmetro de interação pode ser aproximado por  $\beta_{12} = -1/2$ .

Como se pode notar, o critério é expresso em uma só equação, de modo que este não é capaz de identificar diretamente o modo de falha da lâmina.

Da sua definição e por conta da natureza quadrática do Critério de Tsai-Wu, pode-se mostrar que o cálculo do Fator de Segurança, para um estado plano de tensões, é realizado a partir da solução da seguinte equação do segundo grau (DANIEL & ISHAI, 1994):

$$\left( f_{11} \sigma_1^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \tau_6^2 \right) S_f^2 + (f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2) S_f - 1 = 0 \quad (38)$$

Ainda, pode-se mostrar que, fazendo as devidas simplificações para materiais isotrópicos, a combinação das Eqs. (34) a (37) se resume ao critério de von Mises utilizado para metais.

### 2.4.3. Hashin

Este critério, ao contrário do mostrado anteriormente, caracteriza-se por ser dependente do modo de falha, ou seja, este tenta prever não somente se a falha acontece ou não, mas, se esta ocorre, de que modo ela acontece. O critério foi inicialmente proposto por

Hashin e Rotem (1973) e, em seguida, modificado por Hashin (1980), tomando a forma atual. Neste trabalho, quatro modos de falha são considerados (SLEIGHT, 1999):

- Falha da matriz na tração:

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_{1T}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_6}\right)^2 \geq 1 \quad (39)$$

- Falha da matriz na compressão:

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_{1C}}\right)^2 \geq 1 \quad (40)$$

- Falha da fibra na tração:

$$\left(\frac{\sigma_2}{F_{2T}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_6}\right)^2 \geq 1 \quad (41)$$

- Falha da fibra na compressão:

$$\frac{\sigma_2}{F_{2T}} \left[ \left(\frac{F_{2T}}{2S_6}\right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\sigma_2}{2S_6}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_6}\right)^2 \geq 1 \quad (42)$$

Para se obter o fator de segurança para este critério, deve-se analisar cada modo de falha separadamente. Como nas expressões são utilizados termos quadráticos, o cálculo do  $S_f$  é feito de forma semelhante ao apresentado no Critério de Tsai-Wu. O fator de segurança é o menor valor de  $S_f$  obtido para as quatro expressões.

### 3. B-SPLINES E NURBS

No Método dos Elementos Finitos, os polinômios de Lagrange são a base da análise numérica, enquanto na Análise Isogeométrica as B-Splines, as NURBS e as T-Splines são usadas. Tanto a Análise Isogeométrica (AIG), quanto o Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional usam o conceito isoparamétrico, ou seja, as funções que aproximam a geometria analisada são as mesmas empregadas na interpolação dos deslocamentos do problema. A grande diferença entre os dois métodos consiste que tanto a geometria, que é conhecida, quanto os deslocamentos são interpolados de forma aproximada no MEF, enquanto na AIG a forma pode ser representada de forma exata.

A capacidade de representação exata de geometrias é uma das principais razões pelas quais as NURBS estão sendo amplamente empregadas em programas do tipo CAD (*Computer Aided Design*).

Outra grande característica da Análise Isogeométrica é a possibilidade de se aumentar o grau dos polinômios de interpolação do campo de solução do problema de forma simples, em comparação com o Método dos Elementos Finitos, uma vez que a utilização dos polinômios de Lagrange no MEF pode tornar a formulação deste tipo de refinamento muito complicada. Existe também um tipo de refinamento na AIG que além de aumentar o grau do polinômio de interpolação, aumenta a continuidade entre elementos. Este tipo de refinamento é chamado *Refinamento k* e será comentado posteriormente. Com esta vantagem, pode-se aplicar as Teorias de Kirchhoff-Love (KIENDL *et al.*, 2009; 2010), de Reissner-Mindlin (BENSON *et al.*, 2010; 2011) e de Alta Ordem (TRAN *et al.*, 2013; 2015; THAI *et al.*, 2015).

Este capítulo tem como objetivo a apresentação dos conceitos básicos e características das *B-Splines* e das NURBS, que são uma forma generalizada da primeira.

#### 3.1. B-Splines

As *B-Splines* são curvas capazes de descrever vários segmentos distintos ao longo de uma representação paramétrica. Esta característica é obtida limitando a atuação das funções base em regiões do espaço paramétrico. Estas regiões são conhecidas na literatura como *knot spans* e são definidas por um vetor de valores paramétricos, o vetor de *knots*. As *B-Splines* podem representar qualquer curva polinomial.

Uma curva *B-Spline* é obtida a partir da combinação linear entre os pontos de controle  $\mathbf{p}_i$  e as funções de base  $N_{i,p}(\xi)$  da seguinte forma:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (43)$$

onde  $n$  é o número de funções de base,  $p$  é o grau da curva e  $\xi$  é a coordenada paramétrica da curva.

As bases *B-Splines* requerem um vetor de *knots*, que consiste num conjunto de valores não negativos e não decrescentes delimitados ao longo do intervalo paramétrico  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$  no qual a curva foi definida.

Considerando o vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , as funções de base *B-Spline* são definidas pela fórmula recursiva de Cox-de Boor (PIEGL & TILLER, 1997):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (44)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+n+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (45)$$

Cada base  $N_{i,p}$  contribui ao longo do intervalo paramétrico  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ . O número de bases  $n$  pode ser calculado em função do tamanho do vetor de *knots*  $ks$  e do grau  $p$  por:

$$n = ks - p - 1 \quad (46)$$

A derivada de  $N_{i,p}$  pode ser calculada por:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+n+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (47)$$

Esta derivada é importante no contexto da Análise Isogeométrica, pois ela é utilizada na avaliação da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da estrutura. A expressão para o cálculo de derivadas de ordem superior pode ser encontrada em Piegl & Tiller (1997).

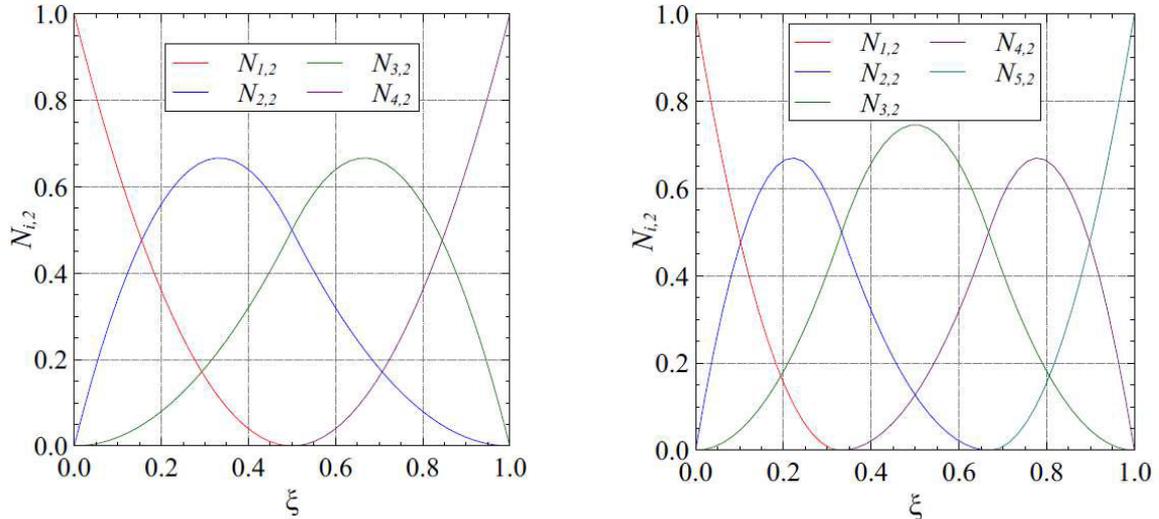
Considerando o exemplo de uma base quadrática com vetor de *knots*  $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ , onde as bases são apresentadas na Figura 11, pode-se notar que a base  $N_{1,2}$

contribui ao longo do intervalo  $[\zeta_1, \zeta_4]$ . Na mesma figura são mostradas as bases *B-Splines* para um vetor de *knots* mais discretizado.

Os valores paramétricos no interior dos vetores de *knots* podem aparecer repetidamente, sendo o número de repetições que um dado valor paramétrico  $\zeta_i$  possui conhecido como a multiplicidade do *knot*. Uma das propriedades das *B-splines* é possuir continuidade  $C^{p-1}$  dentro do *knot span*. Em caso de algum *knot* ter multiplicidade  $m$ , a continuidade da curva naquela coordenada paramétrica será  $C^{p-m}$ .

Uma importante observação é que caso um *knot* interno  $\zeta_i$  possua multiplicidade igual ao grau da *B-spline* ( $m = p$ ), então a curva interpolará um ponto de controle em  $\zeta_i$  (Figura 12). Se os *knots* extremos tiverem esta multiplicidade  $m = p+1$ , então os pontos de controle extremos serão interpolados. Por este motivo que a maioria das representações *B-splines* utilizadas em Análise Isogeométrica possuem multiplicidade  $p+1$  nos *knots* extremos, garantindo que os pontos de controle inicial e final sejam interpolados. Este tipo de vetor de *knots* é conhecido vetor de *knots* aberto.

Figura 11 – Exemplo de bases B-Splines quadráticas.



(a)  $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ .

(b)  $\Xi = [0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1, 1]$ ,

Fonte: Barroso (2015).

De modo resumido, Piegl & Tiller (1997) listam as principais características das funções de base *B-Splines*:

- Não negatividade:

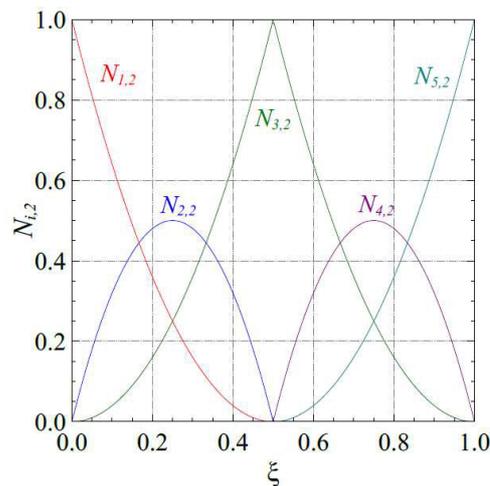
$$N_{i,p}(\xi) \geq 0 \quad (48)$$

- Partição da unidade:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad (49)$$

- Suporte compacto:  $N_{i,p}(\xi) = 0$  se  $\xi$  estiver fora do intervalo  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ .
- Dado um *knot span*  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ ,  $p+1$  funções de base são não nulas neste intervalo.
- Todas as derivadas de  $N_{i,p}$  existem no interior dos *knot spans*. Nos *knots* as bases são diferenciáveis  $p - m$  vezes, onde  $m$  é a multiplicidade do *knot*.

Figura 12 – Exemplo de bases B-Splines quadráticas com multiplicidade 2 no *knot*  $\xi_i = 0.5$ .



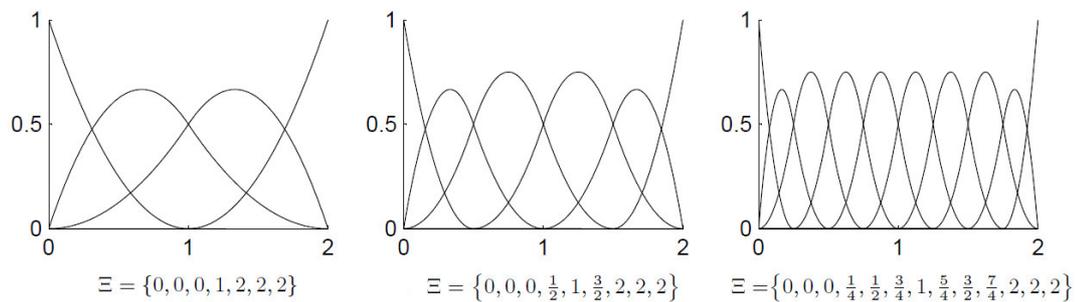
Fonte: Barroso (2015).

Outro aspecto interessante acerca das *B-Splines* são as operações referentes ao refinamento do modelo. Na Análise Isogeométrica, existem três formas de refinamento: *Adição de Knot*, *Elevação de Grau* e *Refinamento  $k$* . Ambos os procedimentos mencionados anteriormente alteram a descrição da curva sem modificar sua forma.

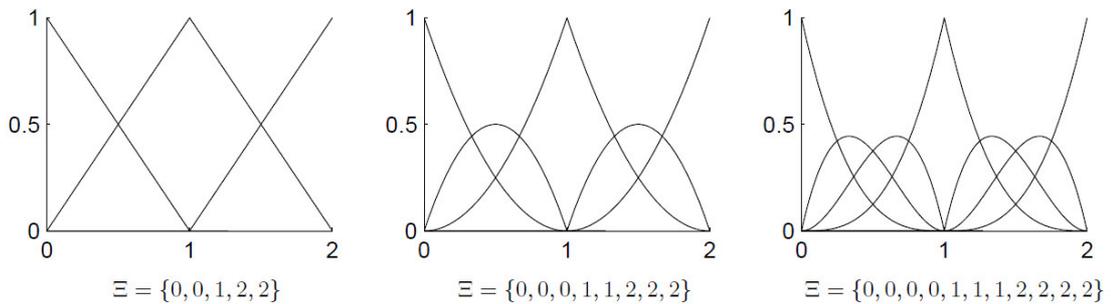
A *Adição de Knot* insere um novo *knot*  $\xi_i$  no vetor  $\Xi$ , uma nova base  $N_{i,p}$  e um novo ponto de controle. Para manter a geometria inicial, alguns pontos são modificados. Este procedimento corresponde ao refinamento  $h$ , tradicional do Método dos Elementos Finitos, uma vez que possibilita discretizar o modelo inserindo um número maior de graus de liberdade. A Figura 13-a representa a operação acima no vetor de knots  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 2, 2]$ .

A *Elevação de Grau* atua nas *B-splines* elevando o grau da curva em cada intervalo paramétrico, mantendo a continuidade original em cada *knot*. A multiplicidade de cada *knot* é aumentada em 1, preservando a sua continuidade original. Do ponto de vista da Análise Isogeométrica, este artifício permite melhorar a solução numérica do problema, uma vez que utiliza funções de forma de ordens maiores. Esta operação é equivalente ao refinamento  $p$  utilizado comumente no MEF. A Figura 13-b representa a operação acima no vetor de *knots*  $\Xi = [0, 0, 1, 2, 2]$ .

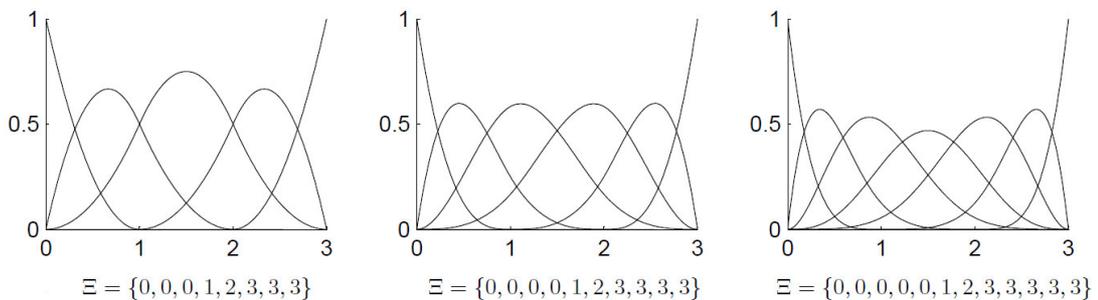
Figura 13 – Formas de refinamento do modelo geométrico na Análise Isogeométrica.



(a) Adição de *knots*.



(b) Elevação de grau.



(c) Refinamento  $k$ .

Fonte: Nguyen-Thanh (2011).

O *Refinamento k* é uma combinação dos dois operadores mencionados anteriormente. A ideia é aumentar a ordem da curva, juntamente com a continuidade nos limites do elemento. Isto é feito simplesmente aumentando a multiplicidade do primeiro e último valor do vetor de *knots* (Figura 13-c). A continuidade é aumentada pelo mesmo valor da multiplicidade na *Elevação de Grau*.

Maiores informações acerca dos operadores supracitados ou implementações computacionais podem ser obtidas nos trabalhos de Piegl & Tiller (1997), Nguyen-Than (2011a) e Barroso (2015).

### 3.2. NURBS

NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) são representações paramétricas amplamente utilizadas em modelagem computacional, pois oferecem uma forma matemática capaz de representar tanto modelos analíticos padrão (cônicas ou superfícies de revolução, por exemplo) como também modelos de forma livre, utilizando a mesma base de dados para armazenamento de ambos (HUGHES, 2005). Uma curva NURBS  $C$  de grau  $p$  é construída por uma combinação linear entre os pontos de controle  $\mathbf{p}_i$  e funções de base racional  $R_{i,p}(\xi)$ , como mostra a expressão:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (50)$$

onde  $n$  é o número de bases da curva. As funções de base NURBS são avaliadas em função das funções de base *B-Spline*  $N_{i,p}$  e dos pesos  $w_i$  pela expressão:

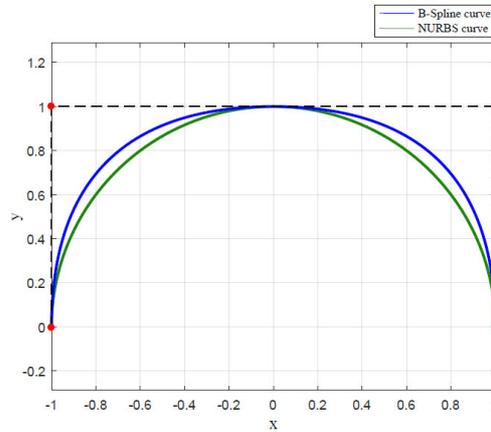
$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} \quad (51)$$

onde  $W(\xi)$  é a função peso. Cada ponto de controle  $\mathbf{p}_i$  possui uma peso correspondente  $w_i$ . A consideração dos pesos permite alterar a geometria final do modelo, como também a modelagem de cônicas como circunferências e elipses.

É importante mencionar que as funções de base racionais  $R_{i,p}(\xi)$  herdam as propriedades das funções de base *B-Spline*  $N_{i,p}(\xi)$ . Deste modo, as operações de refinamento

do modelo apresentadas no item anterior continuam válidas, por exemplo. A Figura 14 mostra um arco de circunferência de 180° modelada por *B-Splines* e por NURBS.

Figura 14 – Formas de refinamento do modelo geométrico na Análise Isogeométrica.



Fonte: Barroso (2015).

Uma superfície *NURBS* definida por um produto tensorial é construída em função do produto de duas bases univariantes. Uma superfície  $S$  é definida por um tensor de pontos de controle  $\mathbf{P}$  ( $n \times m$ ), a partir de uma NURBS de grau  $p$  na direção  $\xi$  com vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e outra de grau  $q$  na direção  $\eta$  com vetor de *knots*  $\mathbf{H} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}]$ , da seguinte forma:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R(\xi, \eta) \mathbf{p}_{ij} \quad (52)$$

onde  $R(\xi, \eta)$  é a função de base racional bivariante, dada por:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{W(\xi, \eta)} \quad (53)$$

sendo  $W$  a função peso bivariante:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \quad (54)$$

As derivadas parciais das funções de base bivariantes podem ser calculadas através da regra de derivação do quociente:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}(\xi, \eta) = w_{ij} N_{j,q}(\eta) \frac{W(\xi, \eta) N'_{i,p}(\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) N_{i,p}(\xi)}{W^2(\xi, \eta)} \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_{i,j}(\xi, \eta) = w_{ij} N_{i,p}(\xi) \frac{W(\xi, \eta) N'_{j,q}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) N_{j,q}(\eta)}{W^2(\xi, \eta)}$$

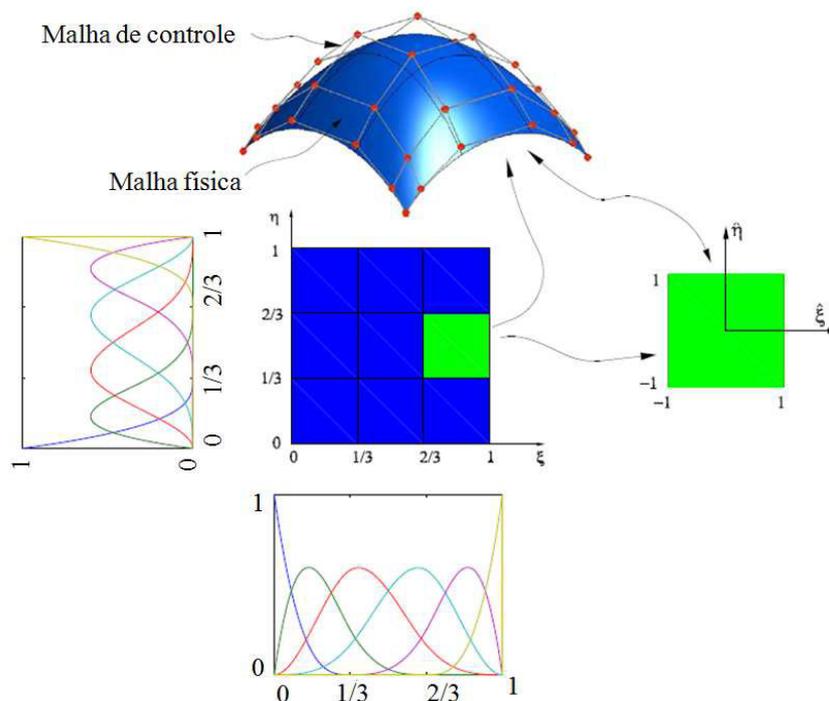
onde:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij} N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n w_{ij} N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta)$$

É importante salientar que na Análise Isogeométrica se trabalha com pontos de controle e a forma que se quer representar é de um modelo físico. Portanto, em modelos isogeométricos são utilizadas duas malhas: uma definida pelos pontos de controle  $\mathbf{p}_i$  e outra física, obtida a partir da primeira. A Figura 15 apresenta uma superfície cúbica com três elementos e mostra a distinção entre estas duas malhas.

Figura 15 – Malha de controle e malha física de uma superfície.



Fonte: Nguyen-Thanh (2011b).

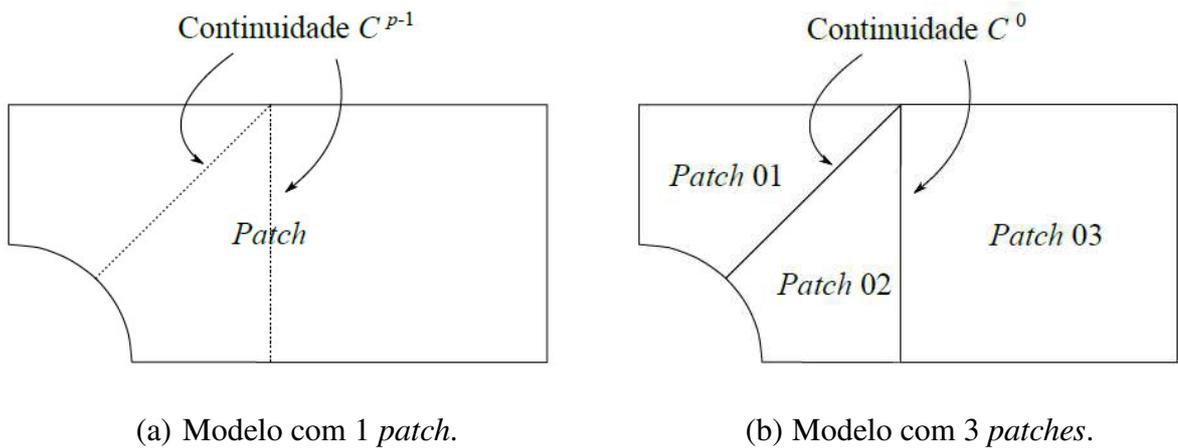
### 3.2.1. Múltiplos Patches

A palavra *patch* é utilizada na literatura como uma entidade NURBS, seja ela uma curva, uma superfície ou um sólido.

Mesmo que uma entidade NURBS possa ser suficiente para modelagem de geometrias complexas, existem casos em que pode ser útil representar o modelo através de múltiplas entidades. Por exemplo, quando várias regiões do modelo apresentam diferentes atributos, como material, carregamento e condições de contorno, pode ser interessante representar tais regiões por entidades distintas.

Por outro lado, verifica-se que a utilização de vários *patches* leva a uma redução na continuidade nas suas fronteiras, como mostrado na Figura 16.

Figura 16 – Trecho de uma placa com furo.



(a) Modelo com 1 *patch*.

(b) Modelo com 3 *patches*.

Fonte: Barroso (2015).

## 4. ANÁLISE NÃO LINEAR

Existem três tipos de não linearidades em análise de estruturas: a geométrica, a física e a de contato (CRISFIELD, 1991, 1997). Neste trabalho, será limitada a apresentação das duas primeiras fontes de não linearidade.

A análise não linear geométrica é a que incorpora os efeitos dos deslocamentos no comportamento da estrutura, ou seja, ela está relacionada com as mudanças devido às deformações sofridas.

Quando se realiza uma análise linear geométrica em uma estrutura, tem-se como hipótese que os deslocamentos e as deformações provenientes do carregamento nesta são pequenas, de modo que as equações de equilíbrio do sistema possam ser escritas na configuração indeformada da estrutura sem que haja diferenças significativas entre os resultados da análise. Entretanto, algumas estruturas podem apresentar grandes deslocamentos e deformações, mesmo sem que o seu material constituinte saia do regime elástico linear, de modo que se torna necessária a determinação do seu caminho de equilíbrio, além da verificação da existência de pontos limites no comportamento estrutural.

A análise não linear física está relacionada ao comportamento do material, quando este não segue mais à Lei de Hooke, onde as tensões são funções lineares das deformações. Neste tipo de não linearidade, podem ser considerados os efeitos de plastificação, dano e colapso do sistema estrutural analisado.

No caso dos materiais compósitos, a falha de uma lâmina não implica, necessariamente, na perda de capacidade de carga da estrutura. Ao invés disto, o que ocorre é uma redistribuição das tensões na estrutura e, à medida que as lâminas vão falhando, a rigidez do laminado vai diminuindo, caracterizando um processo de falha progressiva.

### 4.1. Elemento de Casca Abatida

Nesta seção será apresentada a formulação isogeométrica para análise de cascas abatidas laminadas. Esta formulação é baseada no trabalho de Crisfield (1991) que utilizou a teoria de Reissner-Mindlin para representar a flexão e o cisalhamento transversal e a teoria de Marguerre para representar o efeito das curvaturas iniciais e das rotações moderadas.

Assim, adiciona-se à parcela de membrana da Eq. (14) uma função  $z_0(x, y)$ , conhecida (CRISFIELD, 1991). Deste modo, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right]^2 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right]^2 \\ \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right] \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (57)$$

onde  $z_0(x, y)$  representa a elevação da casca abatida. Desenvolvendo a Eq. (57), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Como se pode notar, na presente formulação ocorrem três tipos de acoplamento membrana-flexão: um devido ao efeito do laminado, por conta da matriz  $\mathbf{B}$  (Eq. (17)); o segundo devido à Teoria de von Kármán, que incorpora a não linearidade nos termos de deformação de membrana de Green-Lagrange, simplificando-os para o caso deslocamentos moderadamente grandes e; por fim, o terceiro ocorre por conta da curvatura inicial da estrutura, gerada pela consideração de  $z_0$ , que gera uma nova parcela nas componentes de deformação. É interessante notar que, no caso de uma placa perfeitamente plana,  $z_0 = 0$  e se obtém as deformações de von Kármán.

Combinando a Eq. (58) com as Eqs. (14) e (15), obtemos o vetor de deformação associado à Teoria de Reissner-Mindlin, dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy}^m \quad \boldsymbol{\kappa}_x \quad \boldsymbol{\kappa}_y \quad \boldsymbol{\kappa}_{xy} \quad \boldsymbol{\gamma}_{xz} \quad \boldsymbol{\gamma}_{yz} \right\}^T = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad \boldsymbol{\varepsilon}^b \quad \boldsymbol{\gamma} \right\}^T \quad (59)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^b$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  são mostrados nas equações mencionadas anteriormente.

#### 4.1.1. Análise Isogeométrica

No Método dos Elementos Finitos são utilizadas funções polinomiais para interpolar os deslocamentos em cada elemento. Aplicando a formulação isoparamétrica, pode-se descrever a geometria da estrutura da mesma forma que os deslocamentos. Na Análise Isogeométrica com formulação isoparamétrica, inverte-se essa sequência, interpolando os deslocamentos da estrutura pelas funções de forma utilizadas na descrição da geometria, que são as *NURBS*.

Deste modo, a geometria de uma casca abatida é interpolada da seguinte forma:

$$x = \sum_{i=1}^{nn} R_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{nn} R_i y_i \quad z_0 = \sum_{i=1}^{nn} R_i z_{0i} \quad (60)$$

sendo  $R_i$  as funções de forma definidas pela Eq. (53) e  $nn$  é o número de nós.

No elemento de casca abatida, cinco graus de liberdade são interpolados: os deslocamentos de membrana e transversal ( $u$ ,  $v$  e  $w$ , respectivamente) e as rotações da estrutura relacionadas à flexão ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ):

$$u = \sum_{i=1}^{nn} R_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{nn} R_i v_i \quad w = \sum_{i=1}^{nn} R_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^{nn} R_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{nn} R_i \theta_{yi} \quad (61)$$

Compactando a equação acima em notação matricial, temos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{u}_e \quad (62)$$

sendo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_e$  os vetores de deslocamentos da estrutura e nos seus pontos de controle e  $\mathbf{R}$  a matriz das funções de forma, dada por:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_m] \quad (63)$$

e a contribuição de cada nó é:

$$\mathbf{R}_i = R_i \mathbf{I}_{5 \times 5} \quad (64)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

O vetor de deformações (Eq. (59)) se relaciona com o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}_e$  por meio de uma matriz  $\mathbf{B}$ , da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (65)$$

De modo a se obter os termos da matriz  $\mathbf{B}$ , deve-se analisar cada termo de deformação separadamente. Combinando as Eqs. (59) e (61), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \begin{Bmatrix} u_{,x} + w_{,x} z_{0,x} \\ v_{,y} + w_{,y} z_{0,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} z_{0,y} + w_{,y} z_{0,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^m \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_0^m = \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 & Z_x R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,y} & Z_y R_{i,y} & 0 & 0 \\ R_{i,y} & R_{i,x} & Z_x R_{i,y} + Z_y R_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2 w_{,x} w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{G} \mathbf{u}_e \quad (67)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^m \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} W_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,x} W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,x} W_y + R_{i,x} W_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^b \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & -R_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{i,x} & R_{i,y} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} - \theta_x \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0^s \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & 0 & R_i \\ 0 & 0 & R_{i,y} & R_i & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

sendo:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$Z_x = \sum_{i=1}^m R_{i,x} z_{0i} \quad Z_y = \sum_{i=1}^m R_{i,y} z_{0i} \quad W_x = \sum_{i=1}^m R_{i,x} w_i \quad W_y = \sum_{i=1}^m R_{i,y} w_i \quad (72)$$

Portanto, a Eq. (65) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{bmatrix} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (73)$$

#### 4.1.1.1. Vetor de forças internas

Com o campo de deformações apresentado na Eq. (59), as equações de equilíbrio do sistema podem ser obtidas. Deste modo, fazendo a variação do trabalho virtual interno igual a variação do trabalho virtual externo, temos que:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (74)$$

sendo:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV_0 = \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{V} dA_0 \quad (75)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (76)$$

onde  $\delta W_{\text{int}}$  e  $\delta W_{\text{ext}}$  são as variações do trabalho interno e externo, respectivamente,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é a deformação virtual decorrente do deslocamento virtual infinitesimal  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}$  representa as forças de corpo,  $\mathbf{q}$  é o vetor das forças de superfície prescritas em  $A_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor das tensões,  $\delta \mathbf{u}_i$  é o deslocamento virtual no ponto de aplicação de  $\mathbf{p}_i$ , que representam as cargas concentradas que atuam em  $n$  pontos sobre a estrutura e  $\mathbf{f}$  é o vetor de cargas externas na casca. As integrações são feitas na área e volume iniciais da casca,  $A_0$  e  $V_0$ , visto que uma formulação Lagrangeana Total está sendo aplicada.

Desenvolvendo a equação da variação do Trabalho interno, aplicando a Eq. (59), substituindo o vetor das tensões e fazendo a integral no volume inicial igual à integral na área inicial e na espessura, obtém-se a forma do  $\delta W_{\text{int}}$  apresentada na Eq. (75).

Pode-se, ainda, relacionar os incrementos de deformação  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  com os incrementos de deslocamentos nodais  $\delta \mathbf{u}_e$  por meio de uma matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ , que pode ser obtida a partir das Eqs. (66) a (70), como se segue:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (77)$$

Sendo:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \bar{\mathbf{B}}_0^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^m \delta \mathbf{u}_e \quad (78)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{A} \mathbf{G}) \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{A} \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}}_L^m \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_L^m \delta \mathbf{u}_e \quad (79)$$

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \bar{\mathbf{B}}_0^b \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^b \delta \mathbf{u}_e \quad (80)$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \bar{\mathbf{B}}_0^s \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_0^s \delta \mathbf{u}_e \quad (81)$$

Portanto, a Eq. (77) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_0^m \\ \bar{\mathbf{B}}_0^b \\ \bar{\mathbf{B}}_0^s \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_e = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}_e \quad (82)$$

Substituindo os termos obtidos na Eq. (75), tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \left[ \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{V} dA_0 \right] = \delta \mathbf{u}^T \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (83)$$

Finalmente, a Eq. (74) que descreve o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), pode ser compactada da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{u}^T \left( \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 - \mathbf{f} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (84)$$

Nota-se que o vetor de forças internas  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  depende dos deslocamentos da estrutura por conta dos efeitos da não linearidade geométrica nos termos de deformação de Green-Lagrange, além de possíveis não linearidades físicas, que serão abordadas posteriormente.

Do PTV, admite-se que  $\delta \mathbf{u}$  é arbitrário e cinematicamente possível. Portanto, a partir da Eq. (84), obtemos a condição de equilíbrio do sistema, que implica que as forças externas estejam em equilíbrio com as forças internas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (85)$$

#### 4.1.1.2. Matriz de rigidez tangente

A solução das equações de equilíbrio não lineares e o traçado do caminho de equilíbrio são realizados normalmente utilizando métodos incrementais-iterativos como Controle de Carga, Deslocamento ou Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991). Nestes métodos, a solução das equações de equilíbrio a cada passo é realizada através do Método de Newton-Raphson. Este método é baseado na linearização das equações de equilíbrio, sendo necessário determinar a matriz de rigidez tangente da estrutura.

A matriz de rigidez tangente corresponde à variação do resíduo  $\mathbf{r}$  em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ . No caso de cargas independentes dos deslocamentos, tem-se:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial [\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}]}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 + \int_{A_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (86)$$

Aplicando a regra da cadeia na primeira parte da expressão mostrada anteriormente, pode-se obter uma integral que depende da lei constitutiva do material. O resultado obtido a partir desta integração é conhecido como Matriz de Rigidez  $\mathbf{K}_L$ . Ainda, pode-se mostrar que a derivada da matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  é dada por um vetor que contém apenas a derivada da parcela de membrana. A integral, na área inicial do elemento, da multiplicação desta matriz pelo vetor das tensões generalizadas  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\mathbf{N} \ \mathbf{M} \ \mathbf{V}\}^T$ , resulta na Matriz de Rigidez Geométrica  $\mathbf{K}_\sigma$  que depende apenas na parcela de membrana. Deste modo, tem-se que:

$$\mathbf{K}_T = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} dA_0 + \int_{A_0} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_L^m}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dA_0 + \int_{A_0} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_L^m}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{N} dA_0 = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (87)$$

sendo  $\mathbf{C}_t$  a matriz que define a lei constitutiva do material e que não necessariamente segue a Lei de Hooke.

Da Eq. (79), tem-se que  $\bar{\mathbf{B}}_L^m = \mathbf{A}\mathbf{G}$ . Aplicando este resultado na parcela da Matriz de Rigidez Geométrica, obtém-se:

$$\mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} = \int_{A_0} \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \mathbf{N} dA_0 = \left( \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \right) d\bar{\mathbf{u}} \Rightarrow \mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad (88)$$

onde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (89)$$

#### 4.1.2. Solução da Equação de Equilíbrio Não Linear

Em uma estrutura com  $n$  graus de liberdade, a imposição do equilíbrio (Eq. (85)) é representada por um sistema de  $n$  equações. Porém, para descrever completamente a curva carga-deslocamento, devem-se determinar tanto os deslocamentos  $\mathbf{u}$  quanto um fator de carga  $\lambda$ , de modo que  $\mathbf{f} = \lambda\mathbf{q}$ , resultando em  $n+1$  incógnitas e apenas  $n$  equações:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (90)$$

Por conta da diferença entre o número de incógnitas e equações de equilíbrio, o sistema se torna impossível de ser resolvido de forma direta. De modo a solucionar este problema, vários métodos para o traçado do caminho de equilíbrio foram desenvolvidos, como o Método do Controle de Carga, Controle de Deslocamento e Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991).

Nos Métodos de Controle de Carga e Controle de Deslocamento, uma das  $n+1$  variáveis é mantida constante a cada passo, tornando possível a solução do sistema. Já nos Métodos de Comprimento de Arco, uma equação adicional é utilizada, mantendo variações tanto na carga quanto nos deslocamentos.

Aplicando o Método de Newton-Raphson, as equações de equilíbrio podem ser representadas linearmente da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \quad (91)$$

Supondo que a carga aplicada não depende dos deslocamentos, temos:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial(\mathbf{g} - \mathbf{f})}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \quad (92)$$

Portanto, a Eq. (91) pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta \lambda \quad (93)$$

Segundo Parente Junior *et al.* (2006), em todos os métodos para o traçado do caminho de equilíbrio, considera-se que o processo iterativo de Newton-Raphson convergiu quando:

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{q}\|)} \leq tol \quad (94)$$

onde *tol* é uma tolerância pré-estabelecida.

Na sequência será apresentado o Método do Controle de Carga. Para maiores informações acerca dos demais métodos para o traçado do caminho de equilíbrio, consultar Crisfield (1991), Parente Junior *et al.* (2006) e Rocha (2013).

#### 4.1.2.1. Método do Controle de Carga

A forma mais simples de se resolver o sistema de  $n + 1$  equações mencionadas anteriormente é utilizando o Método do Controle de Carga. Neste método, elimina-se a variável  $\lambda$ , impondo que a carga seja incrementada de forma constante em cada passo ( $\delta \lambda = 0$ ). Deste modo, a Eq. (93) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} \quad (95)$$

Fazendo com que o resíduo seja anulado ( $\mathbf{r}_n = 0$ ), pode-se calcular a variação dos deslocamentos a cada iteração:

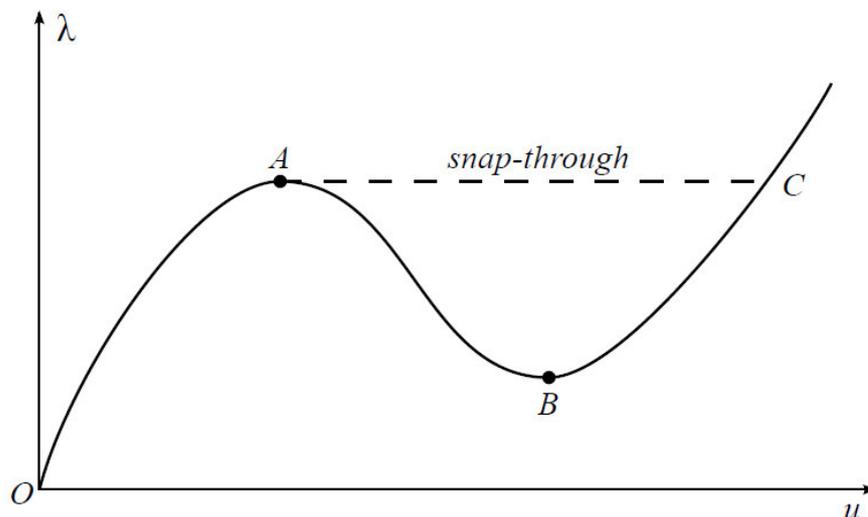
$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{r} \quad (96)$$

Com esta variação, pode-se obter os deslocamentos no final da iteração da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \quad (97)$$

Aplicando este método, pode-se obter o caminho de equilíbrio de estruturas nas quais um aumento na carga provoque, necessariamente, um aumento nos deslocamentos. Caso o caminho de equilíbrio da estrutura apresente o fenômeno *snap-through* (Figura 17) esta passará para a posição estável mais próxima (do ponto *A* ao ponto *C*, na figura), visto que um incremento positivo ou negativo de carga provoca um incremento de mesmo sinal nos deslocamentos. Para se obter a curva compreendida entre os pontos *A* e *C* na Figura 17 pode-se usar o Método do Controle de Deslocamentos ou um Método de Comprimento de Arco. Como mencionado anteriormente, a formulação destes métodos não será mostrada neste texto, mas pode ser obtida em Crisfield (1991), Parente Junior *et al.* (2006) e Rocha (2013).

Figura 17 – Fenômeno *snap-through* no caminho de equilíbrio de uma estrutura.



Fonte: Adaptado de Rocha (2013).

#### 4.2. Análise Não Linear Física

Com a utilização de algum critério de falha, pode-se determinar a carga de falha de uma lâmina a partir do seu estado de tensões ou deformações. Após esta carga ser atingida ocorre uma redução na rigidez na lâmina e, com isso, o laminado também perde rigidez. Como hipótese de projeto, pode-se dizer que o laminado falhou quando alguma de suas lâminas falha. Por outro lado, adotar esta hipótese pode tornar o projeto antieconômico, visto que a falha de uma lâmina não implica na perda de capacidade de carga do laminado como todo. Deste modo, a análise pode continuar, desde que se considere a perda de rigidez do

laminado, descarregando as lâminas que falharam. Esta metodologia de análise é conhecida como falha progressiva.

A falha catastrófica de uma estrutura laminada raramente acontece quando ocorre a falha da primeira lâmina. Na verdade, geralmente, a estrutura falha devido à propagação ou a acumulação de dano quando a carga é incrementada (SLEIGHT, 1999). Deste modo é necessário que se aplique um critério de falha e de propagação adequados.

A degradação da rigidez das lâminas que falharam pode ser realizada utilizando diversas abordagens (SLEIGHT, 1999, GARNICH, 2009). Além da escolha do critério, como já mencionado, deve-se decidir em que nível a degradação será feita. Segundo Garnich (2009) a degradação pode ser realizada de três formas: no nível micromecânico, com redução das constantes elásticas ou redução dos coeficientes  $Q_{ij}$ , mostrados na Eq. (11).

No *nível micromecânico*, quando uma lâmina falha, degradam-se os módulos de elasticidade da fibra e da matriz e, em seguida, se calculam as constantes elásticas  $E_i$ ,  $G_{ij}$  e  $\nu_{ij}$  utilizando a Lei das Misturas, por exemplo. No *modelo de redução das propriedades mecânicas*, os parâmetros  $E_i$ ,  $G_{ij}$  e  $\nu_{ij}$  são degradados diretamente sem a necessidade de recorrer às complicações do nível micromecânico (GARNICH, 2009). Após a degradação das propriedades, as matrizes constitutivas são recalculadas. Este é o método aplicado no presente trabalho. Finalmente, no *modelo de degradação direta dos coeficientes  $Q_{ij}$* , os termos das matrizes constitutivas do material na escala local da lamina são degradados (SPOTTSWOOD & PALAZOTTO, 2001). É importante mencionar que Garnich (2009) mostra que a aplicação deste tipo de metodologia pode levar a ganhos de rigidez espúrios em algumas propriedades mecânicas.

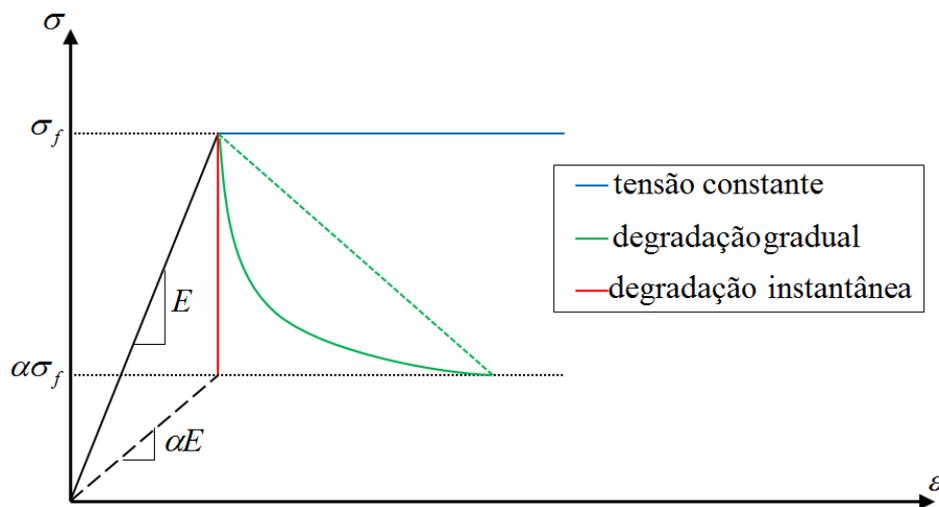
Ainda, existem diversas formas de se fazer este tipo de simulação, desde a utilização de metodologias baseadas na aplicação da Mecânica do Dano Contínuo (MIAMÍ *et al.*, 2007a; 2007b), de modo a degradar as propriedades mecânicas de forma gradual. Nestes modelos, pode-se adotar um tipo de evolução do dano dependendo do tipo de falha que ocorre na lâmina (DONADON *et al.*, 2008; 2009; YOKOYAMA *et al.*, 2010).

Esta é a metodologia utilizada no ABAQUS, por exemplo, para se levar em consideração a não linearidade física em compósitos laminados (SIMULIA, 2009). No software, um modelo de dano ortotrópico é proposto para prever o comportamento pós-falha de materiais reforçados com fibras. O critério de falha de Hashin (1980) é utilizado para

predizer o início da falha. A evolução do dano é baseada na energia de fratura dissipada durante este processo. Esta lei de evolução é uma generalização da abordagem proposta por Camanho & Dávilla (2002) para a modelagem de delaminação usando elementos de zona coesiva (LAPCZYK & HURTADO, 2007). A degradação das propriedades mecânicas é feita conforme o modelo proposto por Matzenmiller *et al.* (1995).

Existem também modelos mais simples de degradação, seja ela uma degradação à tensão constante ou degradação instantânea (REDDY *et al.*, 1995; PADHI *et al.*, 1998; PAL & RAY, 2002; PRUSTY, 2005; AKHRAS & LI, 2007), como mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Tipos de degradação utilizados em laminados.



Fonte: Adaptado de Sleight (1999).

Os modelos de degradação instantânea podem ainda ser subdivididos pelos tipos de degradação que podem ser consideradas na lâmina: *eliminação total da lâmina*, *degradação não interativa* ou *interativa* (GARNICH, 2009).

No modelo de *eliminação total da lâmina*, todas as propriedades mecânicas nos pontos onde ocorreu a falha são degradados (SCIUVA *et al.*, 1998; PAL & RAY, 2002; PRUSTY, 2005). É o método mais conservativo, dentre os supracitados. No modelo de *degradação não interativa*, propriedades isoladas são degradadas, dependendo do tipo de falha. Por exemplo, se a falha detectada em uma lâmina ocorre na matriz, apenas o módulo de elasticidade transversal  $E_2$  é degradado. Finalmente, no modelo de *degradação interativa*, utilizado no presente trabalho, várias propriedades podem ser degradadas, dependendo do tipo de falha sem, necessariamente, anular todas as propriedades da lâmina no ponto que falhou.

(REDDY *et al.*, 1995; KAM *et al.*, 1996; PADHI *et al.*, 1998; SLEIGHT, 1999; SPOTTSWOOD & PALAZOTTO, 2001). Por exemplo, pode-se adotar que  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$  são degradados quando se identifica a falha na matriz de uma lâmina.

Nos modelos de degradação à tensão constante, o material se comporta de forma similar a um elasto-plástico perfeito, de modo que, ao alcançar a tensão resistente, a lâmina não é descarregada, mas considera-se que ela suporta a carga equivalente a esta tensão até que a falha do laminado completo ocorra.

Modelos de degradação instantânea são comuns na consideração da degradação das propriedades mecânicas de uma lâmina (SLEIGHT, 1999). Nesta metodologia, uma ou várias propriedades mecânicas da lâmina podem ser degradadas nos pontos de integração onde se identificou a falha. Essa redução pode anular as propriedades mecânicas envolvidas ou reduzi-las a uma fração de seus valores originais a partir de um parâmetro  $\alpha$ , que pode ser nulo ou assumir um valor muito pequeno, de modo a evitar problemas numéricos. O fator de redução das propriedades mecânicas aplicado pode ou não ser dependente do modo de falha (SLEIGHT, 1999; KUIRASHI, 2002):

$$E_{ij}^f = \alpha E_{ij}^0 \quad (98)$$

onde  $E_{ij}^0$  e  $E_{ij}^f$  é uma propriedade mecânica qualquer antes e depois da sua degradação. A escolha das propriedades degradadas depende do modo de falha que se dará.

É importante notar que, independente do modelo de degradação adotado, quando uma lâmina falha, esta é simplesmente trocada por um material contínuo e homogêneo de menor rigidez.

Ao reduzir as propriedades elásticas, o modelo promove o descarregamento da lâmina, uma vez que para as mesmas deformações, as tensões no material degradado são muito menores que antes da falha. Estas tensões são redistribuídas para lâminas que ainda estão intactas. Com o aumento do carregamento, as tensões em outras lâminas vão aumentando e a falha vai se espalhando pela estrutura. Por conta deste fato o processo passou a ser conhecido como falha progressiva. O colapso da estrutura ocorre quando esta não for capaz de redistribuir as tensões atuantes no material que falhou.

#### 4.2.1. Modelos de Degradação do Material

Os tipos de falha progressiva aplicando uma degradação do material foram apresentados no tópico anterior. Nesta seção serão apresentadas as formas de degradação utilizadas neste trabalho para os critérios de falha abordados no item 2.3.

##### 4.2.1.1. Modelo de degradação para os critérios da Máxima Tensão, Máxima Deformação e Hashin

Nestes modelos, as propriedades mecânicas são reduzidas drasticamente após a identificação da falha. Quando ocorre a falha da matriz, a degradação das propriedades mecânicas é feita a partir de um coeficiente de redução  $\alpha$ :

$$E_2^d = \alpha E_2 \quad G_{12}^d = \alpha G_{12} \quad \nu_{12}^d = \alpha \nu_{12} \quad (99)$$

As mesmas degradações são realizadas em caso de falha por cisalhamento fibra-matriz. Por outro lado, quando a falha ocorre nas fibras, a seguinte degradação das propriedades mecânicas é realizada:

$$E_1^d = \alpha E_1 \quad G_{12}^d = \alpha G_{12} \quad \nu_{12}^d = \alpha \nu_{12} \quad (100)$$

Segundo Sleight (1999),  $\alpha = 10^{-n}$ , onde  $n$  é um número inteiro compreendido entre zero e vinte.

##### 4.2.1.2. Modelo de degradação de Engelstad. (1992)

Este modelo de degradação é baseado no proposto por Engelstad (1992) e é baseado no critério de Tsai-Wu. Contudo, como este critério é independente do modo de falha, adotam-se três variáveis a fim de avaliar a contribuição de cada componente de tensão na falha do laminado:

$$\begin{aligned} H_1 &= f_1 \sigma_1 + f_{11} \sigma_1^2 \\ H_2 &= f_2 \sigma_2 + f_{22} \sigma_2^2 \\ H_6 &= f_{66} \tau_{12}^2 \end{aligned} \quad (101)$$

O modo de falha é determinado a partir do fator de maior magnitude.

Para a falha da matriz ou por cisalhamento fibra-matriz, a degradação das propriedades mecânicas é feita a partir de um coeficiente de redução  $\alpha$ :

$$E_2^d = \alpha E_2 \quad G_{12}^d = \alpha G_{12} \quad \nu_{12}^d = \alpha \nu_{12} \quad (102)$$

Do mesmo modo, quando a falha ocorre nas fibras, a degradação das propriedades mecânicas é realizada pelo mesmo coeficiente de redução  $\alpha$ , mostrado anteriormente:

$$E_1^d = \alpha E_1 \quad E_2^d = \alpha E_2 \quad G_{12}^d = \alpha G_{12} \quad \nu_{12}^d = \alpha \nu_{12} \quad (103)$$

#### 4.2.1.3. Modelo de degradação de Kuraishi et al. (2002)

Este modelo de degradação foi proposto por Kuraishi et al. (2002) dentro do *Worldwide Failure Exercise* (WFE), tendo sido um dos critérios que apresentou os melhores resultados na comparação entre as diversas teorias de falha participantes deste exercício (SODEN et al., 2004). Este modelo é baseado no critério de falha de Tsai-Wu.

Para aplicação da degradação, este modelo define dois estados básicos para o material compósito: o *Estado Intacto* e o *Estado Degradado*. No Estado Intacto, o material possui sua resistência e rigidez inicial. No Estado Degradado, admite-se que a primeira falha corresponde à falha da matriz e a segunda falha corresponde à falha das fibras.

Após a falha, o material permanece contínuo e ocupando a mesma posição, mas tem suas propriedades elásticas reduzidas. Quando ocorre a falha da matriz, a degradação das propriedades mecânicas é feita a partir de um coeficiente de redução  $\alpha_m$ :

$$E_2^d = \alpha_m E_2 \quad G_{12}^d = \alpha_m G_{12} \quad \nu_{12}^d = \alpha_m \nu_{12} \quad (104)$$

onde o superescrito  $d$  indica que a propriedade mecânica foi degradada. Considera-se ainda uma redução da resistência à compressão das fibras, dada por:

$$F_{1C}^d = F_{1C} \left( \frac{E_2^d}{E_2} \right)^n \quad (105)$$

sendo  $n$  um fator exponencial de degradação.

Se ocorrer uma segunda falha do mesmo material, considera-se que esta corresponde à falha das fibras e as propriedades elásticas do material são degradadas utilizando um fator  $\alpha_f$ :

$$E_1^f = \alpha_f E_1 \quad E_2^f = \alpha_f E_2^d \quad G_{12}^f = \alpha_f G_{12}^d \quad \nu_{12}^f = \alpha_f \nu_{12}^d \quad (106)$$

onde o superescrito  $f$  indica a propriedade mecânica do material após a falha. Os valores dos parâmetros de degradação utilizados neste trabalho são  $\alpha_m = 0.08$ ,  $\alpha_f = 0.01$  e  $n = 0.1$  (KURAISHI *et al.*, 2002).

#### 4.2.2. Avaliação Numérica

A formulação desenvolvida nos itens anteriores pode ser utilizada tanto para materiais com comportamento linear elástico como com comportamento não linear, incluindo o modelo de falha progressiva descrito no Item 4.2.

No caso de materiais com comportamento linear a matriz constitutiva ( $\mathbf{Q}$ ) de cada lâmina é constante, do mesmo modo que a matriz constitutiva do laminado ( $\mathbf{C} = \mathbf{C}_l$ ). Assim, a matriz  $\mathbf{C}$  pode ser integrada exatamente na espessura utilizando a Eq. (18) e os esforços internos podem ser calculados diretamente utilizando a Eq. (17). Em consequência, a integração numérica é realizada apenas na superfície média da casca utilizando a quadratura de Gauss.

Por outro lado, no caso de materiais com comportamento não linear, a matriz constitutiva ( $\mathbf{Q}$ ) pode variar ao longo da lâmina (tanto na superfície quanto na espessura), à medida que o material vai falhando. Assim, os esforços internos ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e a matriz constitutiva tangente do laminado ( $\mathbf{C}_l$ ), utilizadas nas Eqs. (84), (87) e (89), devem ser integrados numericamente ao longo da espessura.

Neste trabalho, a integração ao longo da espessura é efetuada utilizando a quadratura de Lobatto com 3 pontos de integração em cada lâmina. Esta quadratura foi escolhida porque ela possui pontos nos extremos do intervalo, permitindo captar melhor o início do processo de degradação do material. Além disso, 3 pontos de Lobatto permitem integrar exatamente os esforços internos e a matriz constitutiva quando o material está no

regime elástico (i.e. antes da falha). A integração ao longo da superfície média da casca continua a ser realizada utilizando a quadratura de Gauss.

Com a matriz constitutiva  $\mathbf{C}$ , a matriz  $\mathbf{K}_T$  (Eq. (87)) é avaliada e os deslocamentos são determinados. Uma importante observação a ser feita é que a falha progressiva pode ser utilizada com ou sem a consideração da não linearidade geométrica. Caso só a falha seja considerada, a matriz  $\mathbf{K}_T$  dependerá dos deslocamentos exclusivamente devido à matriz  $\mathbf{C}$ . A partir dos deslocamentos, as tensões no sistema local de cada ponto de integração na espessura são calculadas.

Com as tensões calculadas, o critério de falha adotado é avaliado. Se uma falha for detectada, ocorre uma degradação fictícia que vale apenas durante a iteração corrente. As tensões são então calculadas novamente com as propriedades degradadas e o critério é novamente checado. Tal processo se repete até que nenhuma falha seja detectada. As tensões são então usadas para avaliar se a estrutura está em equilíbrio, verificando se o resíduo  $\mathbf{r}$  (Eq. (85)), que é a diferença entre as forças internas  $\mathbf{g}$  e cargas externas  $\mathbf{f}$ , é menor que uma tolerância pré-estabelecida. Se a estrutura não estiver em equilíbrio, correções iterativas na carga e deslocamentos obtidos na solução da equação de equilíbrio não linear (Eq. (91)) são aplicadas e a matriz  $\mathbf{C}$  é recalculada. Antes das tensões serem novamente avaliadas, o estado do material retorna ao do último ponto de equilíbrio da curva carga-deslocamento. A degradação das propriedades é realizada somente após a convergência das iterações de equilíbrio.

Este processo continua até que o número de passos estipulado seja executado ou até que a análise iterativa não atinja uma convergência por falta de rigidez do material. A Figura 19 representa o procedimento explicado nos parágrafos anteriores.

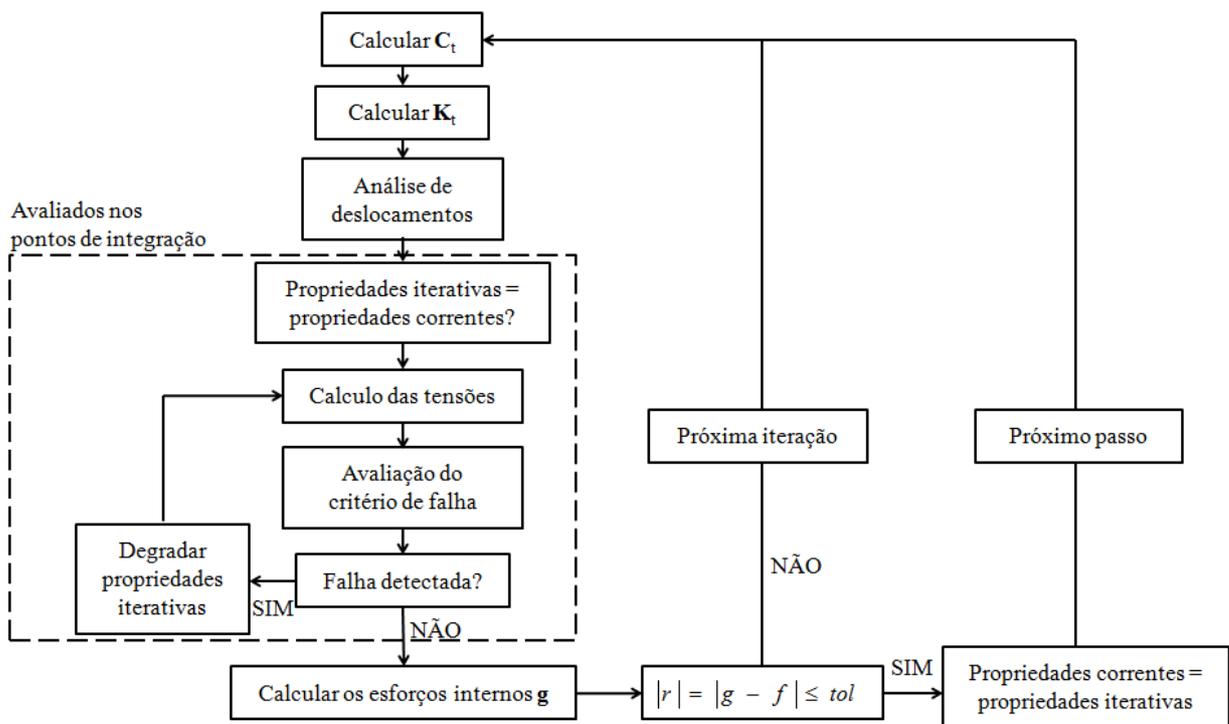
#### **4.2.3. Validação dos Modelos de Degradação**

A formulação apresentada neste trabalho foi desenvolvida no FAST (MORORÓ, 2013; ROCHA, 2013; DANTAS JUNIOR, 2014; BARROSO, 2015), que é um programa de análise de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos criado no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização da UFC. O FAST (*Finite element AnalySis Tool*) é um programa implementado em C++ que utiliza o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). O programa de Elementos Finitos foi desenvolvido inicialmente para

materiais homogêneos e depois foi estendido para o tratamento de materiais compósitos (ROCHA, 2013; DANTAS JUNIOR, 2014). Atualmente o software também comporta análises numéricas a partir da Análise Isogeométrica (BARROSO, 2015).

Neste item, serão apresentados três exemplos para a verificação dos modelos de degradação aqui apresentados: duas placas sujeitas à compressão e uma sujeita à tração. Os resultados obtidos são verificados com os determinados usando o ABAQUS (SIMULIA, 2009) e validados por resultados experimentais existentes na literatura.

Figura 19 – Processo de falha progressiva.



Fonte: Rocha (2013).

#### 4.2.3.1. Placa com furo sujeita à tração

Neste exemplo será avaliado o comportamento de uma placa longa, engastada em uma aresta e livre nas demais, com furo circular sujeita a uma tração uniforme. Para verificar a formulação apresentada, os resultados obtidos são comparados com Sleight (1999). A placa é feita de fibra de carbono T300 com resina epóxi do tipo 1034-C, cujas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 4, e tem 203.2 mm de comprimento ( $L$ ) e 25.4 mm de largura ( $b$ ). O furo circular tem 6.35 mm de diâmetro ( $d$ ) é localizado no centro da placa (ver

Figura 36). O esquema de laminação adotado foi  $[0/(\pm 45)_3/90_3]_s$  e cada lâmina tem espessura de 0.13081 mm.

Os resultados obtidos pelos modelos de degradação determinados também são comparados com o modelo de dano contínuo presente no ABAQUS (SIMULIA, 2009). São usados elementos quadráticos do tipo S8R. Utilizou-se o Método do Controle de Deslocamentos (CRISFIELD, 1991) para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura. Para cada passo da análise, um deslocamento de 0.0005 m foi aplicado ao nó central da face direita da placa, cujas coordenadas são  $(L, b/2)$ . As energias de fratura na tração ( $T$ ) e na compressão ( $C$ ) adotadas no modelo de dano contínuo do ABAQUS na direção das fibras ( $F$ ) e transversais a estas ( $M$ ) são dadas na Tabela 2 (MAIMÍ, 2006).

Tabela 1 - Propriedades mecânicas da fibra de carbono-epóxi T300/1034-C.

$E_1$ (GPa)	146.80
$E_2 = E_3$ (GPa)	11.47
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.29
$\nu_{23}$	0.45
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	6.10
$G_{23}$ (GPa)	3.80
$F_{1T}$ (MPa)	1730.00
$F_{1C}$ (MPa)	1379.00
$F_{2T} = F_{3T}$ (MPa)	66.50
$F_{2C} = F_{3C}$ (MPa)	268.20
$S_4 = S_5 = S_6$ (MPa)	58.20

Fonte: Elaborada pelo autor.

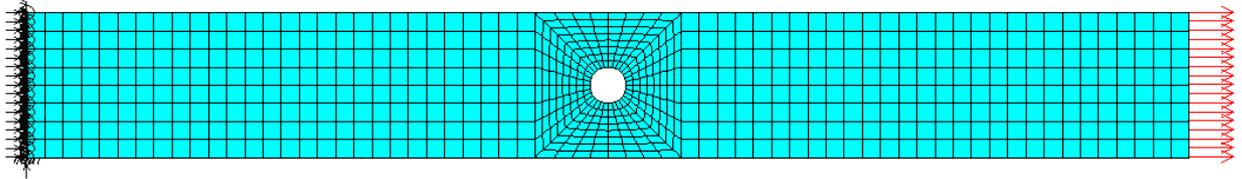
Tabela 2 – Energias de fratura associadas fibra de carbono-epóxi T300/1034-C ( $J/m^2$ ).

$G_{FT}$	$G_{FC}$	$G_{MT}$	$G_{MC}$
89830	78270	230	760

Fonte: Elaborada pelo autor.

A malha aplicada nas análises por elementos finitos tanto no FAST, quanto no ABAQUS é apresentada na Figura 20.

Figura 20 – Malha, condições de contorno e carregamento utilizados no FAST e no ABAQUS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 3 mostra os valores obtidos para as cargas referentes à Falha da Primeira Lâmina (FPF) e à carga de pico. Pode-se observar que, apesar da sua simplicidade, o modelo de degradação instantânea baseado no critério da Máxima Tensão fornece valores bem próximos aos obtidos por Sleight (1999). Os resultados obtidos pelos demais critérios também são bastante satisfatórios, exceto no caso do Critério de Hashin. Verifica-se também que os valores da carga referente à falha da primeira lâmina estão todos na mesma ordem de grandeza. Observa-se, também, uma boa concordância entre os resultados experimentais e os obtidos pelo modelo de dano contínuo presente no ABAQUS.

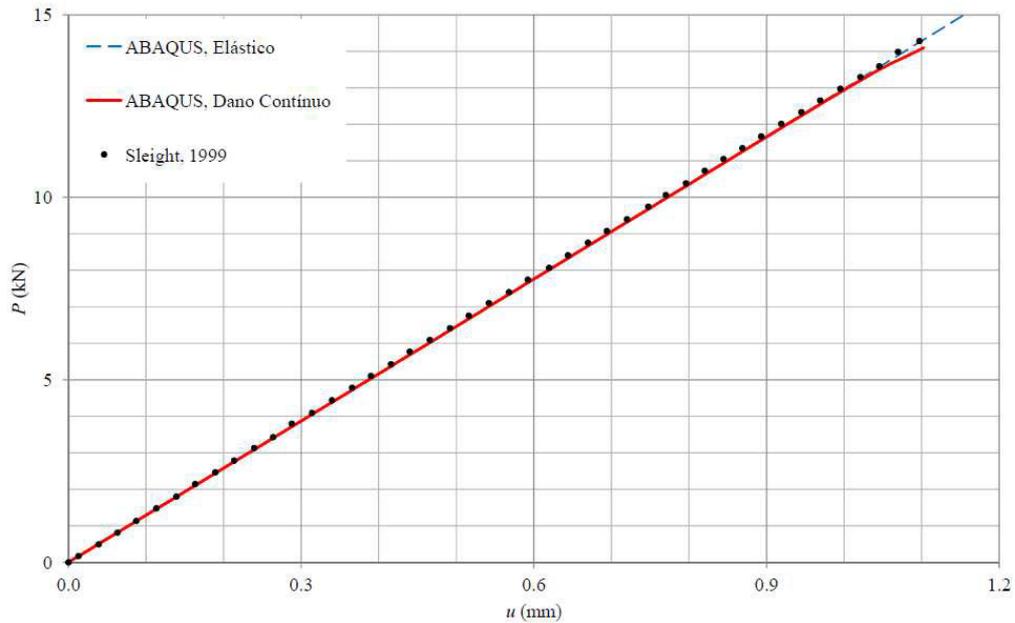
Tabela 3 – Comparação entre as cargas de ruptura da placa para diferentes critérios.

Critério	$P_{FPF}$ (kN)	$P_{max}$ (kN)	$P/P_{Sleight}$
Hashin – Sleight (1999)	-	14.2841	-
Máxima Tensão	6.6836	14.4105	1.0088
Máxima Deformação	6.4265	14.8154	1.0372
Hashin	6.4241	8.21464	0.5751
Engelstad	6.1680	14.6987	1.0290
Tsai	6.1682	13.5119	0.9459
Hashin – ABAQUS	6.1720	14.0970	0.9869

Fonte: Elaborada pelo autor.

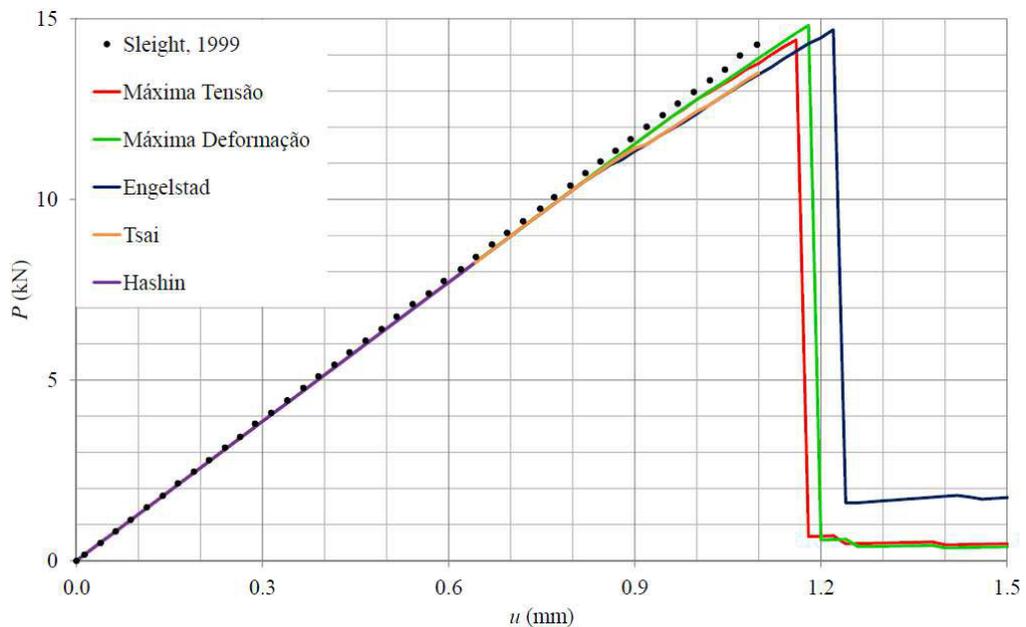
A Figura 21 mostra a curva carga-alongamento da placa analisada no ABAQUS, avaliando o comportamento linear e não linear físico da estrutura. A Figura 22 apresenta o resultado obtido em termos do alongamento da placa utilizando vários modelos de degradação instantânea. Pode-se notar que o comportamento não linear do laminado é bem representado por estes modelos, dentro das limitações de suas formulações, mas as cargas de pico determinadas estão um pouco abaixo das obtidas por Sleight (1999).

Figura 21 – Curvas carga *versus* deslocamento axial obtida pelo ABAQUS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Curvas carga *versus* deslocamento axial obtidos pelos modelos de degradação instantânea.

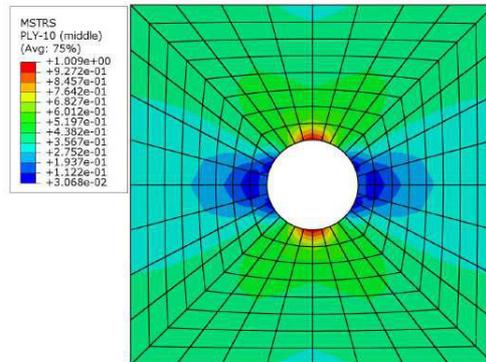


Fonte: Elaborada pelo autor.

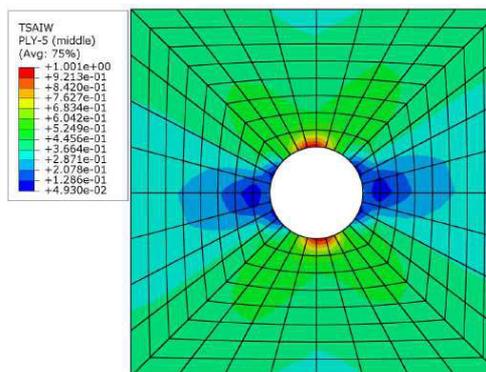
A Figura 23 mostra a lâmina, a região onde se inicia o processo de falha, juntamente com a respectiva carga ( $P_{FPF}$ ) obtida nos modelos disponíveis no ABAQUS. Esta região é identificada pelo índice de falha obtido no software. Nos trechos onde este índice é maior que a unidade se verifica que a estrutura perde a capacidade de resistir aos esforços e se

inicia a falha progressiva, redistribuindo as tensões para outras regiões do corpo até que a estrutura não suporte determinado carregamento e colapse.

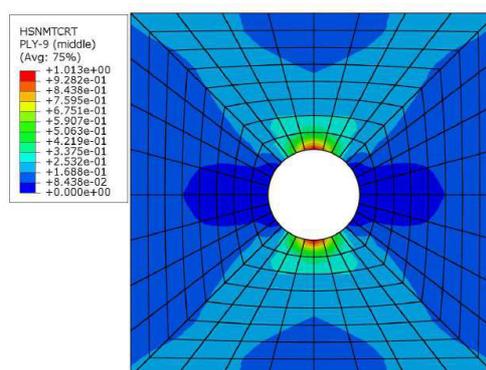
Figura 23 – Identificação dos pontos onde se inicia o processo de falha na placa tracionada.



(a) Máxima Tensão,  $P_{FPF} = 6.096$  kN.



(b) Tsai-Wu,  $P_{FPF} = 5.715$  kN.



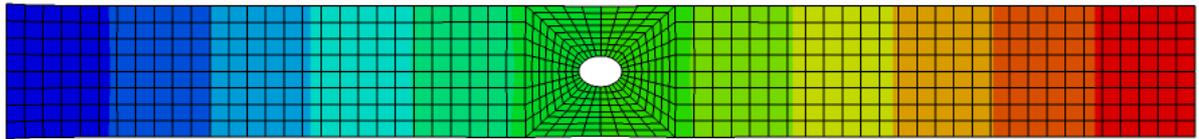
(c) Hashin,  $P_{FPF} = 6.172$  kN.

Fonte: Elaborada pelo autor.

É interessante notar que a falha inicia nos pontos de concentração de tensão e que, dependendo do critério de falha avaliado, tanto a carga, quanto a lâmina referente à falha

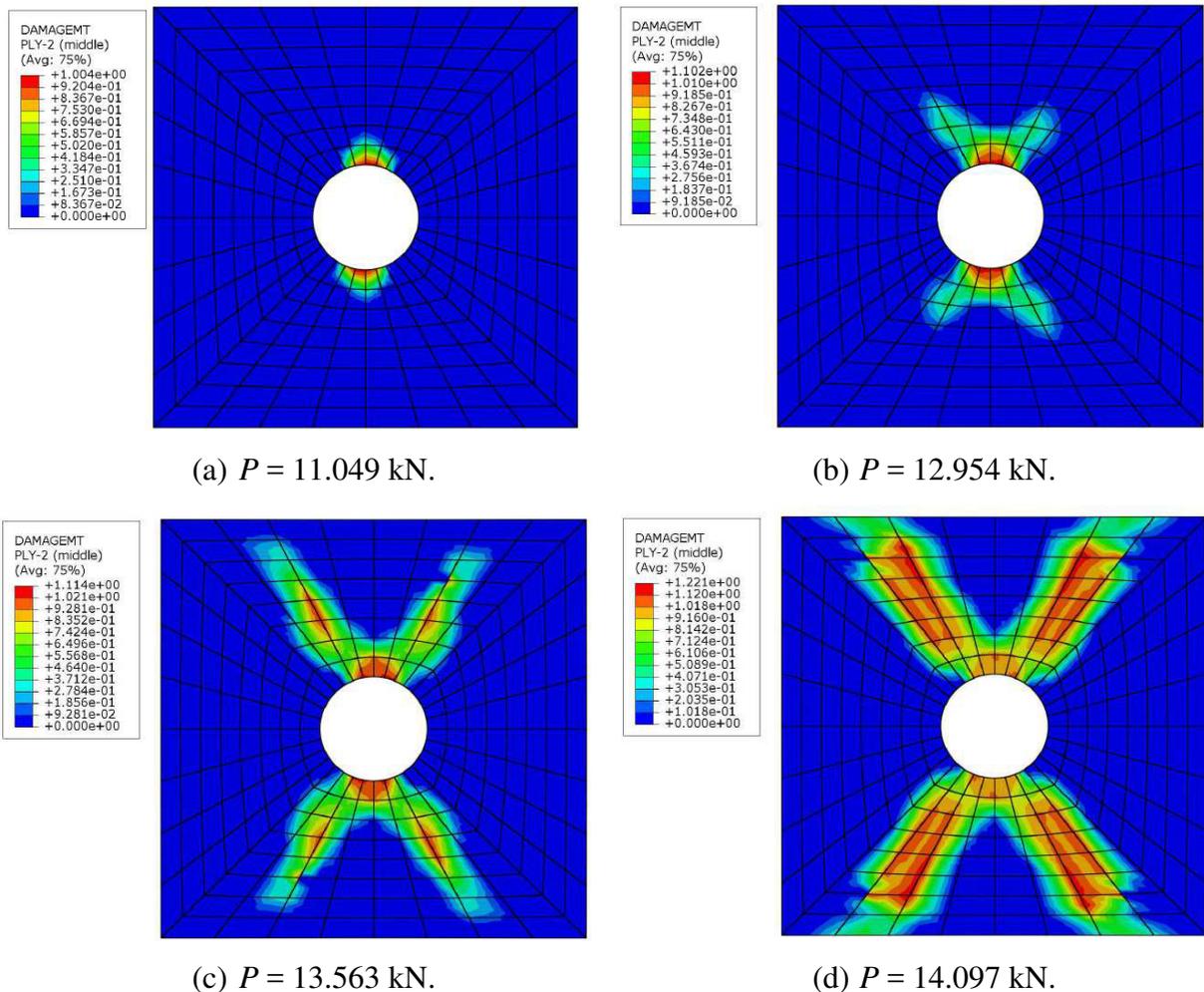
podem ser diferentes. Neste caso, observa-se que no Critério de Tsai-Wu a falha se inicia antes dos demais critérios testados. A configuração deformada da placa laminada é apresentada na Figura 24. A evolução do dano na matriz à tração é determinada no software, em uma lâmina específica, e mostrada na Figura 25. Verifica-se que a evolução do dano no elemento estrutural se dá a partir do furo, que é uma região de concentração de tensões.

Figura 24 – Diagrama de cores obtido no ABAQUS referente ao deslocamento axial na placa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Evolução do dano na matriz da lâmina 2 ( $\theta = 45^\circ$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.3.2. Placa sujeita à compressão

Neste exemplo é modelada uma placa retangular com 508 mm de comprimento ( $L$ ) e 171.45 mm de largura ( $b$ ). Os resultados obtidos são comparados com os determinados por estudos experimentais propostos por Starnes & Rouse (1981). A placa é feita de compósito de fibra de carbono T300 com resina epóxi do tipo 5208, cujas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 4. O esquema de laminação é  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/0/90]_s$  e cada lâmina tem espessura de 0.13589 mm.

Tabela 4 - Propriedades mecânicas do compósito de carbono-epóxi T300/5208.

$E_1$ (GPa)	130.40
$E_2 = E_3$ (GPa)	12.97
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.30
$\nu_{23}$	0.45
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	6.38
$G_{23}$ (GPa)	4.69
$F_{1T}$ (MPa)	1380.00
$F_{1C}$ (MPa)	1140.00
$F_{2T} = F_{3T}$ (MPa)	81.00
$F_{2C} = F_{3C}$ (MPa)	189.00
$S_4$ (MPa)	21.00
$S_5 = S_6$ (MPa)	69.00

Fonte: Elaborada pelo autor.

As condições de contorno do problema são (SLEIGHT, 1999):

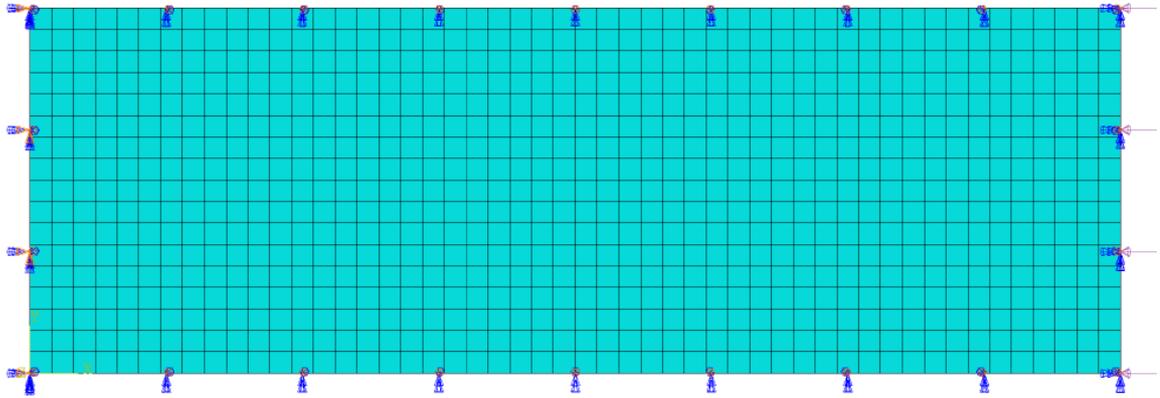
$$\begin{cases} u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0, & \text{em } x = 0 \\ w = \theta_y = 0, & \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \\ w = \theta_x = \theta_y = 0, & \text{em } x = L \end{cases} \quad (107)$$

Para o modelo isogeométrico, um estudo de convergência foi feito para a escolha da malha e do grau do polinômio. Três malhas diferentes foram analisadas, assim como polinômios do 2º, 3º e 4º grau.

A carga crítica obtida no modelo do ABAQUS (Figura 26) foi  $P_{cr} = 43.7211$  kN e o modo de flambagem associado é mostrado na Figura 27. Neste, é utilizada uma malha com

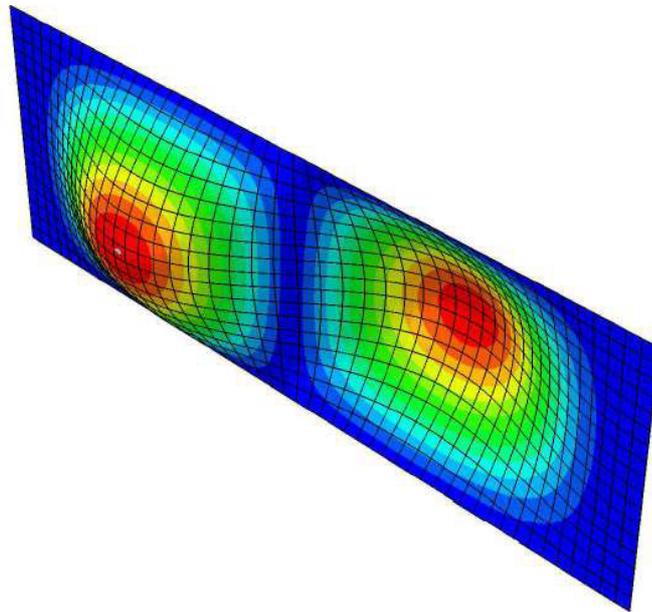
50×17 elementos quadráticos do tipo S8R. Os resultados obtidos no estudo de convergência são apresentados a seguir na Tabela 5 e na Figura 28.

Figura 26 – Malha, condições de contorno e carregamento utilizados no ABAQUS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Modo de flambagem obtido no ABAQUS.



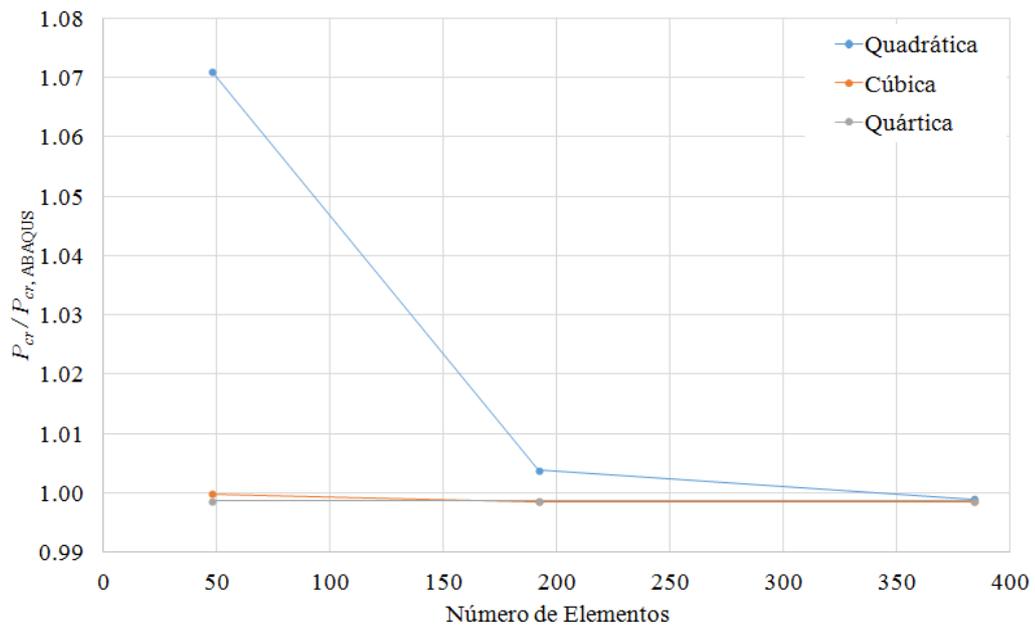
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Estudo de convergência da carga crítica da placa analisada.

Grau do Polinômio	Malha	Graus de Liberdade	$P_{cr} / P_{crABAQUS}$
2	12×4	324	1.07092
	24×8	1124	1.00379
	36×12	2404	0.99895
3	12×4	417	0.99895
	24×8	1297	0.99855
	36×12	2657	0.99852
4	12×4	520	0.99859
	24×8	1480	0.99857
	36×12	2920	0.99857

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Curva de convergência da carga crítica da placa analisada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os valores apresentados anteriormente, optou-se por fazer as análises procedentes com uma malha de 24×8 utilizando polinômios do 3º grau. Adotou-se uma imperfeição inicial de 5% da espessura do laminado no primeiro modo de flambagem nas análises não lineares. Para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura, aplicou-se o Método do Controle de Deslocamentos (CRISFIELD, 1991). Para cada passo da análise, um

deslocamento de  $-0.0005$  m foi aplicado ao nó central da face direita da placa, cujas coordenadas são  $(L, b/2)$ .

Os resultados obtidos pelos modelos de degradação obtidos também são comparados com o modelo de dano contínuo presente no ABAQUS (SIMULIA, 2009). Neste são utilizados  $50 \times 17$  elementos quadráticos do tipo S8R (Figura 26). Neste caso, utilizou-se o Método do Comprimento de Arco de Riks (CRISFIELD, 1991) para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura. A malha aplicada nas análises por Elementos Finitos é apresentada na Figura 26. As energias de fratura adotadas no modelo de dano contínuo do ABAQUS são apresentadas na Tabela 2 (MAIMÍ, 2006).

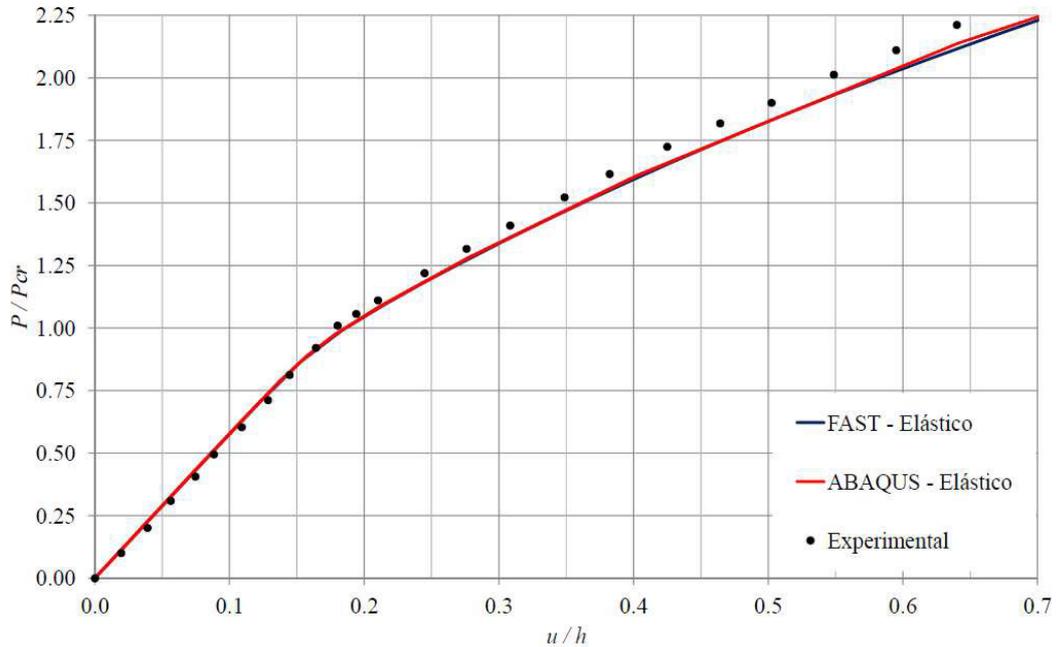
Para verificação do modelo isogeométrico, utilizou-se o ABAQUS e foram feitas análises não lineares geométricas juntamente com o FAST. O resultado desta comparação é apresentado na Figura 29. A Figura 30 apresenta o resultado obtido em termos do encurtamento da placa. Pode-se notar que o comportamento não linear do laminado é bem representado pelos modelos de degradação instantânea, mas algumas cargas de pico obtidas estão muito abaixo das determinadas experimentalmente, como, por exemplo, a proveniente do modelo de degradação de Tsai, como mostrado na Tabela 6. Em contrapartida, verifica-se uma boa concordância dos resultados experimentais com os obtidos pelo dano contínuo presente no ABAQUS.

Tabela 6 – Comparação entre as cargas de ruptura da placa para diferentes critérios.

Critério	$P_{lim}/P_{cr}$	$P_{lim}/P_{experimental}$
Experimental	2.2117	1.0000
Máxima Tensão	2.1769	0.9843
Máxima Deformação	1.3454	0.6083
Hashin	1.9908	0.9001
Engelstad	2.0434	0.9239
Tsai	1.8121	0.8193
Hashin – ABAQUS	2.5587	1.1568

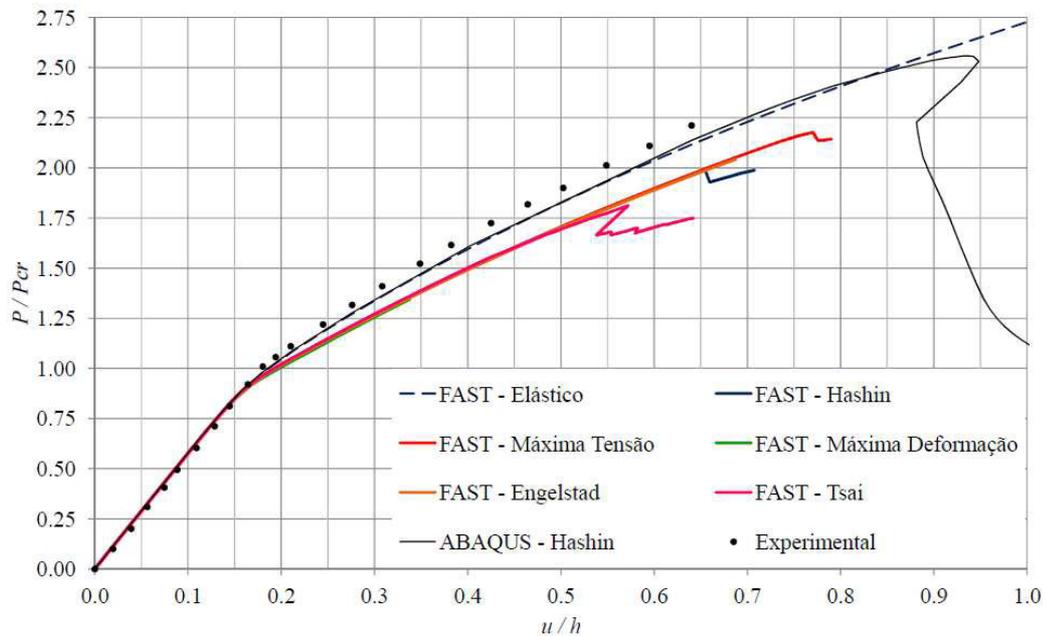
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Curva carga-deslocamento axial obtidos no ABAQUS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Curva carga-deslocamento axial para diversos critérios de falha.



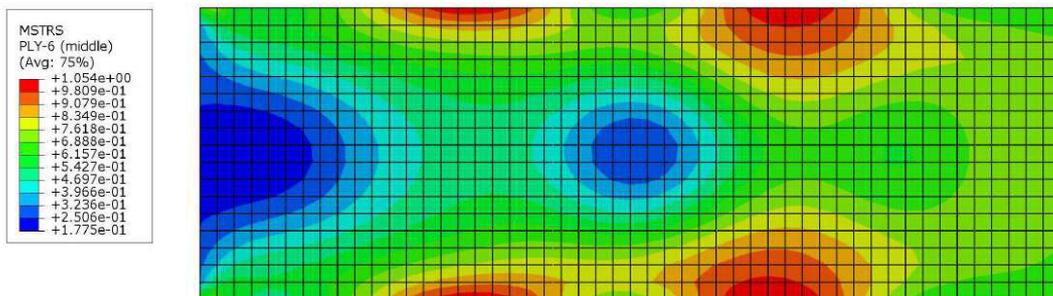
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 31 mostra a lâmina e o ponto onde se inicia o processo de falha, juntamente com a respectiva carga ( $P_{FPF}/P_{cr}$ ) obtida nos modelos disponíveis no ABAQUS. Observa-se, neste caso, que o processo de falha no Critério de Hashin se inicia para uma carga

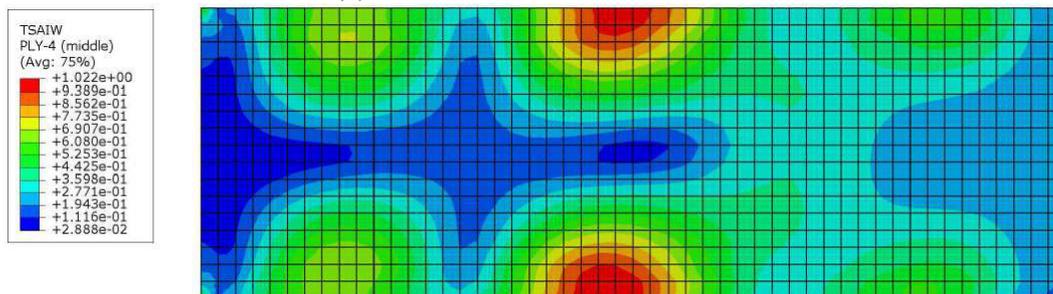
67% maior, em comparação com os resultados obtidos com o Critério da Máxima Tensão e o Critério de Tsai-Wu.

Nota-se também que, apesar das cargas  $P_{FPF}$  serem iguais no Critério da Máxima Tensão e no Critério de Tsai-Wu, a lâmina onde se inicia o processo de degradação da placa é diferente.

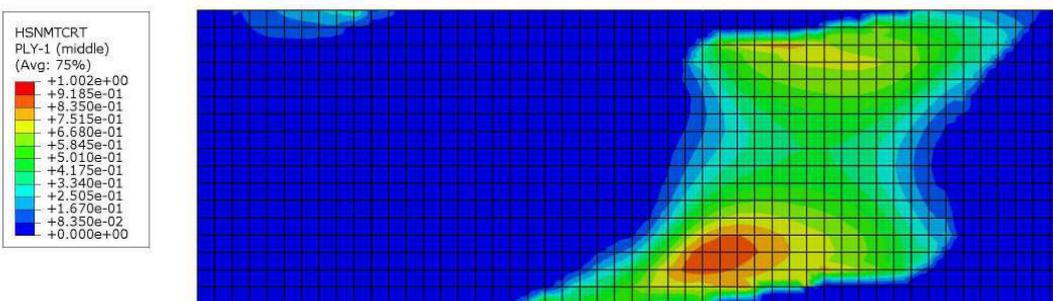
Figura 31 – Identificação dos pontos de início do processo de falha progressiva na placa retangular.



(a) Máxima Tensão,  $P/P_{cr} = 1.280$ .



(b) Tsai-Wu,  $P/P_{cr} = 1.280$ .

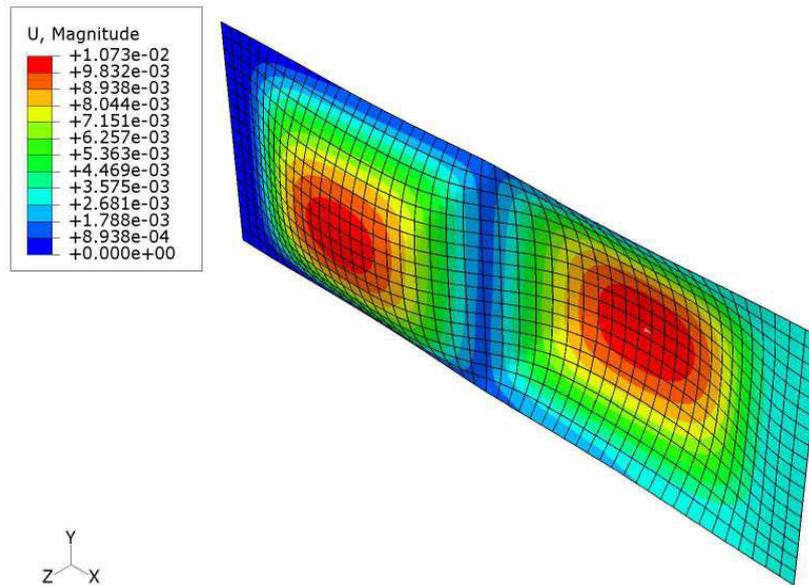


(c) Hashin,  $P/P_{cr} = 2.138$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

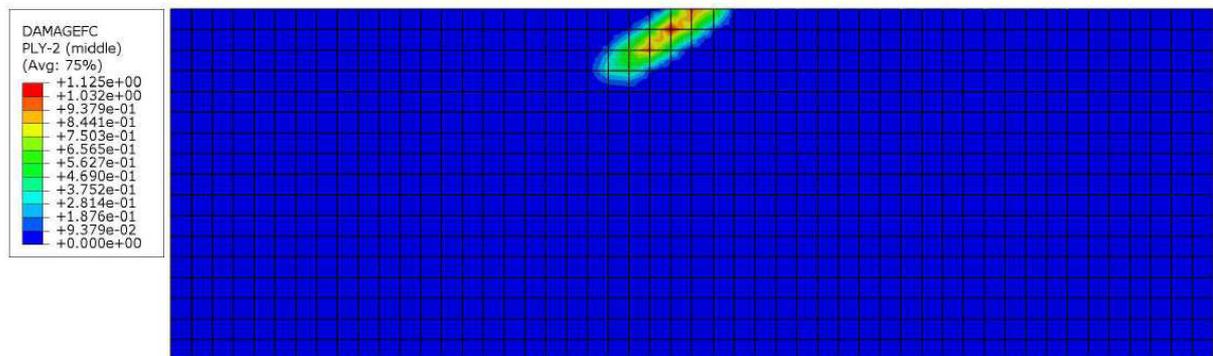
A Figura 32 e a Figura 33 apresentam, respectivamente, a configuração deformada e a região danificada da placa obtida pelo ABAQUS antes da perda de estabilidade apresentada na Figura 30.

Figura 32 – Deformada da placa sujeita à compressão axial.

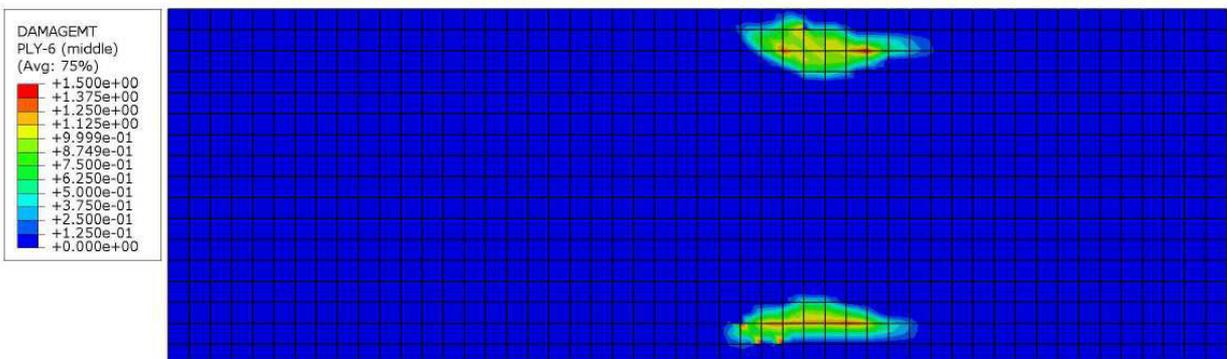


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Região danificada no instante da perda de estabilidade da placa.



(a) Dano na fibra à compressão ( $\theta = -45^\circ$ ).



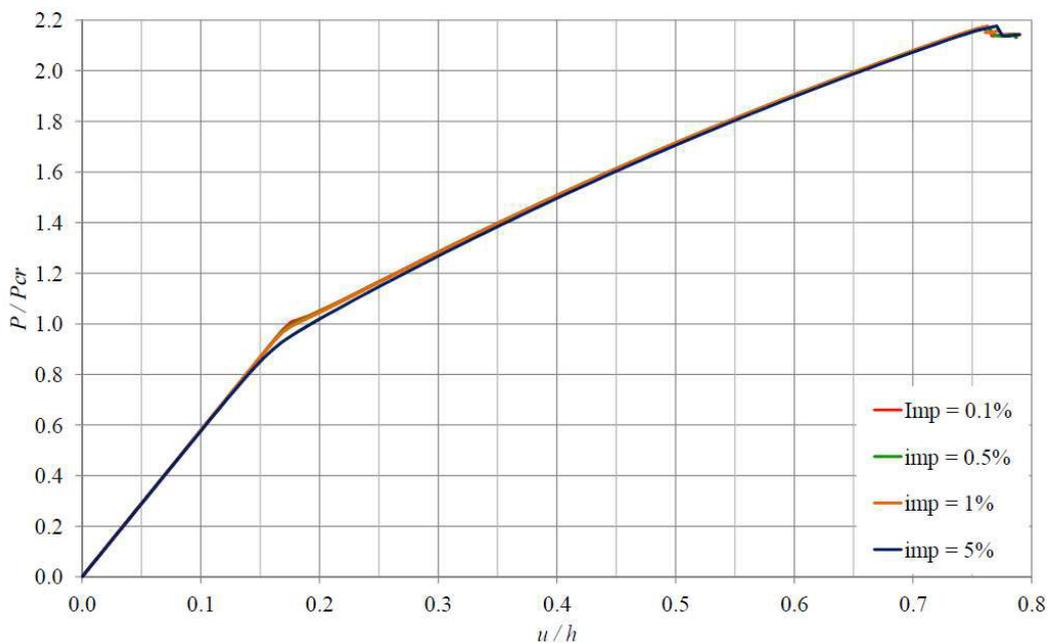
(b) Dano na matriz à tração ( $\theta = -45^\circ$ ).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste exemplo foi feito também um estudo acerca da influência das imperfeições iniciais no comportamento pós-crítico da estrutura. Para isto, foram feitas análises de placas com imperfeições de 0.01%, 0.5%, 1% e 5% no valor da espessura do laminado. A Figura 34 e a Figura 35 mostram os resultados obtidos para este estudo, usando o Critério da Máxima Tensão, que foi o que apontou uma carga de pico mais próxima dos resultados experimentais e o Critério de Tsai com o modelo de degradação de Kuirashi *et al.* (2002), que será amplamente empregado no decorrer deste trabalho.

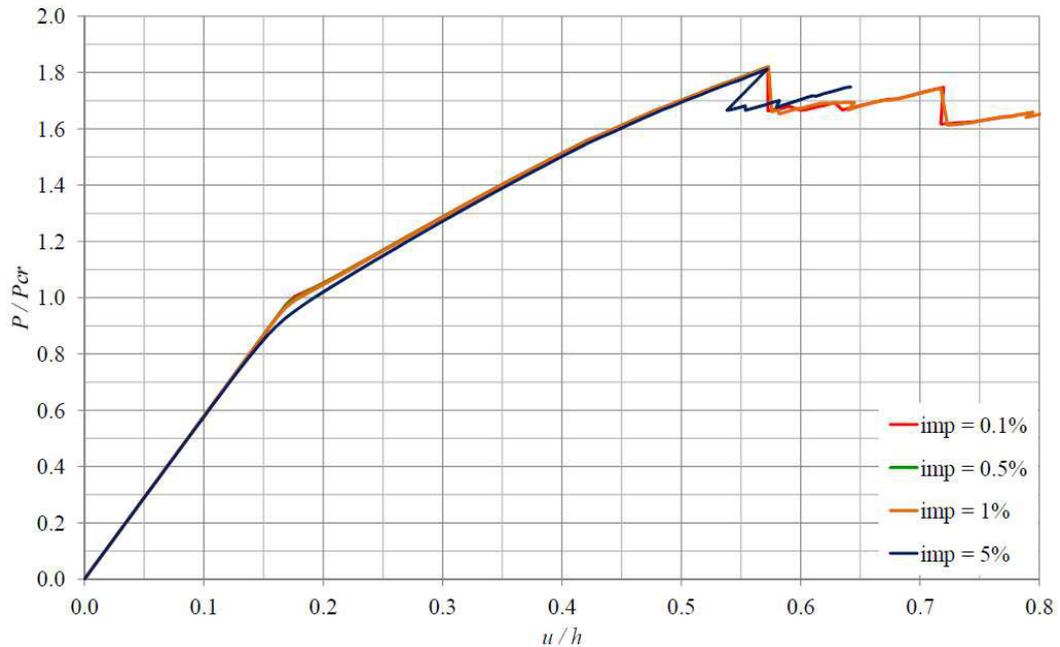
Percebe-se que as imperfeições iniciais geram efeitos consideráveis para cargas próximas ao carregamento crítico e, nestes casos, quanto maior o nível de imperfeição da placa, maior a deformação desta quando  $N/N_{cr} = 1$ . Por outro lado, nota-se que para níveis de carregamento superior à carga crítica, as curvas convergem e apresentam praticamente a mesma carga de ruptura.

Figura 34 – Efeito das imperfeições iniciais na curva carga-deslocamento da placa aplicando o modelo de degradação baseado no Critério da Máxima Tensão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Efeito das imperfeições iniciais na curva carga-deslocamento da placa aplicando o modelo de degradação de Kuirashi *et al.* (2002).



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.3.3. Placa com furo sujeita à compressão

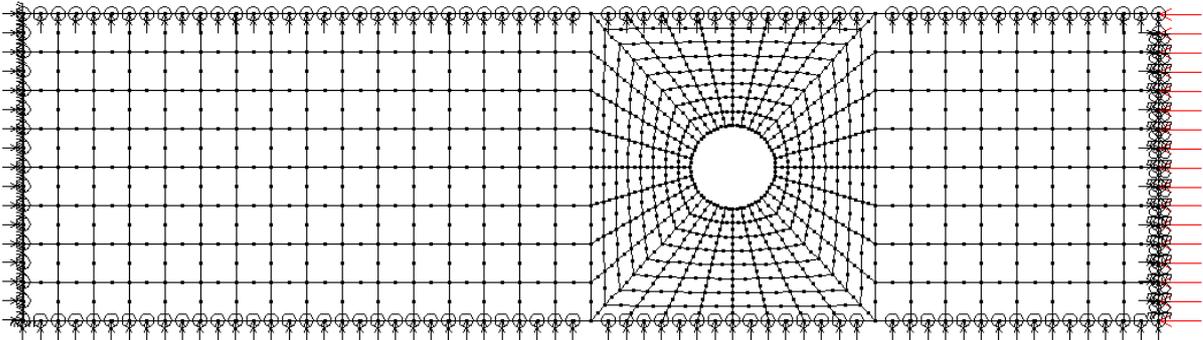
Neste exemplo será avaliado o comportamento de uma placa longa com furo circular sujeita a uma compressão uniforme em uma de suas faces. Para validar e verificar a formulação aqui apresentada, os resultados são comparados com estudos experimentais propostos por Starnes & Rouse (1981). A placa é feita de fibra de carbono T300 com resina epóxi 5208, cujas propriedades mecânicas foram apresentadas na Tabela 4, e tem 508 mm de comprimento ( $L$ ) e 139.7 mm de largura ( $b$ ). O furo circular de 19.05 mm de diâmetro ( $d$ ) é localizado a 190.5 mm de distância do ponto de aplicação da carga (ver Figura 36). O esquema de laminação é  $[\pm 45/0/90/\pm 45/0/90/\pm 45/0/90]_s$  e cada lâmina tem espessura de 0.145796 mm.

As condições de contorno do problema são (SLEIGHT, 1999):

$$\begin{cases} u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0, & \text{em } x = 0 \\ w = \theta_y = 0, & \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \\ v = w = \theta_x = \theta_y = 0, & \text{em } x = L \end{cases} \quad (108)$$

A malha aplicada nas análises é apresentada na Figura 36. A carga crítica obtida pelo ABAQUS foi  $P_{cr} = 62.5562$  kN e o modo de flambagem é apresentado na Figura 37.

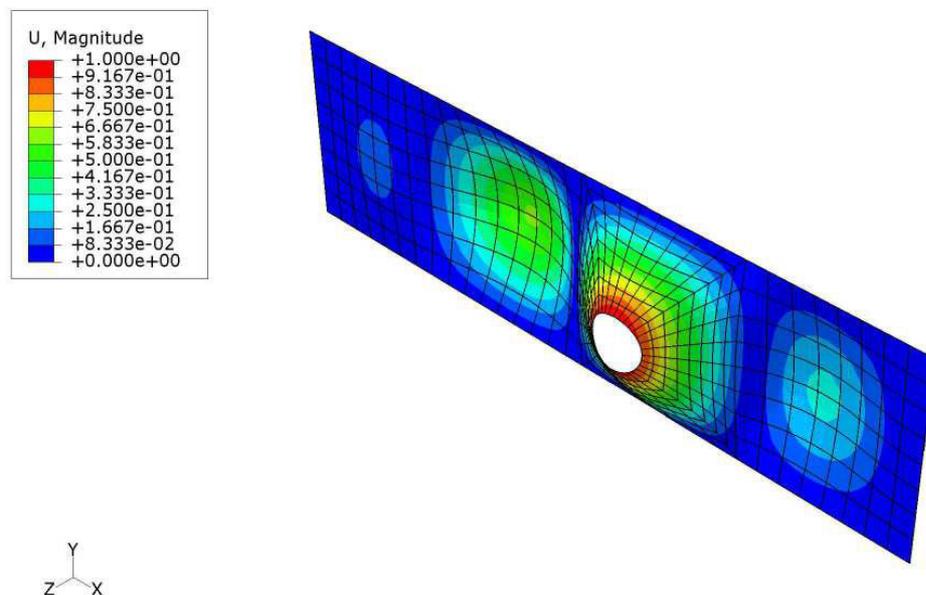
Figura 36 – Discretização, condições de contorno e carregamento utilizados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Adotou-se uma imperfeição inicial de 5% da espessura do laminado no primeiro modo de flambagem nas análises não lineares. Para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura, aplicou-se o Método do Controle de Deslocamentos (CRISFIELD, 1991). Para cada passo da análise, um deslocamento de -0.001 m foi aplicado ao nó central da face direita da placa, cujas coordenadas são  $(L, b/2)$ .

Figura 37 – Modo de flambagem da placa com furo sujeita à compressão axial.

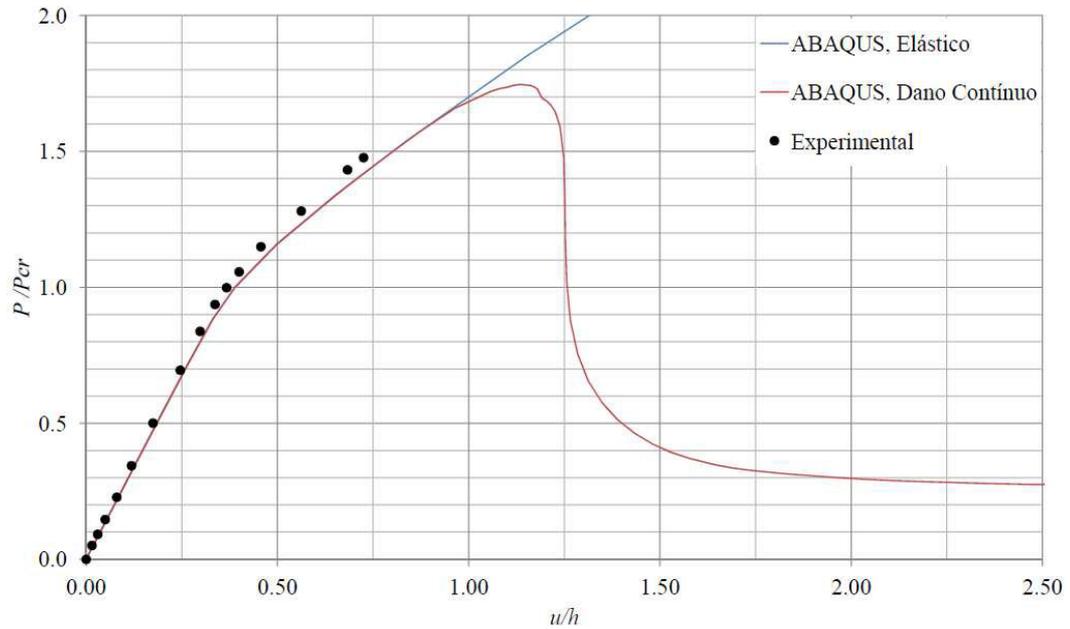


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos pelos modelos de degradação aqui apresentados também são comparados com o modelo de dano contínuo presente no ABAQUS (SIMULIA, 2009). Neste são utilizados elementos quadráticos do tipo S8R. Neste caso, utilizou-se o Método do Comprimento de Arco de Riks (CRISFIELD, 1991) para determinação do caminho de equilíbrio da estrutura.

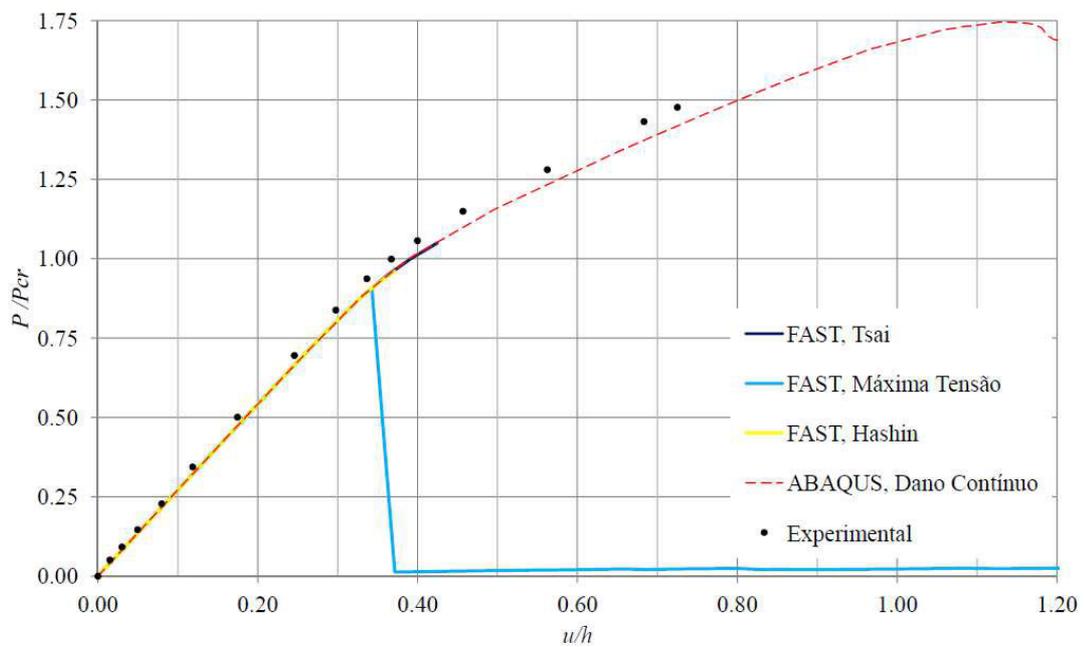
A Figura 38 apresenta as curvas carga-encurtamento obtidas pelo ABAQUS com o Modelo de Dano Contínuo e a Figura 39 apresenta uma comparação entre os resultados determinados pelos Modelos de Degradação Instantânea.

Figura 38 – Curva carga-encurtamento obtidos pelo ABAQUS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 39 – Curva carga-encurtamento obtidos pelos modelos de degradação instantânea.



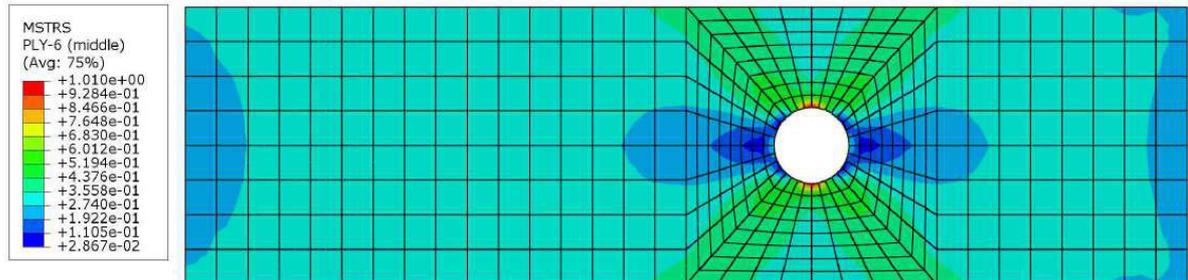
Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se notar que o comportamento não linear do laminado é bem representado pelos modelos de degradação instantânea no início das curvas carga-deslocamento, mas as cargas de pico determinadas estão muito abaixo das obtidas experimentalmente. Em contrapartida, verifica-se uma boa concordância dos resultados experimentais com os obtidos pelo dano contínuo presente no ABAQUS.

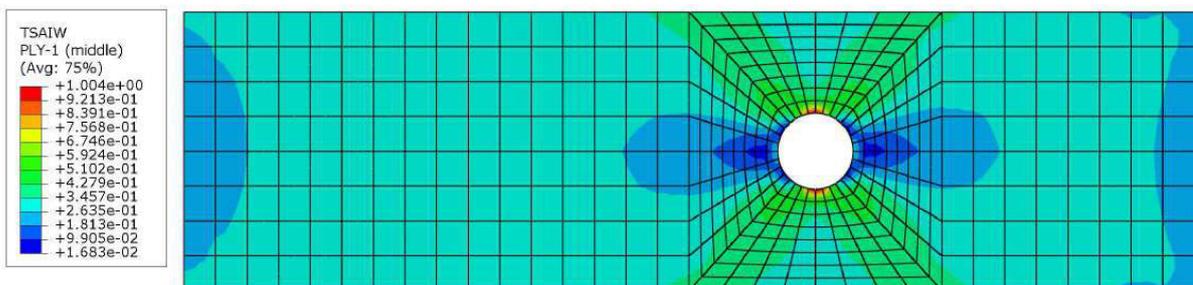
A discrepância entre os resultados obtidos nos modelos de degradação instantânea podem ser devido à degradação brusca das propriedades mecânicas, enquanto em um modelo de dano contínuo, como o do ABAQUS, tem-se um modelo de progressão de dano diferente para cada tipo de falha.

A Figura 40 mostra a lâmina e o ponto onde se inicia o processo de falha, de acordo com os modelos de falha disponíveis no ABAQUS. Observa-se que, de modo semelhante ao modelo da placa tracionada, o início da falha e a sua propagação decorrem da concentração de tensões desenvolvidas em torno do furo da placa.

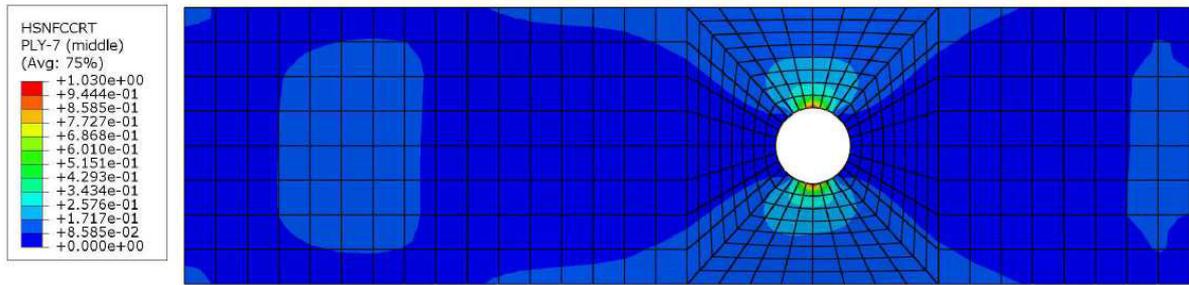
Figura 40 – Identificação dos pontos de início do processo de falha progressiva na placa retangular.



(a) Máxima Tensão



(b) Tsai-Wu

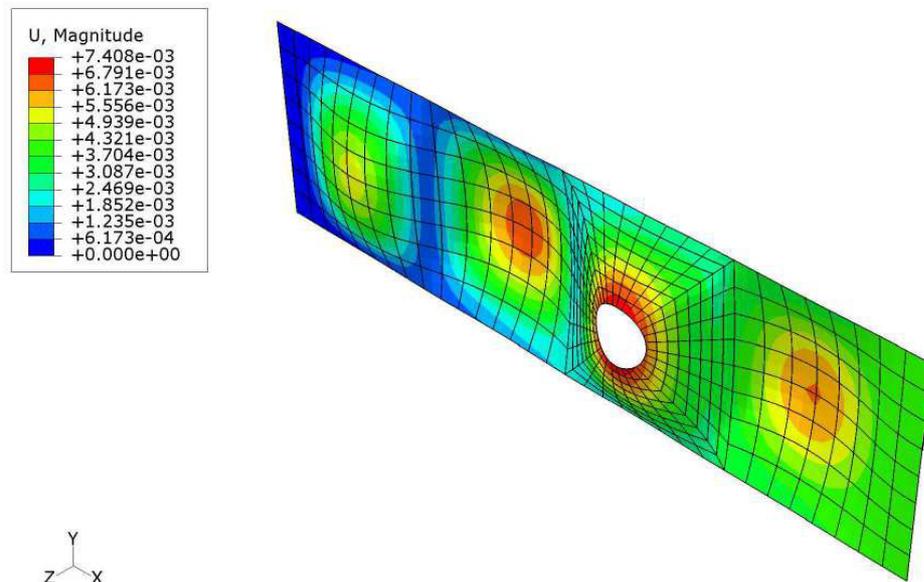


(c) Hashin

Fonte: Elaborada pelo autor.

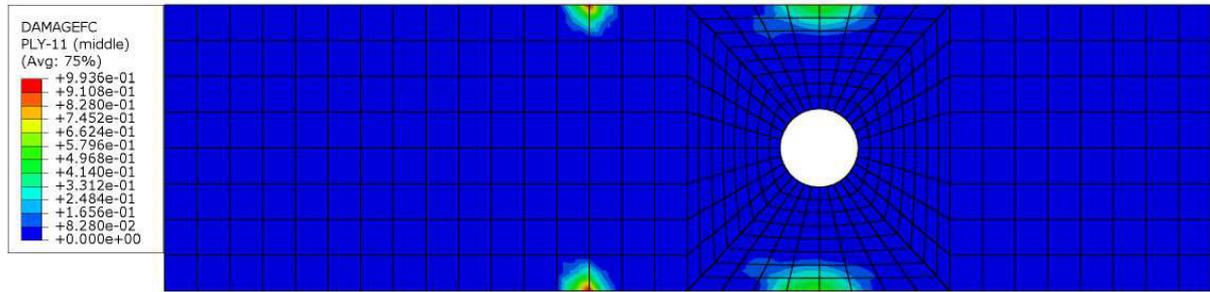
A Figura 41 e a Figura 42 apresentam, respectivamente, a configuração deformada e a região danificada da placa obtida pelo software no instante da perda de estabilidade da estrutura. É interessante notar que, apesar do início da degradação ocorrer em torno do furo, a região com maior degradação ocorre nas bordas da região central da peça, onde os deslocamentos mudam de sinal.

Figura 41 – Configuração deformada obtida pelo ABAQUS.

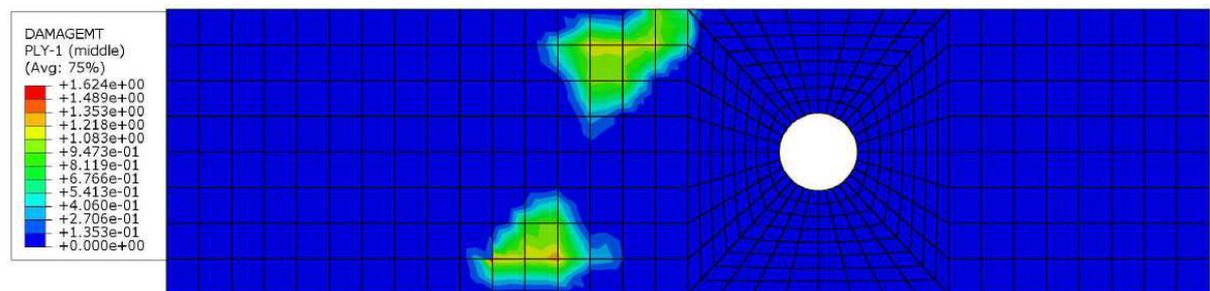


Fonte: Elaborada pelo autor.

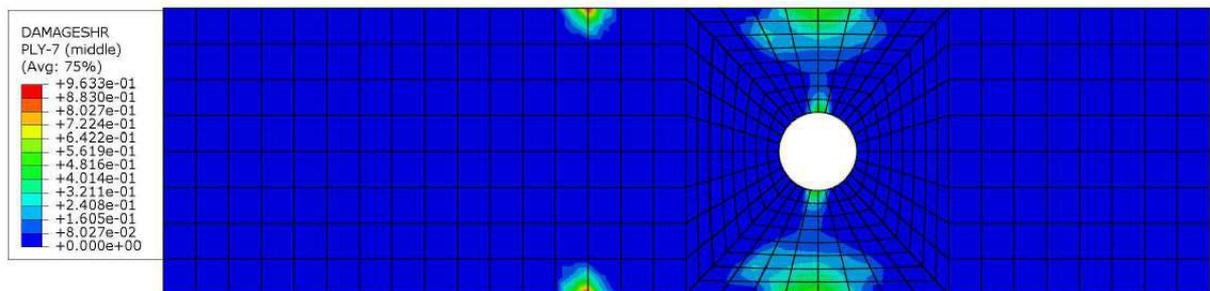
Figura 42 – Região danificada no instante da perda de estabilidade da placa para vários modos de falha.



(a) Dano nas fibras à compressão da lâmina 11 ( $\theta = 0^\circ$ ).



(b) Dano na matriz à tração da lâmina 1 ( $\theta = 45^\circ$ ).



(c) Dano por cisalhamento da lâmina 7 ( $\theta = 0^\circ$ ).

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A seguir serão apresentados exemplos de análise de placas e cascas homogêneas e laminadas, com objetivo de validar a formulação apresentada e de estudar o efeito da degradação do material sobre a capacidade de carga da estrutura.

### 5.1. Carga Crítica de Placas Quadradas Simplesmente Apoiadas

O primeiro exemplo trata da análise do efeito dos acoplamentos gerados na carga crítica de uma placa quadrada, de lado  $a = 10$ , simplesmente apoiada e sujeita à compressão uniaxial, a partir da escolha do tipo de laminação. É feita a avaliação do efeito dos acoplamentos gerados pelos componentes da matriz  $\mathbf{C}$  (Eq. (17)) na carga crítica da placa, à medida que o número de lâminas da estrutura aumenta. Serão avaliadas laminadas do tipo *cross-ply* e *angle-ply*. Em ambos os casos, analisa-se o efeito da consideração da simetria ou antissimetria nos laminados. A espessura  $h$  da estrutura também é variada e o seu efeito também é discutido.

Jones (1999) apresenta um estudo onde é utilizada a Teoria Clássica da Laminação (TCL) em laminados com relação lado/espessura igual a 50. Neste trabalho foram utilizadas relações lado/espessura igual a 30, 50, 100, 500 e 1000 aplicando a Teoria de Reissner-Mindlin, de modo que a perda de capacidade de carga da estrutura devido ao efeito do cisalhamento transversal seja captada. Nestas análises, para cada relação lado/espessura, a espessura total da placa é mantida e o efeito do aumento do número de lâminas na carga crítica é avaliado. É importante mencionar laminados com relação  $a/h = 500$  e  $a/h = 1000$  não têm aplicações práticas, sendo estudados neste trabalho apenas para avaliar o travamento em cisalhamento (*shear locking*) à medida que se aumenta o grau do polinômio interpolador nos elementos isogeométricos.

O material utilizado tem as seguintes propriedades mecânicas  $E_1 = 3 \times 10^6$  psi,  $E_1/E_2 = 25$ ,  $G_{12} = 0.50E_2$  e  $\nu_{12} = 0.25$ . Nos laminados *angle-ply*, os estudos foram feitos somente para as razões  $a/h = 30$  e  $a/h = 50$ .

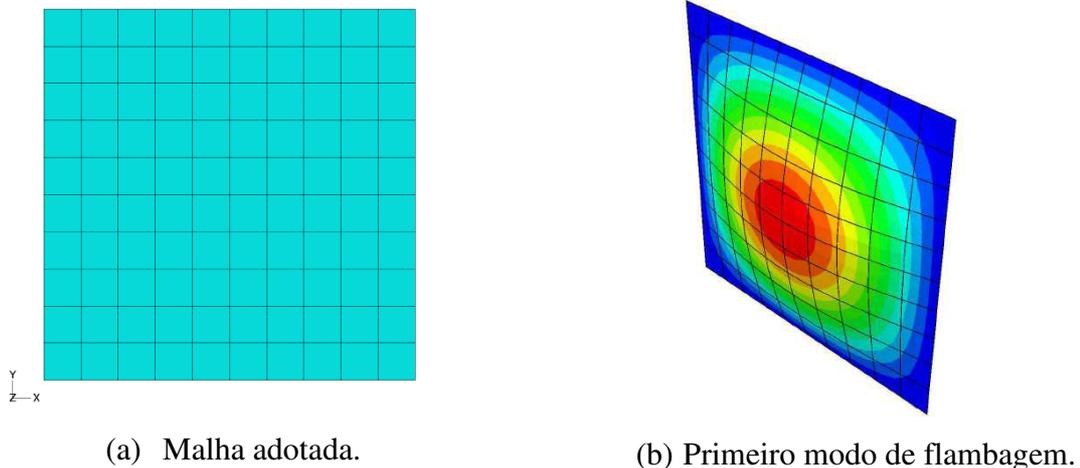
Nas análises, utilizou-se tanto a Análise Isogeométrica, por meio do FAST, quanto o Método dos Elementos Finitos, pelo ABAQUS. Um estudo de convergência foi feito para se estimar a malha necessária nas análises subsequentes. Neste estudo utilizou-se uma

laminação  $[0/90]_s$ . Também foi avaliado como o grau do polinômio interpolador influencia nos resultados obtidos.

No ABAQUS foi adotada uma malha de  $10 \times 10$ , totalizando 100 elementos (Figura 43). O elemento utilizado é de casca com 8 nós e integração reduzida (S8R). As condições de contorno utilizadas são:

$$\begin{cases} u = w = \theta_x = 0, & x = 0 \\ w = \theta_x = 0, & x = a \\ w = \theta_y = 0, & y = 0, a \end{cases} \quad (109)$$

Figura 43 – Malha adotada e primeiro modo de flambagem da estrutura analisada.



(a) Malha adotada.

(b) Primeiro modo de flambagem.

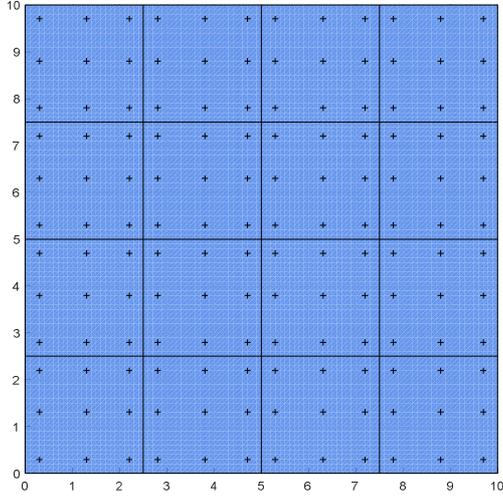
Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi avaliado também o efeito do tipo de integração na análise isogeométrica. Para isto, foi utilizada a integração completa, que segue a mesma filosofia da utilizada em Elementos Finitos e a metodologia de integração reduzida proposta por Adam *et al.* (2014, 2015) em vigas, placas e cascas sujeitas à flexão.

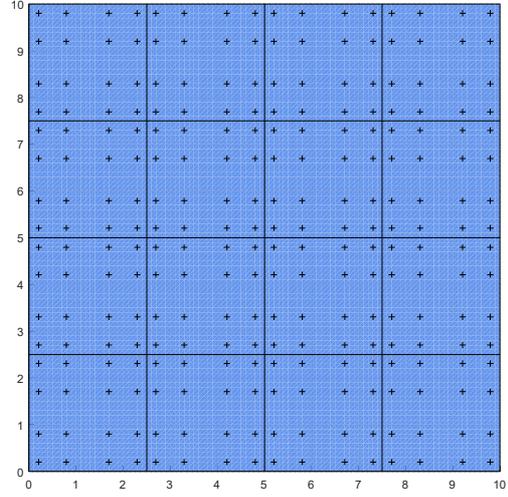
Adam *et al.* (2014, 2015) apresentada uma metodologia aplicável para diferentes ordens de interpolação e válida para continuidade  $C^0$  à  $C^{p-1}$ . Entretanto, neste trabalho se limitará a apresentação e aplicação de polinômios interpoladores quadráticos, cúbicos, quárticos e quánticos com continuidade  $C^{p-1}$ .

A Figura 44 e a Figura 45 mostram como é feita a integração completa e a reduzida em uma placa quadrada de aresta igual a 10 com 16 elementos para as diversas ordens de interpolação usada no *knot span*.

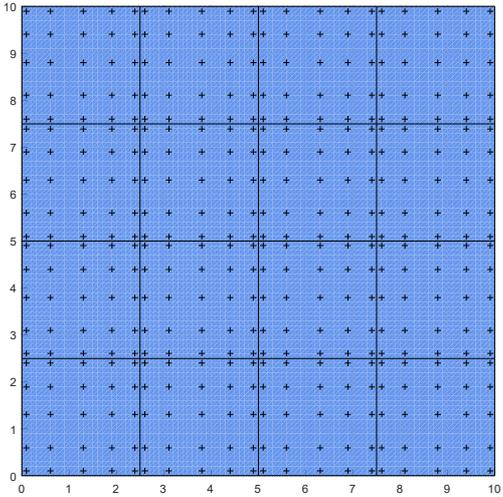
Figura 44 – Pontos de integração em uma placa quadrada com diversas ordens de interpolação e integração completa.



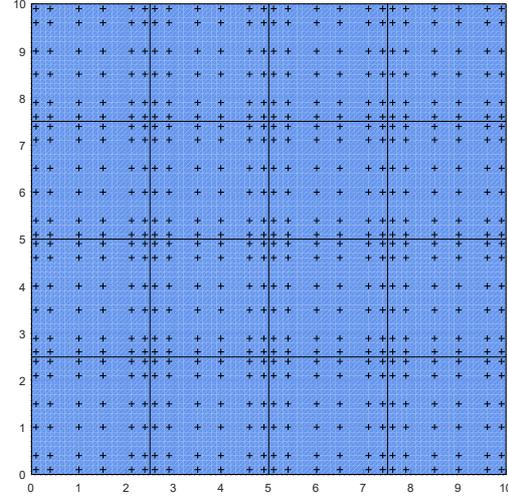
(a) Polinômios quadráticos.



(b) Polinômios cúbicos.



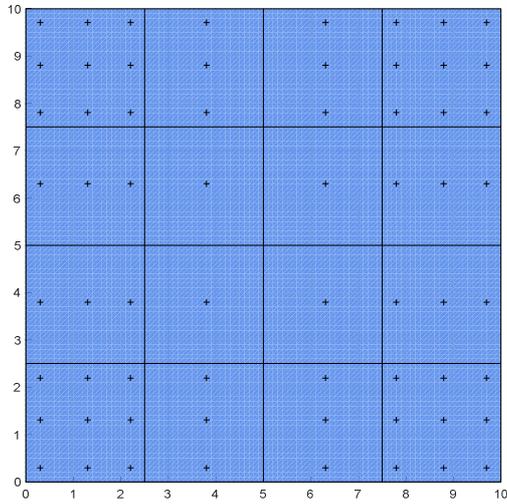
(c) Polinômios quárticos.



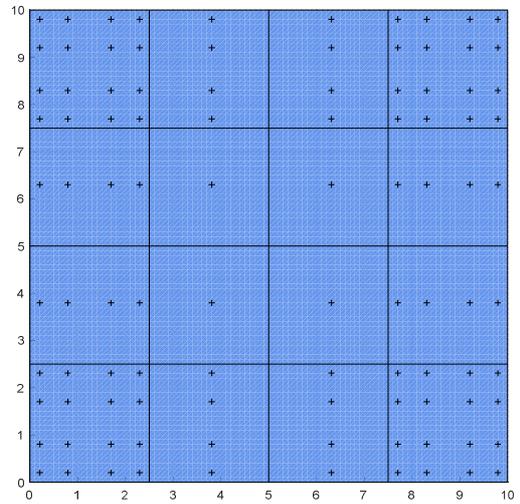
(d) Polinômios quánticos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

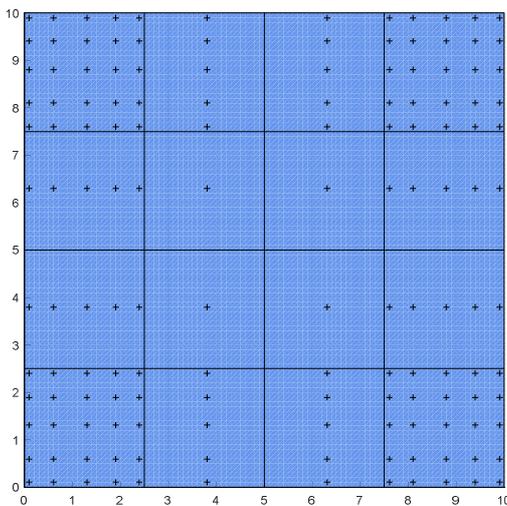
Figura 45 – Pontos de Gauss em uma placa quadrada com diversas ordens de interpolação e integração reduzida.



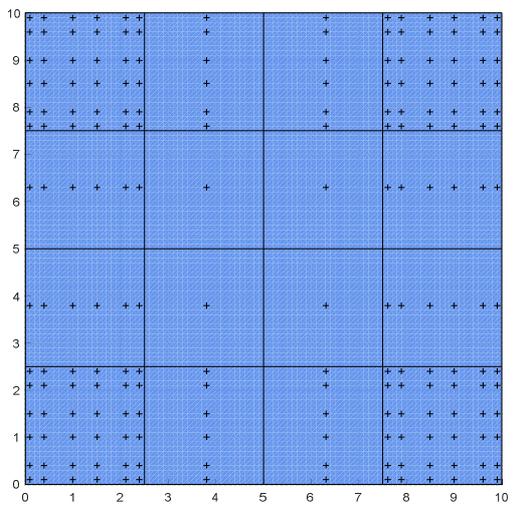
(a) Polinômios quadráticos.



(b) Polinômios cúbicos.



(c) Polinômios quárticos.



(d) Polinômios quánticos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos pelo MEF no ABAQUS para as relações lado/espessura são mostrados na Tabela 7. Utilizou-se como carga de referência ( $N_{ref}$ ) a carga crítica obtida pela Teoria Clássica da Laminação (REDDY, 2004):

$$N_{ref} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 D_{22} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} m^2 + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} + \frac{1}{m^2} \right] \quad (110)$$

onde  $m$  vem da aproximação da configuração deformada da placa por curvas formadas por senos e este representa o número de meias ondas formadas na direção  $x$ .

Tabela 7 – Valores das cargas críticas obtidas no ABAQUS para as relações lado/espessura consideradas.

$a/h$	$N_{cr}$	$N_{cr}/N_{ref}$
30	1000.8000	0.9584
50	222.0800	0.9846
100	28.0850	0.9961
500	0.2255	0.9999
1000	0.0282	1.0000

Fonte: Elaborada pelo autor.

A normalização da carga crítica é feita a partir da carga de referência  $N_{ref}$  para se mostrar como o efeito do cisalhamento vai se tornando mais importante, à medida que a espessura do laminado aumenta.

Dos resultados obtidos pelo ABAQUS, verifica-se que, à medida que a espessura do laminado diminui, o efeito do cisalhamento transversal também se reduz, com a carga de flambagem obtida por Reissner-Mindlin convergindo para a solução da TCL. No laminado com relação  $a/h = 30$ , a perda de capacidade de carga devido ao cisalhamento transversal é de aproximadamente 4%, enquanto para laminados finos ( $a/h = 50$  ou  $a/h = 100$ ) a carga crítica é reduzida em menos de 2% do valor obtido da teoria clássica.

Da Tabela 8 à Tabela 12 são apresentados os resultados do estudo de convergência da carga crítica obtidos pela Análise Isogeométrica feita no FAST para as relações  $a/h$  avaliadas neste problema. Na sequência, na Figura 46 à Figura 50, são plotadas curvas mostrando graficamente a convergência da carga crítica da estrutura.

Pode-se observar que os resultados obtidos pela AIG são mais precisos para uma malha com 10 divisões, em comparação com os calculados pelo MEF com a mesma discretização no caso das placas com relação  $a/h = 30$  e  $a/h = 50$ , uma vez que, por definição, a carga crítica da estrutura é o menor autovalor obtido em uma análise de flambagem.

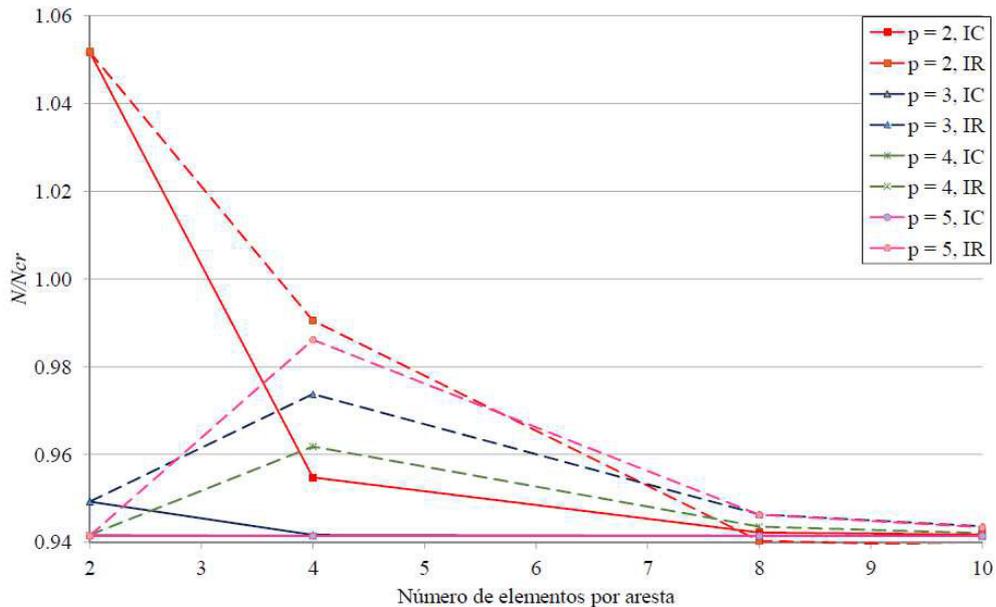
Entretanto, para a placa com relação lado/espessura igual a 1000, percebe-se que o efeito do *locking* é muito forte e os resultados obtidos pelo ABAQUS são mais precisos.

Tabela 8 – Estudo de convergência para as placas com relação  $a/h = 30$ .

Grau do Polinômio	Número de divisões	Graus de liberdade	Integração Completa		Integração Reduzida	
			$N_{cr}$	$N_{ref}$	$N_{cr}$	$N_{ref}$
2	2	48	1098.225	1.052	1098.23	1.052
	4	130	996.980	0.955	1034.31	0.991
	8	414	983.866	0.942	981.89	0.940
	10	616	983.382	0.942	980.60	0.939
3	2	84	991.211	0.949	991.21	0.949
	4	186	983.306	0.942	1016.80	0.974
	8	510	983.059	0.941	988.18	0.946
	10	732	983.056	0.941	985.33	0.944
4	2	130	983.249	0.942	983.25	0.942
	4	252	983.058	0.941	1004.32	0.962
	8	616	983.059	0.941	985.26	0.944
	10	858	983.059	0.941	983.72	0.942
5	2	186	983.060	0.941	983.06	0.941
	4	328	983.058	0.941	1029.73	0.986
	8	732	983.060	0.941	988.12	0.946
	10	994	983.053	0.941	985.13	0.943

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação  $a/h = 30$ .

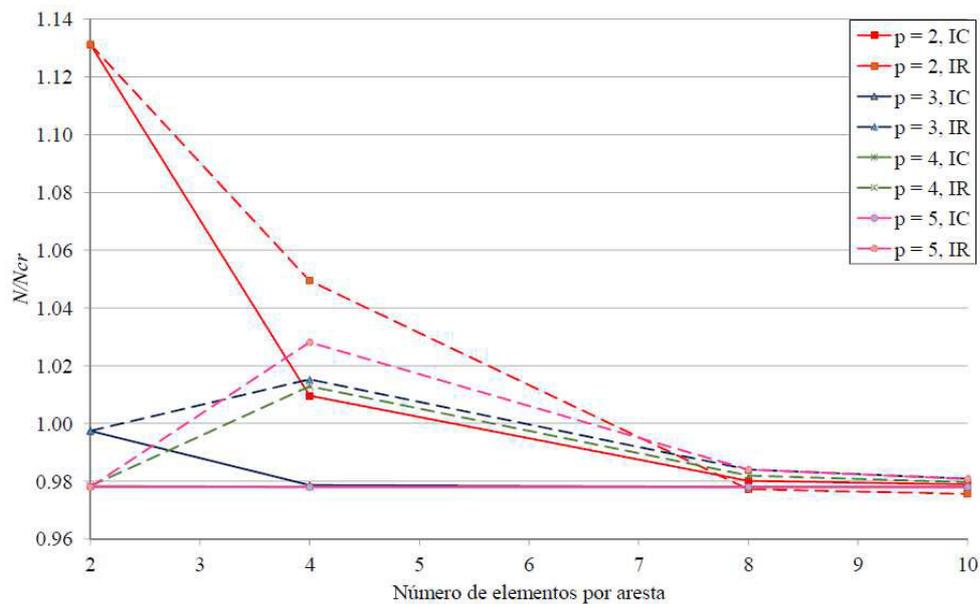


Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 9 – Estudo de convergência para as placas com relação  $a/h = 50$ .

Grau do Polinômio	Número de divisões	Graus de liberdade	Integração Completa		Integração Reduzida	
			$N_{cr}$	$N_{ref}$	$N_{cr}$	$N_{ref}$
2	2	48	255.156	1.131	255.16	1.131
	4	130	227.710	1.010	236.68	1.049
	8	414	221.068	0.980	220.41	0.977
	10	616	220.787	0.979	220.05	0.976
3	2	84	224.968	0.997	224.97	0.997
	4	186	220.738	0.979	228.99	1.015
	8	510	220.594	0.978	221.95	0.984
	10	732	220.591	0.978	221.24	0.981
4	2	130	220.661	0.978	220.66	0.978
	4	252	220.593	0.978	228.45	1.013
	8	616	220.591	0.978	221.48	0.982
	10	858	220.591	0.978	220.96	0.980
5	2	186	220.593	0.978	220.59	0.978
	4	328	220.591	0.978	231.88	1.028
	8	732	220.591	0.978	221.95	0.984
	10	994	220.591	0.978	221.22	0.981

Fonte: Elaborada pelo autor.

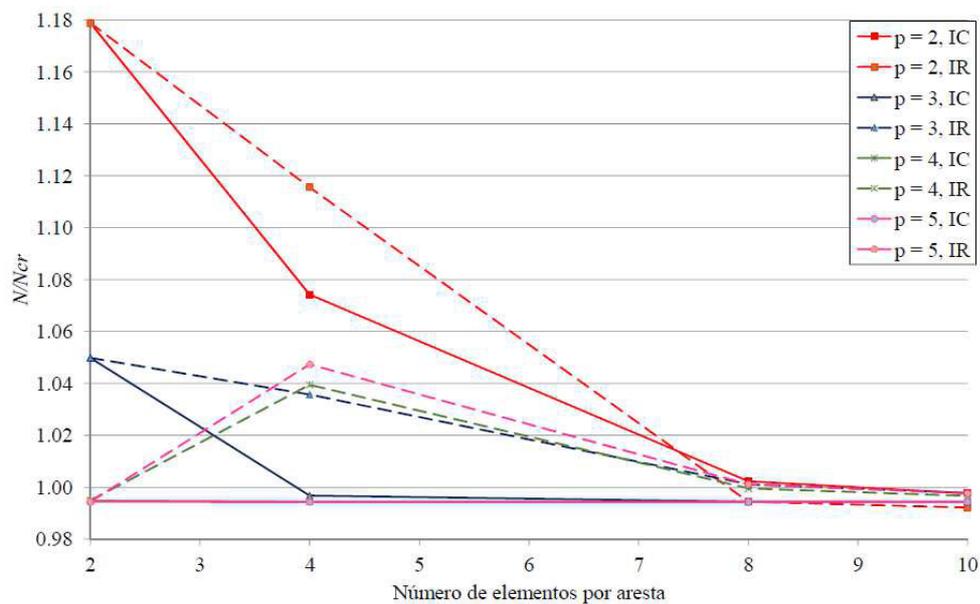
Figura 47 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação  $a/h = 50$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Estudo de convergência para as placas com relação  $a/h = 100$ .

Grau de Polinômio	Número de divisões	Graus de liberdade	Integração Completa		Integração Reduzida	
			$N_{cr}$	$N_{ref}$	$N_{cr}$	$N_{ref}$
2	2	48	33.236	1.179	33.24	1.179
	4	130	30.286	1.074	31.45	1.116
	8	414	28.258	1.002	28.04	0.994
	10	616	28.129	0.998	27.97	0.992
3	2	84	29.599	1.050	29.60	1.050
	4	186	28.103	0.997	29.20	1.036
	8	510	28.037	0.994	28.23	1.001
	10	732	28.036	0.994	28.13	0.998
4	2	130	28.048	0.995	28.05	0.995
	4	252	28.037	0.994	29.31	1.039
	8	616	28.036	0.994	28.18	1.000
	10	858	28.036	0.994	28.10	0.997
5	2	186	28.037	0.994	28.04	0.994
	4	328	28.036	0.994	29.53	1.047
	8	732	28.036	0.994	28.23	1.001
	10	994	28.036	0.994	28.13	0.998

Fonte: Elaborada pelo autor.

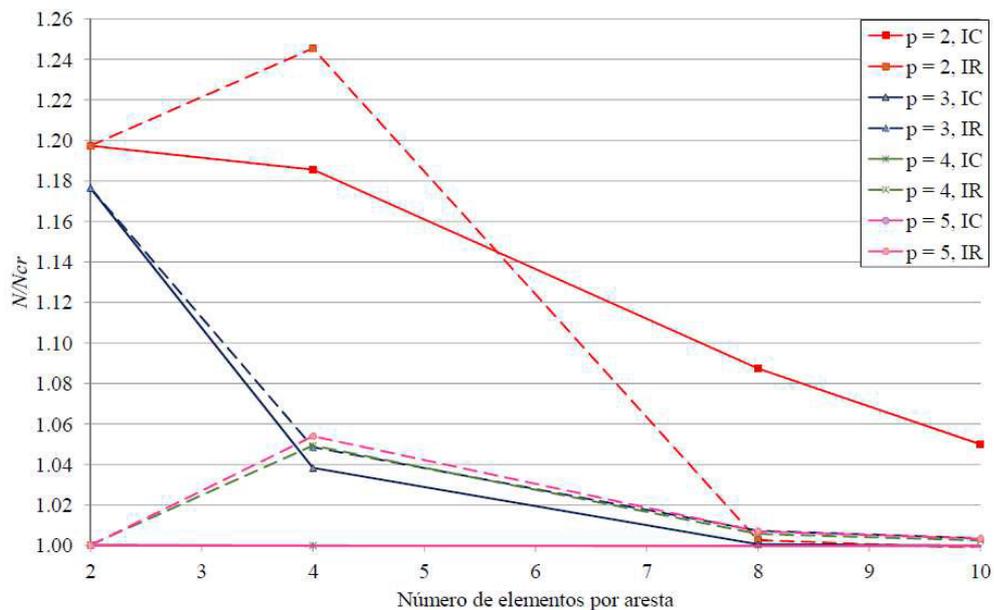
Figura 48 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação  $a/h = 100$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 11 – Estudo de convergência para as placas com relação  $a/h = 500$ .

Grau de Polinômio	Número de divisões	Graus de liberdade	Integração Completa		Integração Reduzida	
			$N_{cr}$	$N_{ref}$	$N_{cr}$	$N_{ref}$
2	2	48	0.2701	1.197	0.2701	1.197
	4	130	0.2674	1.186	0.2809	1.245
	8	414	0.2453	1.087	0.2262	1.003
	10	616	0.2368	1.050	0.2252	0.999
3	2	84	0.2654	1.176	0.2654	1.176
	4	186	0.2342	1.038	0.2365	1.049
	8	510	0.2257	1.001	0.2272	1.007
	10	732	0.2256	1.000	0.2264	1.004
4	2	130	0.2256	1.000	0.2256	1.000
	4	252	0.2256	1.000	0.2367	1.049
	8	616	0.2255	1.000	0.2269	1.006
	10	858	0.2255	1.000	0.2261	1.003
5	2	186	0.2256	1.000	0.2256	1.000
	4	328	0.2255	1.000	0.2377	1.054
	8	732	0.2255	1.000	0.2271	1.007
	10	994	0.2255	1.000	0.2263	1.003

Fonte: Elaborada pelo autor.

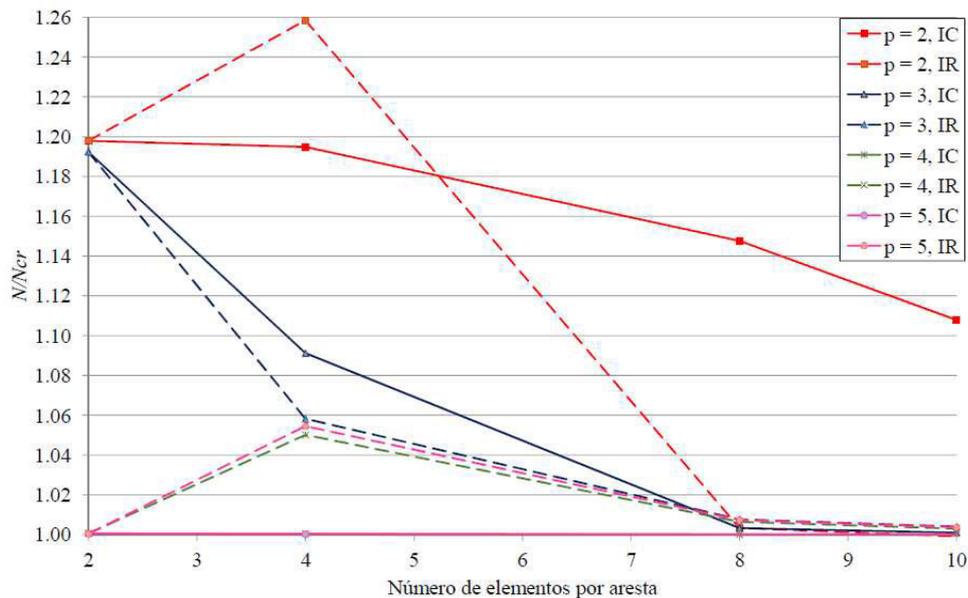
Figura 49 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação  $a/h = 500$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Estudo de convergência para as placas com relação  $a/h = 1000$ .

Grau de Polinômio	Número de divisões	Graus de Liberdade	Integração Completa		Integração Reduzida	
			$N_{cr}$	$N_{ref}$	$N_{cr}$	$N_{ref}$
2	2	48	0.03377	1.198	0.03377	1.198
	4	130	0.03369	1.195	0.03548	1.258
	8	414	0.03236	1.148	0.02829	1.003
	10	616	0.03124	1.108	0.02817	0.999
3	2	84	0.03362	1.192	0.03362	1.192
	4	186	0.03076	1.091	0.02983	1.058
	8	510	0.02829	1.003	0.02841	1.008
	10	732	0.02822	1.001	0.02831	1.004
4	2	130	0.02821	1.001	0.02821	1.001
	4	252	0.02820	1.000	0.02961	1.050
	8	616	0.02819	1.000	0.02837	1.006
	10	858	0.02819	1.000	0.02828	1.003
5	2	186	0.02821	1.000	0.02821	1.000
	4	328	0.02820	1.000	0.02973	1.054
	8	732	0.02819	1.000	0.02840	1.007
	10	994	0.02819	1.000	0.02830	1.004

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 50 – Convergência da carga crítica para o laminado com relação  $a/h = 1000$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando se utiliza a integração completa nos modelos de elementos finitos, percebe-se que, à medida que a relação lado/espessura da placa diminui, o efeito do *locking* se

torna mais forte. Entretanto, ao se utilizar a integração reduzida proposta por Adam *et al.* (2014, 2015) verifica-se que os resultados obtidos convergem rapidamente para a solução correta, mesmo quando polinômios de 2º grau são utilizados na interpolação.

É interessante notar que, ao se utilizar dois elementos por aresta, o resultado obtido por integração completa ou reduzida é a mesma. Isto decorre do fato de que todos os elementos da malha gerada são “elementos de quina”, levando a integração completa e a reduzida a serem equivalentes em número e na localização dos pontos de integração.

No caso da integração reduzida, as tabelas e figuras anteriores mostram que as malhas com 4×4 elementos apresentam resultados piores que as malhas com 2×2 elementos. Contudo, os resultados convergem para a solução do problema à medida que a malha é refinada, apesar desta convergência não ser monotônica.

Tabela 13 – Número de pontos de integração ( $NPI$ ) usados em cada modelo.

INTEGRAÇÃO COMPLETA ( $IC$ )				
Malha/Grau do polinômio	2	3	4	5
2×2	36	64	100	144
4×4	144	256	400	576
8×8	576	1024	1600	2304
10×10	900	1600	2500	3600
INTEGRAÇÃO REDUZIDA ( $IR$ )				
Malha/Grau do polinômio	2	3	4	5
2×2	36	64	100	144
4×4	64	100	144	196
8×8	144	196	256	324
10×10	196	256	324	400
RAZÃO ENTRE O NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO ( $NPI_{IR}/NPI_{IC}$ )				
Malha/Grau do polinômio	2	3	4	5
2×2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4×4	0.4444	0.3906	0.3600	0.3403
8×8	0.2500	0.1914	0.1600	0.1406
10×10	0.2178	0.1600	0.1296	0.1111

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 13 mostra um comparativo entre o número de pontos de integração em cada modelo. É interessante notar que, nas malhas com 8×8 elementos, são necessários cerca de 25% do número de pontos de integração no modelo reduzido para se obter respostas

bastante satisfatórias. Nestes casos, observa-se uma grande economia no aspecto de esforço computacional.

Verifica-se que, à medida que a placa se torna mais fina, os resultados obtidos pelos polinômios de segundo grau com integração completa não convergem para a solução do problema por conta do efeito do travamento, mesmo com a utilização de malhas relativamente refinadas (10×10).

Em contrapartida, a eficiência do refinamento  $k$ , característico da análise isogeométrica é bastante notória, uma vez que uma discretização com duas divisões por aresta resulta em excelentes resultados para polinômios do 4° e 5° grau. Além disso, observa-se pelas figuras anteriores que o efeito do *locking* é rapidamente suavizado com este tipo de refinamento.

Com os resultados obtidos do estudo de convergência, nas análises subsequentes será utilizada uma malha com 4 divisões por aresta, juntamente com um polinômio de interpolação de terceiro grau. Apesar da grande vantagem em relação ao custo computacional, neste trabalho não foi realizado um estudo da influência da integração reduzida em análises não lineares geométricas e físicas. Portanto, no restante do texto será utilizada integração completa nos modelos.

### 5.1.1. Laminados Cross-ply Simétricos

Quando se adotam laminados *cross-ply* simétricos e se utilizam placas retangulares, de dimensões  $a$  e  $b$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, e finas, a solução para a carga crítica pode ser obtida analiticamente por uma equação desenvolvida para materiais ortotrópicos ideais:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 D_{22} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} \left(\frac{b}{a}\right)^2 m^2 + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} + \frac{1}{m^2} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \quad (111)$$

onde  $m$  vem da aproximação da configuração deformada da placa por curvas formadas por senos e este representa o número de meias ondas formadas na direção  $x$ .

Deste modo, foi realizada uma série de análises, variando o número  $n$  de lâminas e as espessuras das placas, visando o cálculo das cargas críticas de uma placa quadrada, com as propriedades descritas anteriormente. A Tabela 14 apresenta os resultados obtidos pelo FAST.

Observa-se que as soluções obtidas pela TCL não mudam com o aumento do número de lâminas, uma vez que a placa é quadrada e a soma dos termos  $D_{11}$  e  $D_{22}$  não varia e os termos  $D_{12}$  e  $D_{66}$  se mantêm constantes com o aumento do número de lâminas, como mostrado na Tabela 15.

Tabela 14 – Valores das cargas críticas para laminados *cross-ply* simétricos.

$a/h$	$n$	FAST	TCL	dif (%)
30	4	983.1935	1044.2194	-5.8442
	8	995.1946		-4.6949
	16	998.2689		-4.4005
	32	1000.453		-4.1913
50	4	220.7384	225.5514	-2.1339
	8	221.7798		-1.6722
	16	222.043		-1.5555
	32	222.1056		-1.5277
100	4	28.1032	28.1939	-0.3218
	8	28.1383		-0.1973
	16	28.1467		-0.1675
	32	28.2838		0.3187

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 15 – Valores dos coeficientes da matriz  $\mathbf{D}$  em laminados *cross-ply* simétricos.

$a/h$	$n$	$D_{11}$	$D_{12}$	$D_{22}$	$D_{66}$	$N_{cr}$
30	4	8168.5696	92.8247	1485.1945	185.1852	1044.2194
	8	6497.7258	92.8247	3156.0382	185.1852	1044.2194
	16	5662.3039	92.8247	3991.4601	185.1852	1044.2194
	32	5244.5930	92.8247	4409.1711	185.1852	1044.2194
50	4	1764.4110	20.0501	320.8020	40.0000	225.5514
	8	1403.5088	20.0501	681.7043	40.0000	225.5514
	16	1223.0576	20.0501	862.1554	40.0000	225.5514
	32	1132.8321	20.0501	952.3810	40.0000	225.5514
100	4	220.5514	2.5063	40.1003	5.0000	28.1939
	8	175.4386	2.5063	85.2130	5.0000	28.1939
	16	152.8822	2.5063	107.7694	5.0000	28.1939
	32	141.6040	2.5063	119.0476	5.0000	28.1939

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como esperado, para placas finas ( $a/h = 50$  ou  $a/h = 100$ ), os resultados obtidos estão em concordância com os valores analíticos obtidos pela TCL. Para a placa com relação  $a/h = 30$ , a aplicação da Eq. (110) implica em uma diferença da ordem de 4% no valor da carga crítica da placa, visto que o efeito do cisalhamento é desprezado. É interessante notar que, à medida que o número de lâminas aumenta, a carga crítica obtida pela Teoria de Reissner-Mindlin também é incrementada.

### 5.1.2. Laminados Cross-ply Antissimétricos

Laminados do tipo *cross-ply* antissimétrico não têm acoplamentos entre deformações ou curvaturas devido a carregamentos normais e de cisalhamento e possuem os termos de acoplamento membrana-flexão nulos, exceto  $B_{11} = -B_{22}$ . Deste modo, as equações de equilíbrio do sistema são acopladas, tornando-as inviáveis de se resolver analiticamente.

Assim, uma série de análises utilizando a AIG foi realizada, de modo a se representar os efeitos propostos neste estudo. A Tabela 16 e a Figura 51 mostram os resultados obtidos para laminados com 4, 8, 16 e 32 lâminas.

Tabela 16 – Relação entre a carga crítica da placa com  $n$  lâminas e a solução obtida pela TCL.

$n$	$N_{cr, n} / N_{ref}$		
	$a/h = 30$	$a/h = 50$	$a/h = 100$
<b>4</b>	0.8548	0.8470	0.8576
<b>8</b>	0.9251	0.9504	0.9632
<b>16</b>	0.9489	0.9762	0.9896
<b>32</b>	0.9563	0.9827	1.0001

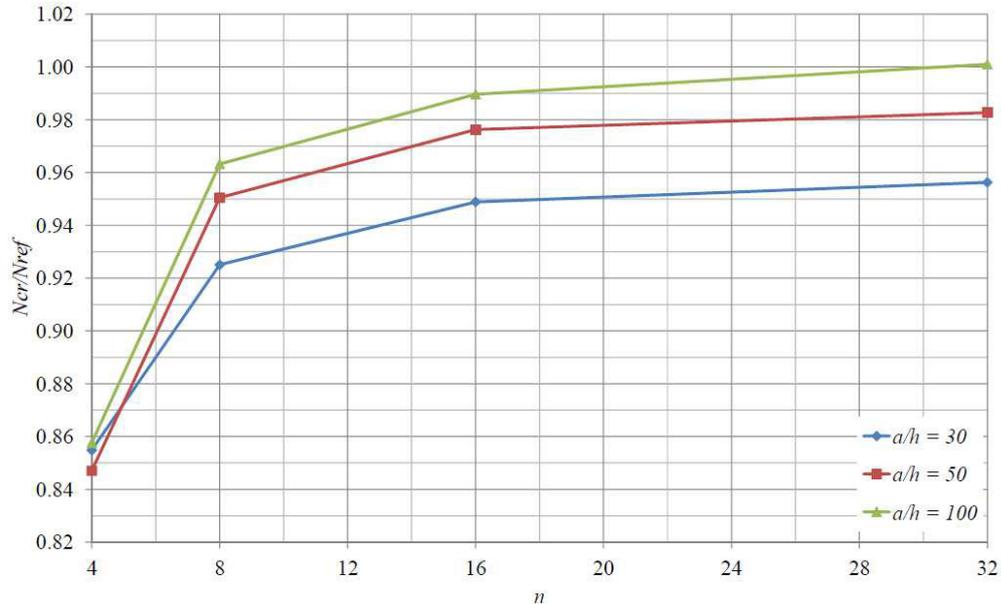
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas análises para este tipo de laminação e posteriores, utilizou-se como referência a carga crítica obtida pela TCL, uma vez que, quando o número de lâminas em um laminado aumenta, mantendo-se sua espessura, o efeito dos termos de acoplamento tendem a se tornar desprezíveis, levando a bons resultados para a solução obtida pela Eq. (110).

Pode-se notar, a partir da Tabela 16 e da Figura 51 que para laminados com mais de 16 lâminas o efeito dos acoplamentos já é pequeno, de modo que as respostas obtidas sejam próximas da solução analítica da TCL. Ainda assim, para laminados com relação  $a/h =$

30, a perda de capacidade de carga é da ordem de 5%. Para laminados com relação lado/espessura igual a 50 a perda de capacidade é de 1.7%.

Figura 51 – Curvas das relações entre a carga crítica de uma placa *cross-ply* antissimétrica com  $n$  lâminas e a solução ortotrópica ideal para várias razões  $a/h$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

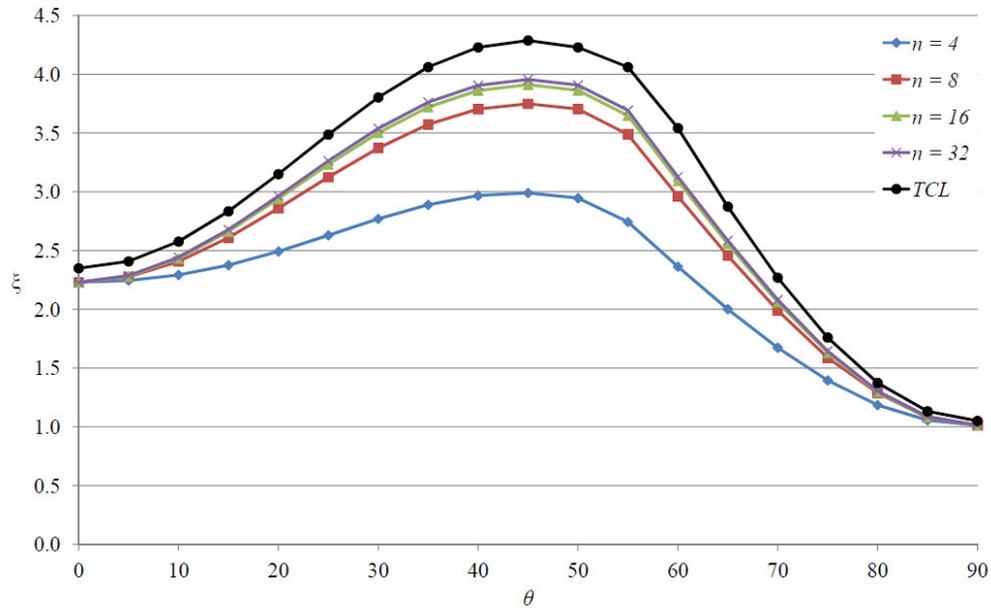
### 5.1.3. Laminados *Angle-ply* Simétricos

Para laminados do tipo *angle-ply* simétricos os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  não são nulos, o que inviabiliza a aplicação direta da Eq. (110). Entretanto, mantendo a espessura do laminado constante e aumentando o número de lâminas, pode-se mostrar que o efeito destes termos deixa de ser dominante, de modo que eles se tornam desprezíveis frente aos demais termos da matriz  $\mathbf{D}$ . Assim, quando se utiliza muitas lâminas a Eq. (110) pode dar uma boa estimativa da carga crítica da placa. Neste item foram feitas análises com  $\theta$  variando de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  com incrementos de  $5^\circ$ .

A Figura 52 mostra um estudo paramétrico, em relação ao número de lâminas, de um laminado com relação  $a/h = 30$  e  $a/h = 50$ , da influência deste ângulo  $\theta$  em função de um parâmetro adimensional  $\xi$ , dado por:

$$\xi = \frac{N_{cr} a^2}{E_2 h^3} \quad (112)$$

Figura 52 – Estudo paramétrico da influência do ângulo  $\theta$  de um laminado *angle-ply* simétrico em relação à sua carga crítica para  $a/h = 30$ .

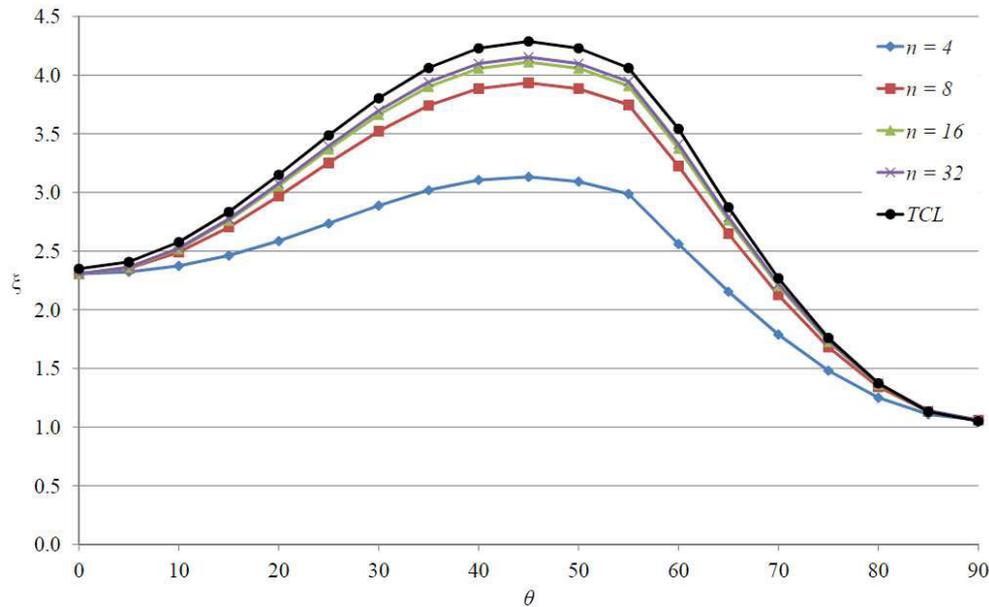


Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que para placas moderadamente espessas ( $a/h = 30$ ), o efeito do número de lâminas é mais significativo, visto que as diferenças das respostas chegam a quase 12%, em comparação com o laminado com 8 lâminas (Figura 52). Em contrapartida, para placas finas, onde  $a/h = 50$ , os erros são minimizados e seu maior valor é de cerca de 8% em um laminado com 8 lâminas (Figura 53).

É importante notar que a diferença entre as respostas obtidas pela TCL (Eq. (110)) e as apresentadas variando o número de lâminas nas figuras anteriores se deve por dois fatores: os termos de acoplamento que existem devido ao tipo de laminação e o efeito do cisalhamento que é considerado na Teoria de Reissner-Mindlin. Comparando as curvas com  $n = 16$  e  $n = 32$ , verifica-se que os resultados diferem pouco, de modo a se concluir que a maior parte da perda de capacidade de carga provém do efeito do cisalhamento na estrutura.

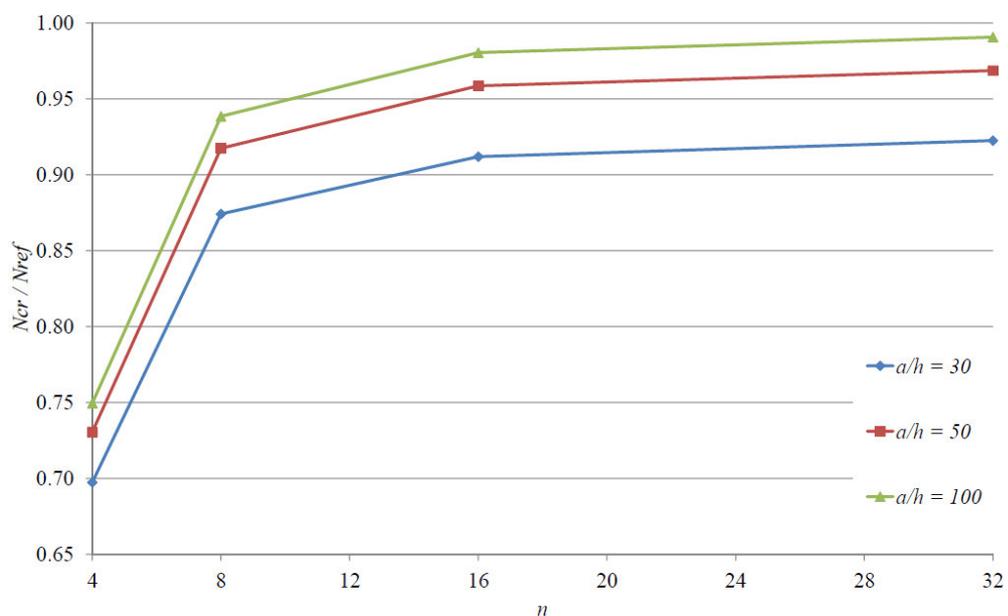
Figura 53 – Estudo paramétrico da influência do ângulo  $\theta$  de um laminado *angle-ply* simétrico em relação à sua carga crítica para  $a/h = 50$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 54 apresenta os resultados obtidos; variando a relação lado/espessura da placa para as laminações formadas por ângulos de  $45^\circ$ , pois, como se pode notar pela Figura 52, este é o ângulo que leva a maiores diferenças entre a solução da TCL e a obtida pela AIG.

Figura 54 – Curvas das relações entre a carga crítica de uma placa *angle-ply* simétrica com  $n$  lâminas e a solução ortotrópica ideal para várias razões  $a/h$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

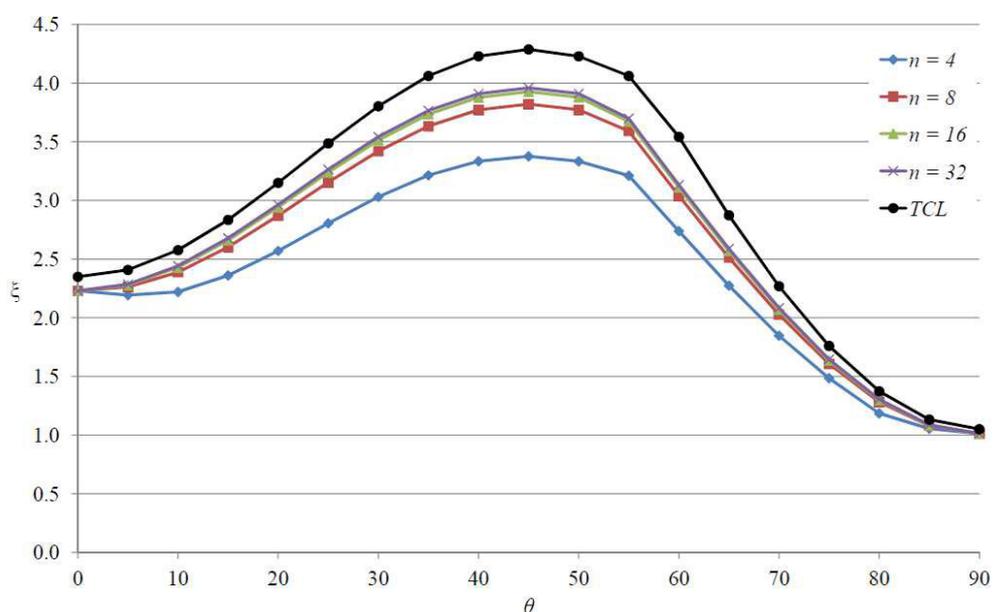
Verifica-se que, à medida que a espessura do laminado diminui e o número de lâminas aumenta, o efeito dos acoplamentos existentes nas laminações do tipo *angle-ply* simétricos diminuem, fazendo com que a expressão da TCL leve a bons resultados.

#### 5.1.4. Laminados *Angle-ply* Antissimétricos

Para laminados do tipo *angle-ply* antissimétricos, além dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  os termos  $B_{16}$  e  $B_{26}$  da matriz  $\mathbf{B}$  e os termos  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  e  $A_{66}$  da matriz  $\mathbf{A}$  não são nulos. Deste modo existem acoplamentos entre as equações (23), (24) e (25) para o cálculo da carga crítica. Do mesmo modo que no item anterior, foram feitas análises de laminados com 4, 8, 16 e 32 lâminas com  $\theta$  variando de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  com incrementos de  $5^\circ$ .

Tal como no caso anterior, a Figura 55 e a Figura 56 mostram um estudo paramétrico, em relação ao número de lâminas, de um laminado com relação  $a/h = 30$  e  $a/h = 50$ , da influência deste ângulo  $\theta$  em função do parâmetro adimensional  $\xi$  calculado conforme a Eq. (112).

Figura 55 – Estudo paramétrico da influência do ângulo  $\theta$  de um laminado *angle-ply* antissimétrico em relação à sua carga crítica para  $a/h = 30$ .

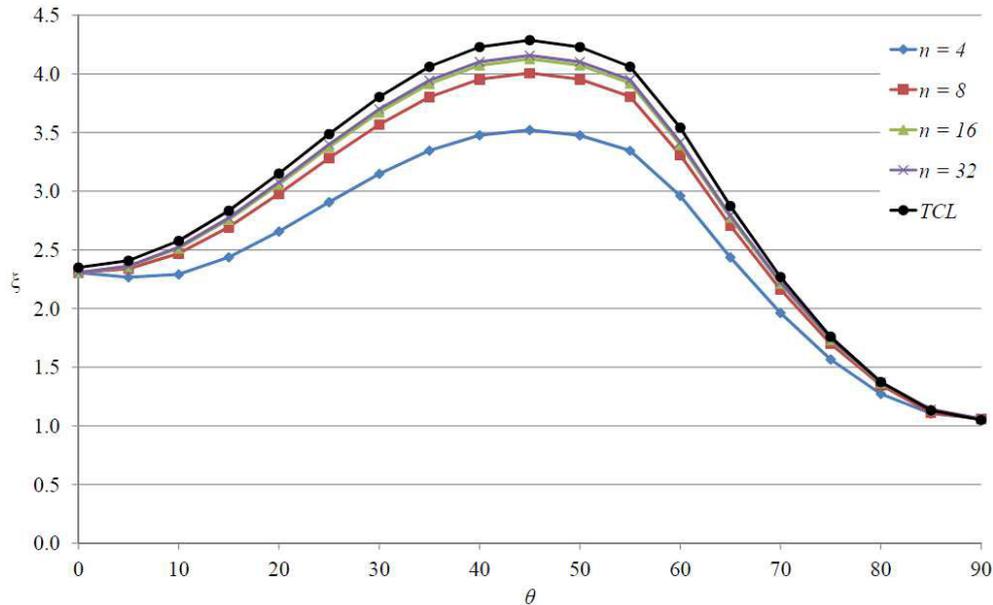


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que para placas moderadamente espessas ( $a/h = 30$ ), o efeito do número de lâminas é mais significativo, assim como mostrado na Figura 52, para o caso de *angle-ply* simétricos. Neste caso, as diferenças das respostas chegam a 11%, em comparação

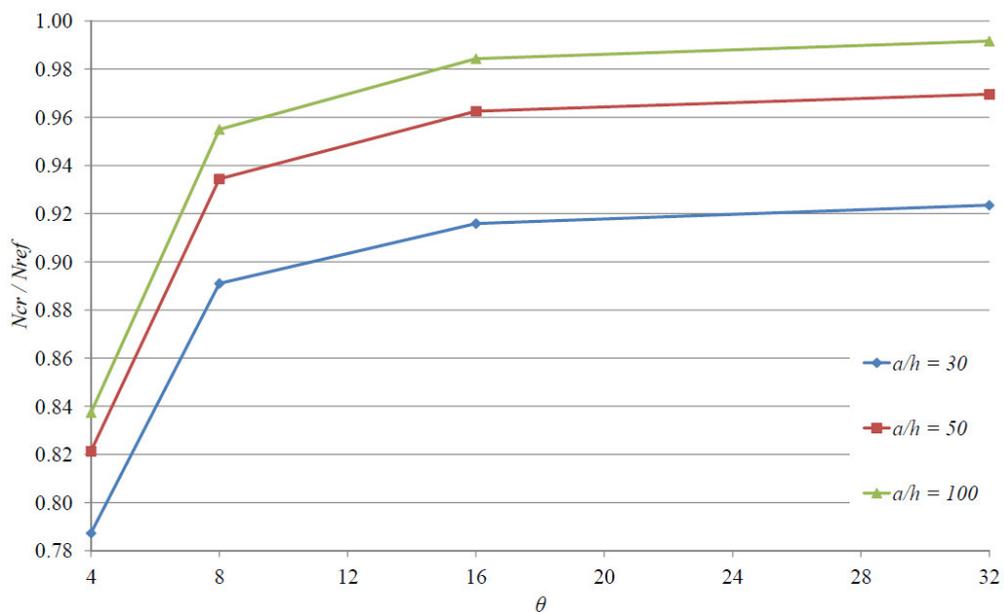
com o laminado com 8 lâminas quando  $a/h = 30$  (Figura 55) e em torno de 7% quando  $a/h = 50$  (Figura 56).

Figura 56 – Estudo paramétrico da influência do ângulo  $\theta$  de um laminado *angle-ply* antissimétrico em relação à sua carga crítica para  $a/h = 50$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 57 – Curvas das relações entre a carga crítica de uma placa *angle-ply* antissimétrica com  $n$  lâminas e a solução ortotrópica ideal para várias razões  $a/h$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

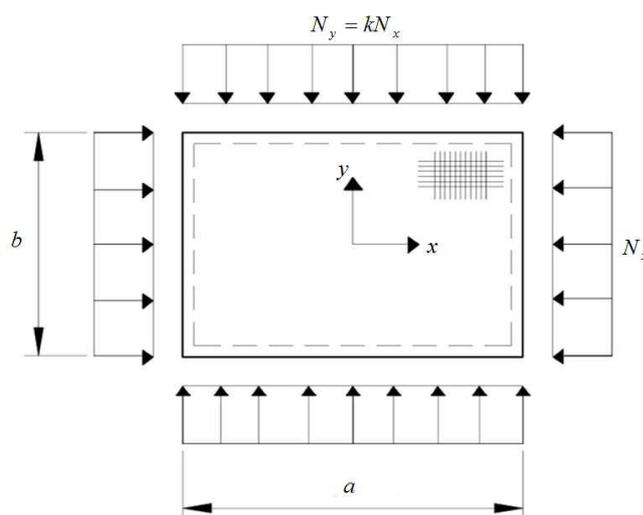
A Figura 57 apresenta os resultados obtidos, variando a relação lado/espessura da placa para as laminações formadas por ângulos de  $45^\circ$ . Nota-se que, à medida que a espessura do laminado diminui, o efeito dos acoplamentos existentes diminui, fazendo com que a expressão analítica para materiais ortotrópicos ideais leve a bons resultados.

## 5.2. Análise Não Linear Geométrica de Placas Isotrópicas e Laminadas

Este exemplo trata da investigação do comportamento pós-crítico de placas quadradas, isotrópicas e laminadas, simplesmente apoiadas, sujeitas a cargas de compressão uniaxial e biaxial. Estes estudos foram comparados com os trabalhos desenvolvidos por Le-Manh & Lee (2014), que aplicam a Análise Isogeométrica, Liew *et al.* (2006), que utilizam um método sem malha (*Mesh-Free*), e Sundaresan *et al.* (1996), que realiza suas análises utilizando o MEF. Os dados da geometria (Figura 58) e os parâmetros dos materiais são apresentados na Tabela 17.

As análises deste exemplo foram realizadas utilizando os programas FAST, para avaliar a Análise Isogeométrica, e o ABAQUS na verificação dos resultados por Elementos Finitos. Utilizaram-se malhas com  $6 \times 6$  elementos quadrilaterais quadráticos, com integração reduzida no ABAQUS e integração completa no FAST. Para obtenção do caminho pós-crítico, o Método do Controle de Carga (CRISFIELD, 1991) foi utilizado.

Figura 58 - Placa simplesmente apoiada sujeita a carregamento biaxial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 17 - Dados do Exemplo 2 com unidades no sistema britânico de medidas.

Tipo	Geometria					Material			
	$a$	$b$	$h$	$E_1 (\times 10^6)$	$E_2 (\times 10^5)$	$\nu_{12}$	$G_{12} = G_{13} (\times 10^4)$	$G_{23} (\times 10^4)$	
Isotrópica	10	10	0.20	3.00	-	-	-	-	
Laminada	$(45/-45)_s$	10	10	1.00	3.00	1.20	0.25	6.00	2.40
	$(45/-45)_2$	10	10	1.00	3.00	1.20	0.25	6.00	2.40

Fonte: Le-Manh &amp; Lee (2014).

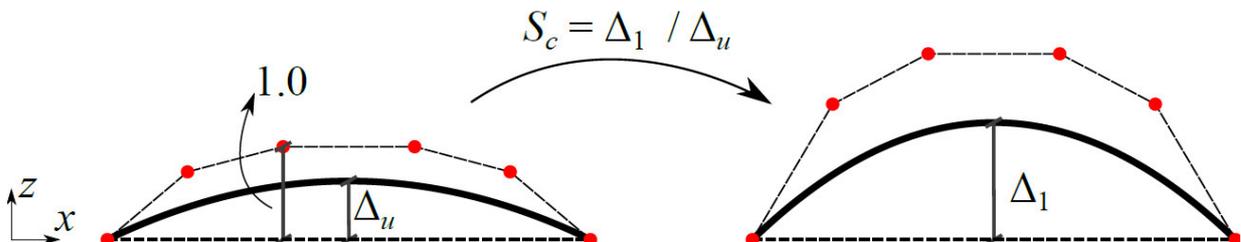
A geometria imperfeita da estrutura pode ser modelada como o resultado de uma combinação linear dos seus modos de flambagem ( $\phi_i$ ):

$$\mathbf{x}_{imp} = \mathbf{x}_{perf} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \phi_i \quad (113)$$

onde  $\mathbf{x}_{imp}$  e  $\mathbf{x}_{perf}$  são as coordenadas dos pontos que definem a geometria na configuração imperfeita e perfeita, respectivamente, e  $\Delta_i$  é a amplitude da imperfeição relacionada ao modo de flambagem  $\phi_i$ , uma vez que estes são normalizados de forma que sua maior componente seja unitária. Neste trabalho, considerou-se apenas o primeiro modo.

É importante notar que na Análise Isogeométrica, os pontos de controle não interpolam a geometria do modelo, logo não se pode obter a geometria imperfeita diretamente pela aplicação da Eq. (113). Apesar disto, aplicando a equação com o modo de flambagem unitário ( $\Delta_1 = 1.0$ ), pode-se avaliar a maior amplitude obtida no modelo imperfeito unitário ( $\Delta_u$ ). Como as NURBS possuem propriedade de invariância afim, a geometria com a amplitude de imperfeição correta pode ser obtida aplicando-se uma transformação de escala na direção  $z$  de valor  $S_c = \Delta_1 / \Delta_u$ , em todos os pontos de controle do *patch*. A Figura 59 ilustra o procedimento.

Figura 59 – Aplicação da curvatura inicial na placa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

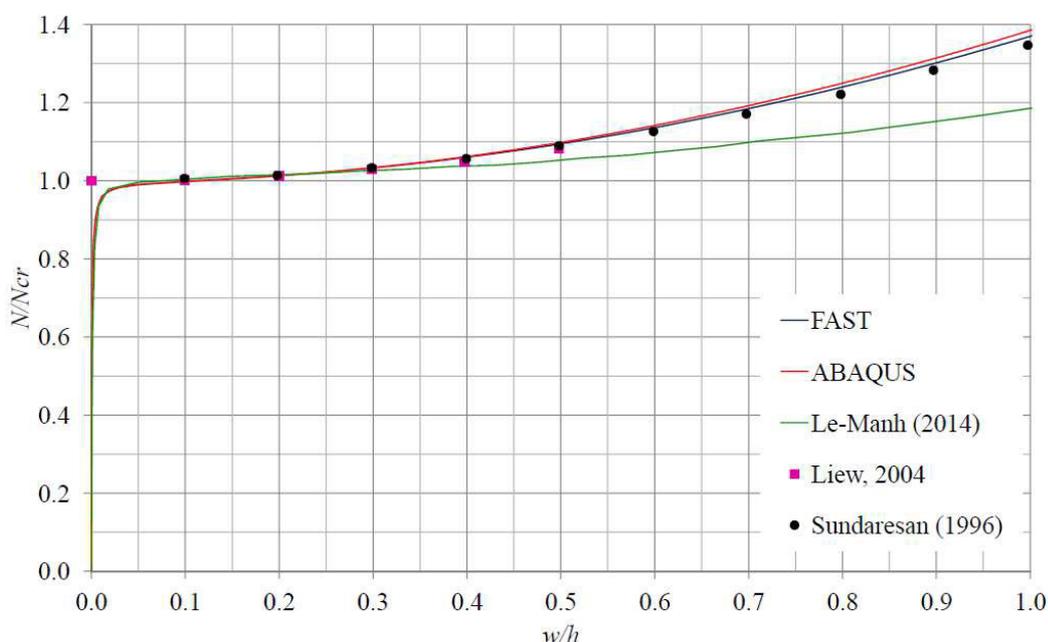
As condições de contorno utilizadas neste exemplo são:

$$\begin{cases} v = w = \theta_x = 0, & x = \pm a/2 \\ u = w = \theta_y = 0, & y = \pm b/2 \end{cases} \quad (114)$$

que são as mesmas condições de contorno aplicadas por Sundaresan (1996) e Liew et al. (2006).

Inicialmente, foi modelada uma placa isotrópica sujeita a carregamento uniaxial com imperfeição  $\Delta = 1 \times 10^{-4}$ . A Figura 60 apresenta a curvas carga-deslocamento normalizada obtida.

Figura 60 - Placa isotrópica ( $a/h = 50$ ) simplesmente apoiada sujeita a carregamento uniaxial ( $\Delta = 10^{-4}$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor.

As diferenças obtidas entre Le-Mahn & Lee (2014), Liew et al. (2006) e Sundaresan et al. (1996) se devem às condições de contorno aplicadas na placa, uma vez que Le-Mahn & Lee (2014) aplicam as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} w = \theta_x = 0, & x = \pm a/2 \\ w = \theta_y = 0, & y = \pm b/2 \end{cases} \quad (115)$$

Verifica-se que o comportamento pós-crítico da estrutura é sensível à condição de contorno aplicada, visto que o ganho de capacidade de carga da placa, quando os

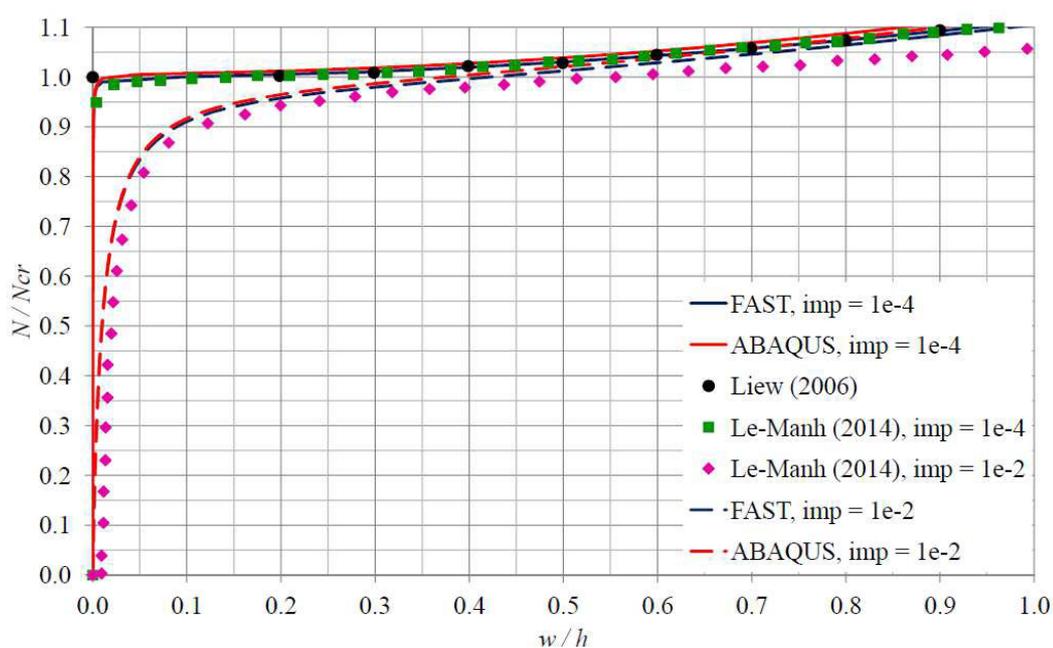
deslocamentos chegam à magnitude da espessura, é da ordem de 37% quando os apoios são definidos como Liew (2006) e Sundaresan (1996) e de 20% quando se aplicam as condições de contorno apresentadas por Le-Mahn & Lee (2014). Os autores explicam, equivocadamente, que as discrepâncias nos caminhos de equilíbrio podem ter ocorrido devido à continuidade  $C^1$  obtida na Análise Isogeométrica, ao passo que a diferença entre as respostas se deve às condições de contorno aplicadas, como mostrado.

Na sequência, são analisadas placas com laminações do tipo *angle-ply* simétrica  $(45/-45)_s$  e antissimétrica  $(45/-45)_2$  sujeitas a compressão biaxial. Em ambos os casos, aplicam-se as condições de contorno conforme apresentado por Le-Mahn & Lee (2014). A Figura 61 mostra o caminho de equilíbrio das placas para imperfeições iniciais  $\Delta = 1 \times 10^{-4}$  e  $\Delta = 1 \times 10^{-2}$ . Observa-se que ambas as curvas estão em boa concordância com os autores citados.

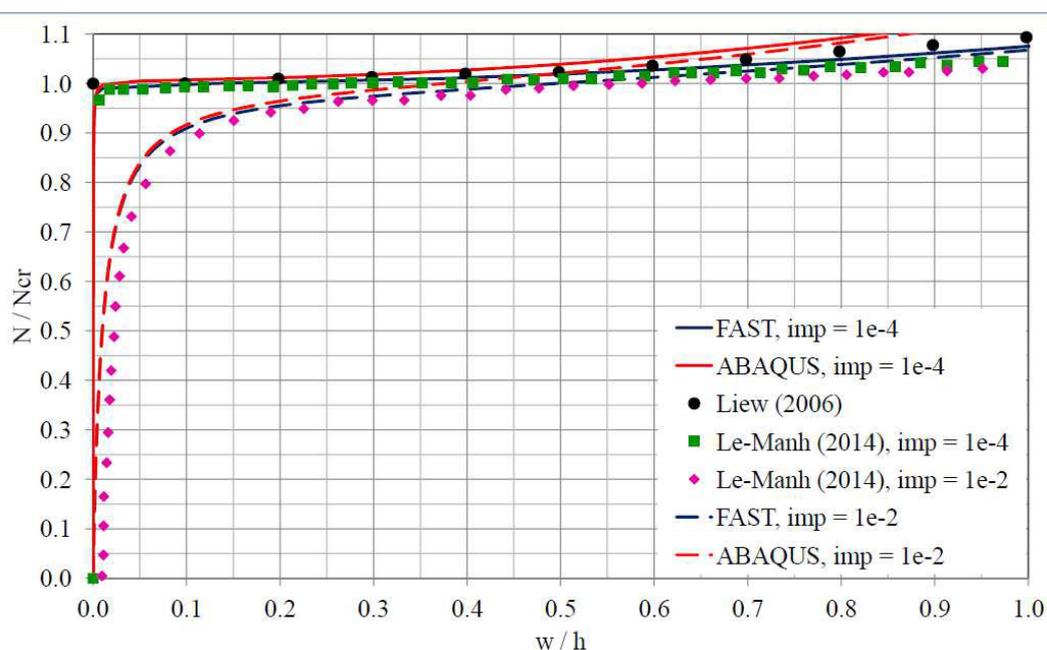
Neste exemplo também se verifica que, à medida que a imperfeição inicial é aumentada, a carga que a placa suporta, para um determinado nível de deslocamentos é menor, como era de se esperar.

Pode-se explicar a diferença na curva pós-crítica obtida no ABAQUS pelo fato de se utilizar um elemento de casca geral no software e por conta da espessura muito elevada da estrutura proposta.

Figura 61 - Placa ( $a/h = 10$ ) simplesmente apoiada sujeita a carregamento biaxial.



(a) Laminação *angle-ply* simétrica.

(b) Laminação *angle-ply* antissimétrica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.3. Estabilidade de Placas Laminadas Considerando a Falha Progressiva

Neste exemplo será estudado o efeito da consideração da não linearidade física, utilizando o modelo de degradação instantânea apresentado por Kuirashi *et al.* (2002) em placas imperfeitas sujeitas a carregamento biaxial. O efeito do número de lâminas  $n$  também é avaliado no caminho de equilíbrio. Para tal, uma placa quadrada de fibra de carbono A-S/Epóxi 1 (KADDOUR & HINTON, 2012) de lado  $a = 0.10$  m e espessura por lâmina  $t = 0.127$  mm é modelada. As propriedades mecânicas do material são apresentadas na Tabela 18. A imperfeição utilizada para a obtenção das curvas é  $\Delta = h/100$ , onde  $h = n \times t$  e  $n = 4, 8, 16$  ou 32.

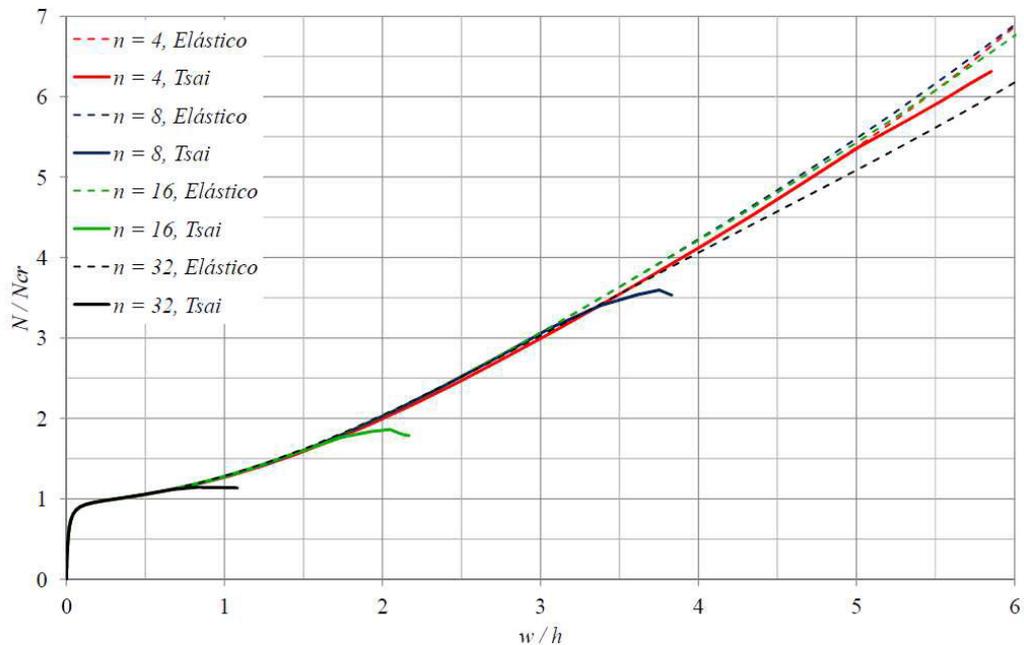
Um breve estudo de convergência no caminho de equilíbrio foi feito, mas aqui não é mostrado. Pode-se mostrar que uma malha de  $16 \times 16$  elementos com polinômios de 4ª ordem é suficiente para bem representar as análises posteriores.

Tabela 18 - Propriedades mecânicas da fibra de carbono A-S/Epóxi 1.

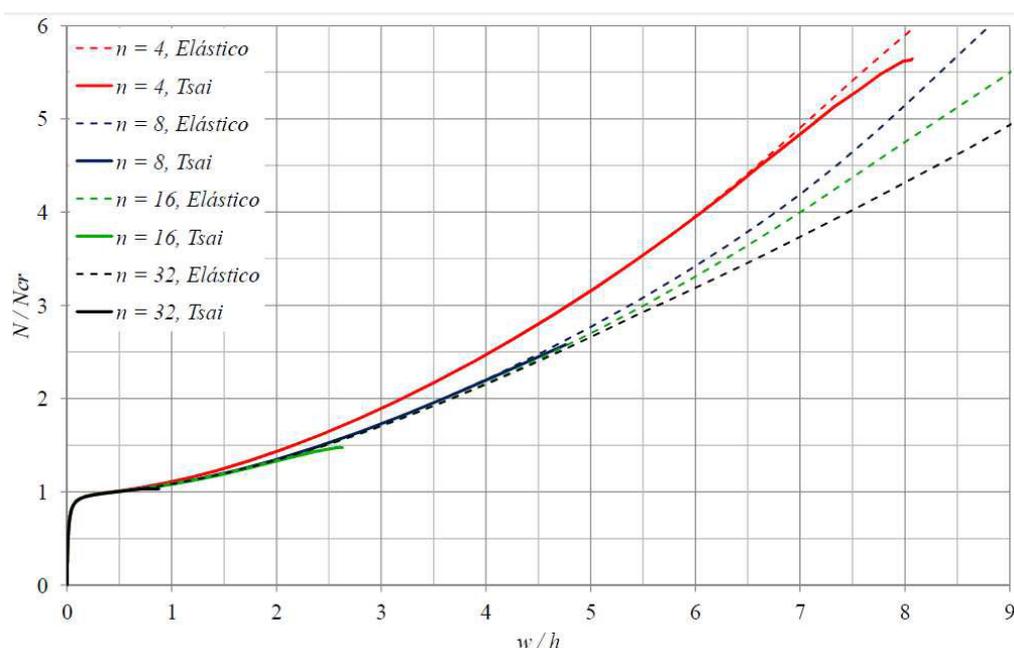
$E_1$ (GPa)	140.00
$E_2 = E_3$ (GPa)	10.00
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.30
$\nu_{23}$	0.49
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	6.00
$G_{23}$ (GPa)	3.35
$F_{1T}$ (MPa)	1990.00
$F_{1C}$ (MPa)	1500.00
$F_{2T} = F_{3T}$ (MPa)	38.00
$F_{2C} = F_{3C}$ (MPa)	150.00
$S_4$ (MPa)	50.00
$S_5 = S_6$ (MPa)	70.00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Verificação da influência da consideração da não linearidade física em placas imperfeitas.



(a) Laminação *cross-ply* simétrica.

(b) Laminação *angle-ply* simétrica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos são apresentados para laminações do tipo *cross-ply* (Figura 62a) e *angle-ply* (Figura 62b). É importante notar que, após o início da falha, a verificação da simetria do laminado não é mais válida, necessariamente.

Como esperado, para placas finas ( $n = 4$  ou  $8$ ) a não linearidade geométrica é dominante no comportamento pós-crítico da estrutura. Entretanto, à medida que a espessura do laminado aumenta, percebe-se a importância da consideração da não linearidade física.

Tabela 19 – Valor da carga quando ocorre a falha da primeira lâmina e carga limite.

Laminação	<i>Cross-ply</i>			<i>Angle-ply</i>		
	$N_{FPF} / N_{cr}$	$N_{lim} / N_{cr}$	$N_{FPF} / N_{lim}$	$N_{FPF} / N_{cr}$	$N_{lim} / N_{cr}$	$N_{FPF} / N_{lim}$
4	4.940	6.315	0.782	2.639	5.133	0.514
8	2.746	3.595	0.764	1.578	2.701	0.584
16	1.563	1.862	0.839	1.117	1.477	0.756
32	1.054	1.144	0.921	1.032	1.033	0.999

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante lembrar também que os resultados obtidos para as placas com 4 lâminas podem apresentar diferenças significativas se um modelo considerando grandes deformações e rotações no espaço for utilizado. A Tabela 19 apresenta os valores limites de

carga determinados das placas para as laminações especificadas. Como esperado, nos laminados mais finos a falha da primeira lâmina tende a acontecer para cargas acima da carga crítica, assim como a capacidade de carga da estrutura antes da falha total. À medida que a espessura do laminado aumenta tanto a falha da primeira lâmina, quanto o colapso da estrutura tendem a ocorrer próximos à carga crítica. Ressalta-se que, para o laminado *angle-ply* com 32 lâminas, a ruptura da placa ocorre logo após a falha da primeira lâmina.

#### 5.4. Estabilidade de Placas Laminadas com Furo Considerando a Falha do Material

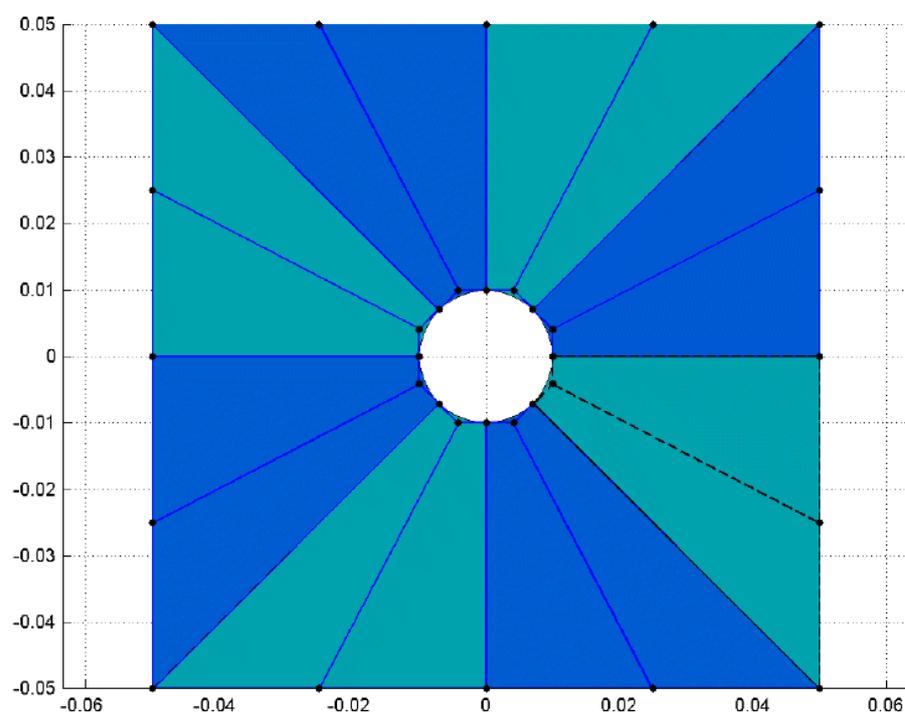
Neste exemplo será avaliado o comportamento das placas analisadas no exemplo anterior quando estas apresentam um furo central. As placas são feitas de fibra de carbono A-S/Epóxi 1, cujas propriedades mecânicas estão dispostas na Tabela 18. A influência do furo na capacidade de carga da estrutura será mensurada a partir da consideração de três placas com furos com relação diâmetro/aresta ( $d/a$ ) igual a 1/20, 1/10 e 1/5.

Por conta do furo nas placas, a forma mais simples de se atribuir as condições de contorno e carregamento no modelo isogeométrico proposto é fazendo a estrutura dividida em 8 *patches*. A Figura 63 mostrada na sequência apresenta uma placa com furo de diâmetro de 2 cm seguindo a ideia da divisão da placa em múltiplos *patches*.

Foi feito um estudo de convergência a partir do valor da carga crítica obtida por elementos finitos no ABAQUS de uma placa com furo central com relação  $d/a = 1/20$  e laminação *cross-ply* simétrica com 4 lâminas para uma malha de 20×20 elementos de casca com integração reduzida (S8R) em cada oitavo da estrutura, o que resulta em 7200 elementos e 22080 graus de liberdade. O valor da carga crítica obtida foi  $N_{ref} = 957.93$ . No modelo isogeométrico foi feito um refinamento no número de elementos e no grau do polinômio, como mostrado na Tabela 20 e na Figura 64.

Mostra-se que quando a interpolação é feita a partir de polinômios de 3º grau, a carga crítica apresenta uma diferença de 1.18% para a pior discretização utilizada neste modelo, enquanto para uma interpolação realizada com funções quadráticas esta diferença é muito maior, da ordem de 40%.

Figura 63 – Modelo isogeométrico de uma placa quadrada com furo central com relação  $d/a = 1/5$  dividida em 8 *patches*.



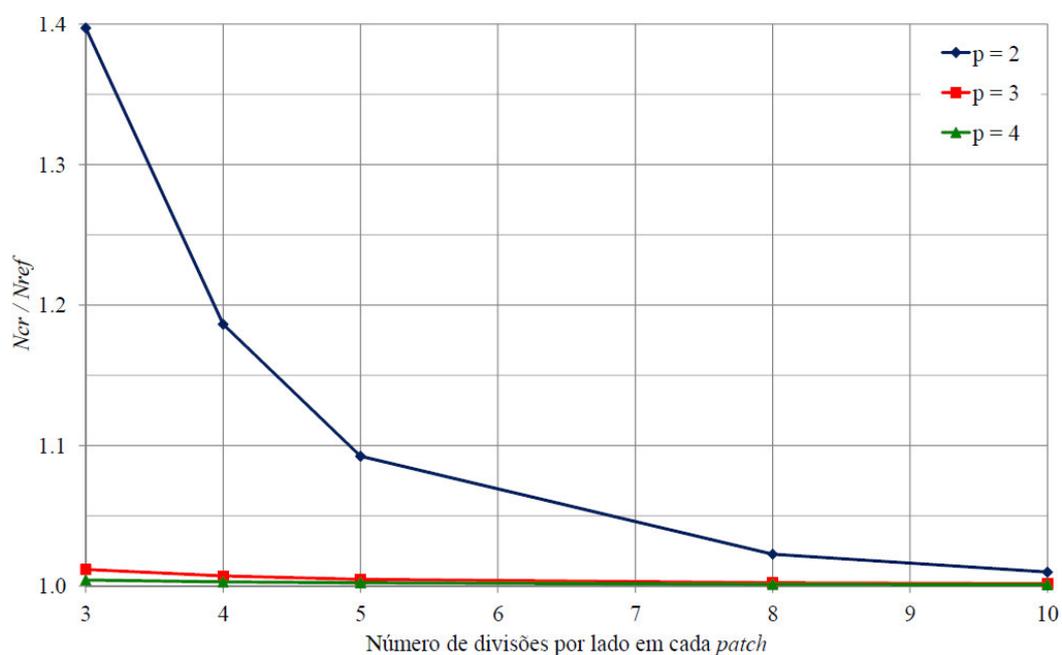
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 20 – Estudo de convergência da malha e do polinômio de interpolação.

Grau do polinômio	Número de divisões por lado em cada <i>patch</i>	gdl	$N_{cr}$	$N_{cr} / N_{ref}$
2	3	714	1338.4430	1.3972
	4	1094	1136.4873	1.1864
	5	1554	1046.4649	1.0924
	8	3414	979.7326	1.0228
	10	5054	967.5148	1.0100
3	3	1094	969.2729	1.0118
	4	1554	964.8340	1.0072
	5	2094	962.5155	1.0048
	8	4194	960.2523	1.0024
	10	5994	959.6514	1.0018
4	3	1554	962.1309	1.0044
	4	2094	960.8380	1.0030
	5	2714	960.2190	1.0024
	8	5054	959.1831	1.0013
	10	7014	958.9705	1.0011

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Convergência do valor da carga crítica em função do grau do polinômio e do número de divisões em cada *patch* da placa analisada.



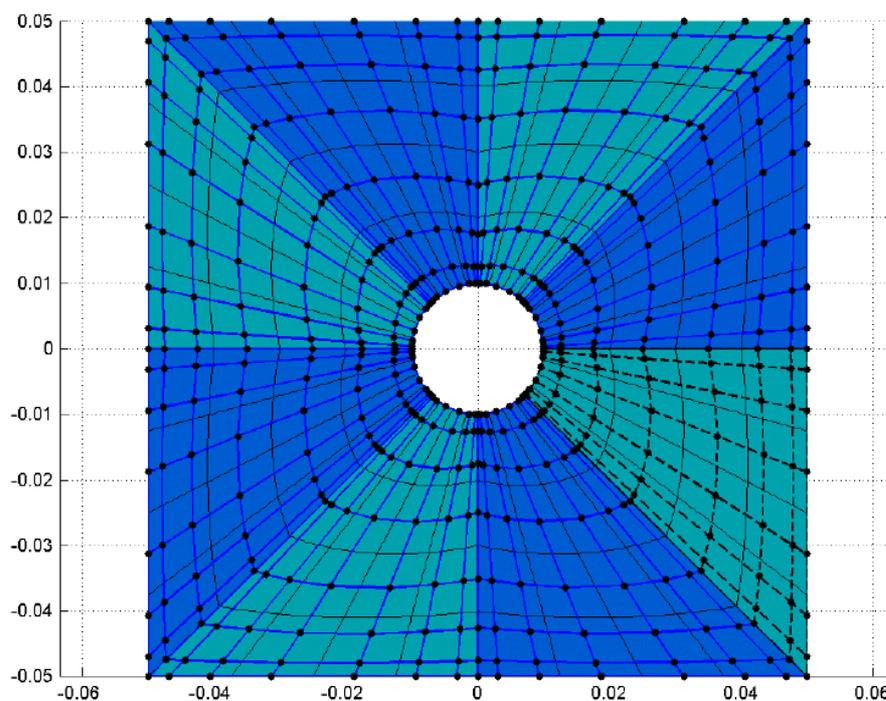
Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dos resultados obtidos do estudo de convergência e de modo a ficar compatível com o exemplo anterior, será aplicada uma malha com 5 divisões por lado em cada *patch* e o polinômio interpolador será de 4º grau. A Figura 65 mostra os pontos de controle da placa da Figura 63.

Nas análises não lineares, considerou-se uma imperfeição igual à imposta no exemplo anterior, de modo que alguns resultados obtidos anteriormente possam ser reutilizados neste exemplo. O primeiro modo de flambagem é aplicado na determinação da geometria imperfeita e um fator  $w/h = 1/100$  é utilizado nas imperfeições. Para a obtenção do caminho de equilíbrio da estrutura, aplicou-se o Método do Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991).

Nos estudos apresentados na sequência, o fator de carga é calculado normalizando-se a carga a cada passo em relação à carga crítica obtida para uma placa sem furo. Esta abordagem foi escolhida por representar bem a perda de capacidade de carga que a estrutura sofre com o aumento do diâmetro do furo.

Figura 65 – Pontos de controle de uma placa laminada com furo central para a relação  $d/a = 1/5$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como no exemplo anterior, dois tipos de laminados são considerados nas análises: um *cross-ply* e um *angle-ply* simétrico, sendo o segundo formado por lâminas com orientação de  $45^\circ$  e  $-45^\circ$ .

As curvas obtidas para o laminado *cross-ply* e *angle-ply* simétrico são apresentadas na Figura 66 e na Figura 67. Em ambas as figuras mencionadas anteriormente, foi feito um estudo da perda de capacidade de carga da placa, à medida que se aumenta o diâmetro do furo na placa. Para isto, foram modeladas placas com 4, 8, 16 e 32 lâminas conforme o exemplo anterior. As curvas não lineares puramente geométricas são representadas por linhas tracejadas.

Os valores da carga referente à falha da primeira lâmina, juntamente com a carga limite das placas estão dispostas na Tabela 21 para os laminados *cross-ply* e na Tabela 22 para os laminados *angle-ply*.

Tabela 21 – Estudo da influência do tamanho do furo na capacidade de carga de placas *cross-ply* simétricas com  $n$  lâminas.

$n$	$d/a$	$N_{FPF} / N_{ref}$	$N_{lim} / N_{ref}$	$N_{lim} / N_{lim, sem\ furo}$
4	0	4.940	6.780	1.000
	1/20	4.569	6.212	0.916
	1/10	4.508	6.162	0.909
	1/5	4.152	6.011	0.887
8	0	2.746	3.595	1.000
	1/20	2.783	3.579	0.996
	1/10	2.713	3.559	0.990
	1/5	2.592	3.449	0.959
16	0	1.563	1.862	1.000
	1/20	1.212	1.841	0.989
	1/10	1.127	1.796	0.965
	1/5	1.013	1.673	0.898
32	0	1.055	1.144	1.000
	1/20	0.916	1.074	0.939
	1/10	0.844	0.941	0.823
	1/5	0.702	0.763	0.667

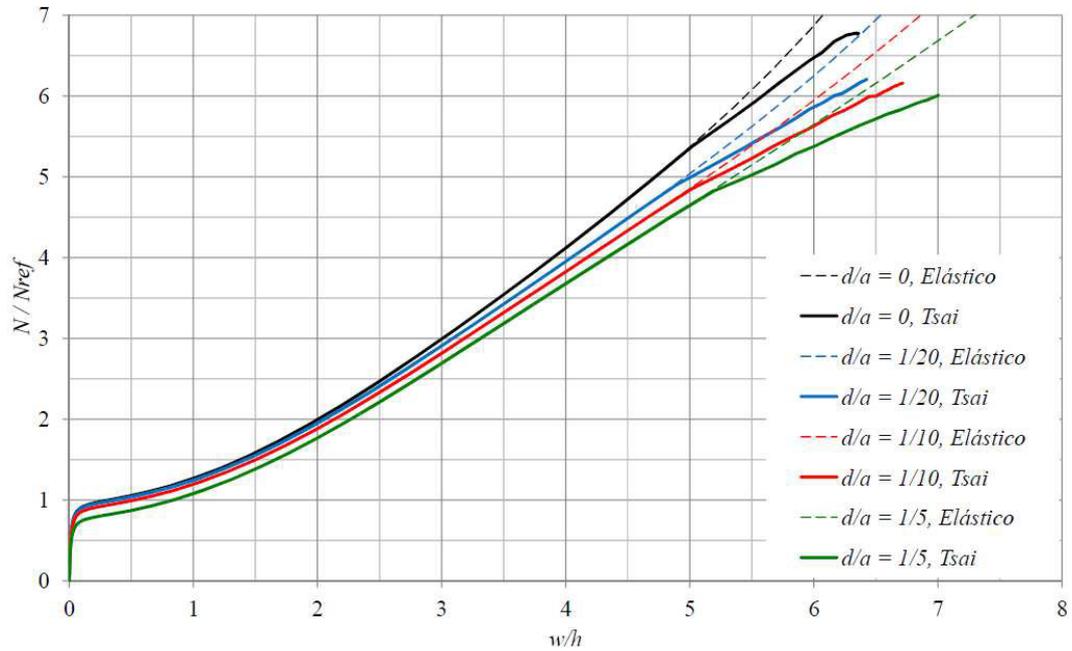
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 22 – Estudo da influência do tamanho do furo na capacidade de carga de placas *angle-ply* simétricas com  $n$  lâminas.

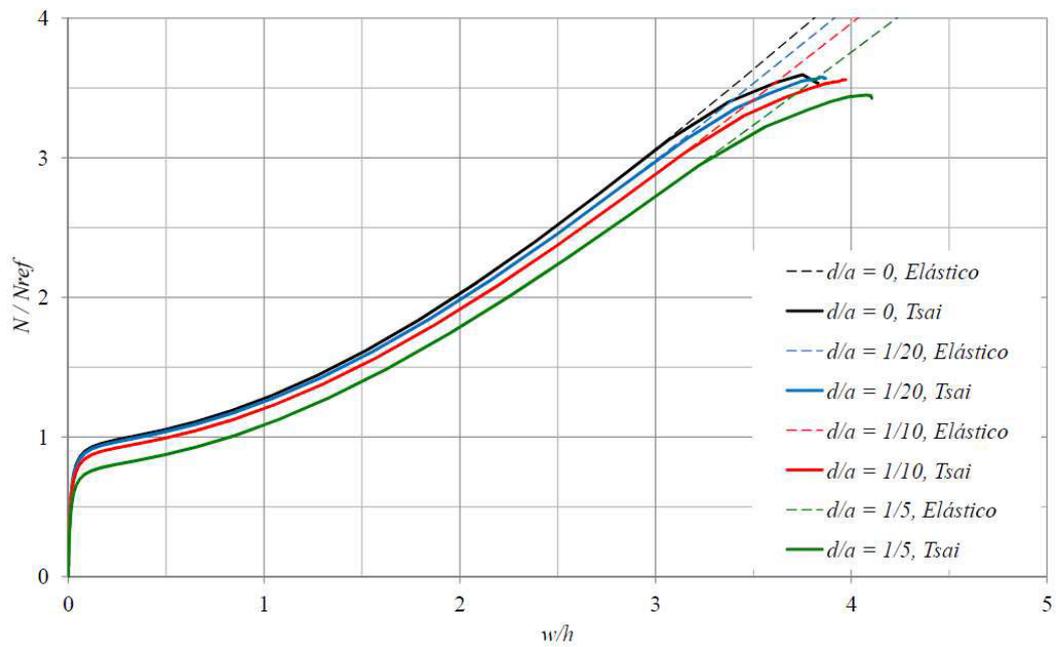
$n$	$d/a$	$N_{FPF} / N_{ref}$	$N_{lim} / N_{ref}$	$N_{lim} / N_{lim, sem\ furo}$
4	0	2.639	5.645	1.000
	1/20	2.388	5.619	0.996
	1/10	2.362	5.611	0.994
	1/5	2.309	5.554	0.984
8	0	1.578	2.701	1.000
	1/20	1.486	2.670	0.989
	1/10	1.512	2.582	0.956
	1/5	1.513	2.532	0.938
16	0	1.117	1.477	1.000
	1/20	1.022	1.474	0.998
	1/10	0.998	1.466	0.993
	1/5	0.940	1.434	0.971
32	0	1.032	1.033	1.000
	1/20	0.856	0.976	0.945
	1/10	0.620	0.768	0.743
	1/5	0.478	0.590	0.571

Fonte: Elaborada pelo autor.

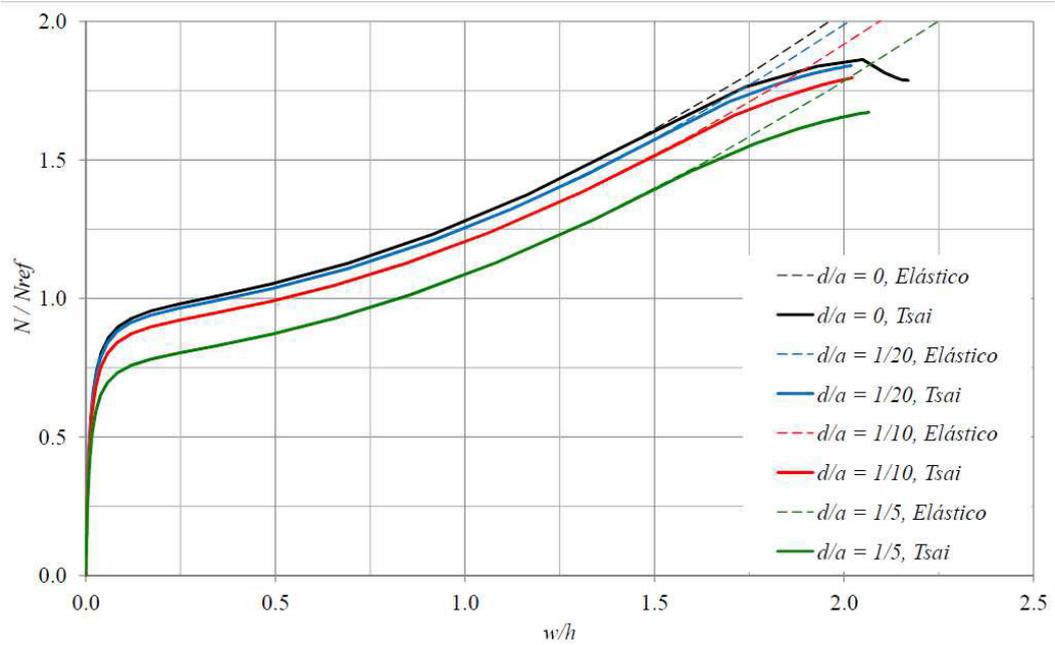
Figura 66 – Curvas não lineares obtidas para as placas *cross-ply* em função do diâmetro do furo.



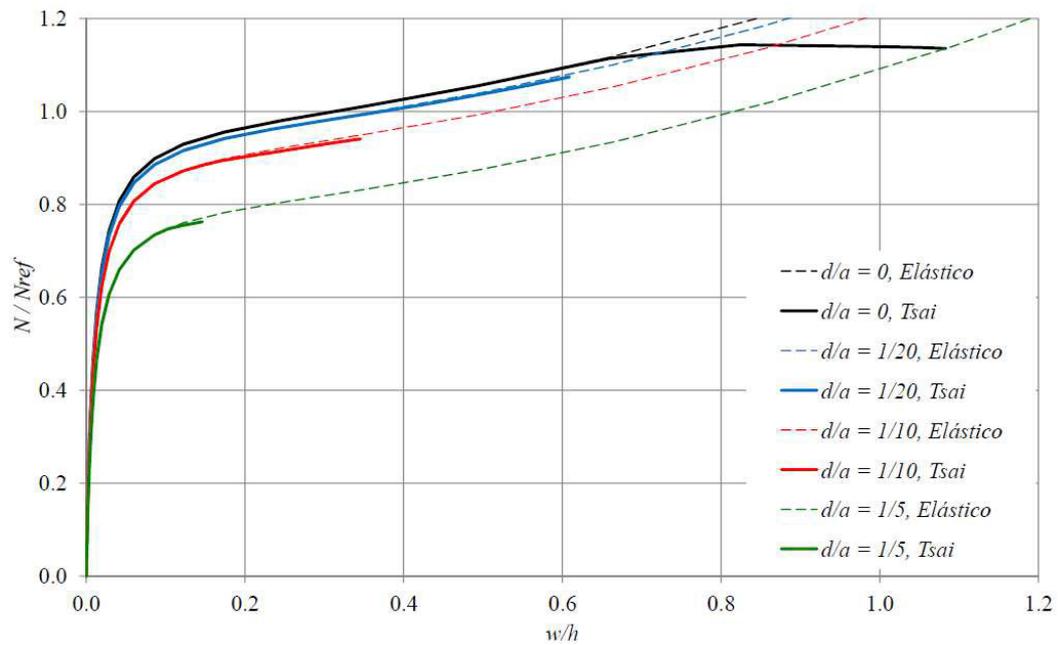
(a) Placas com 4 lâminas.



(b) Placas com 8 lâminas.



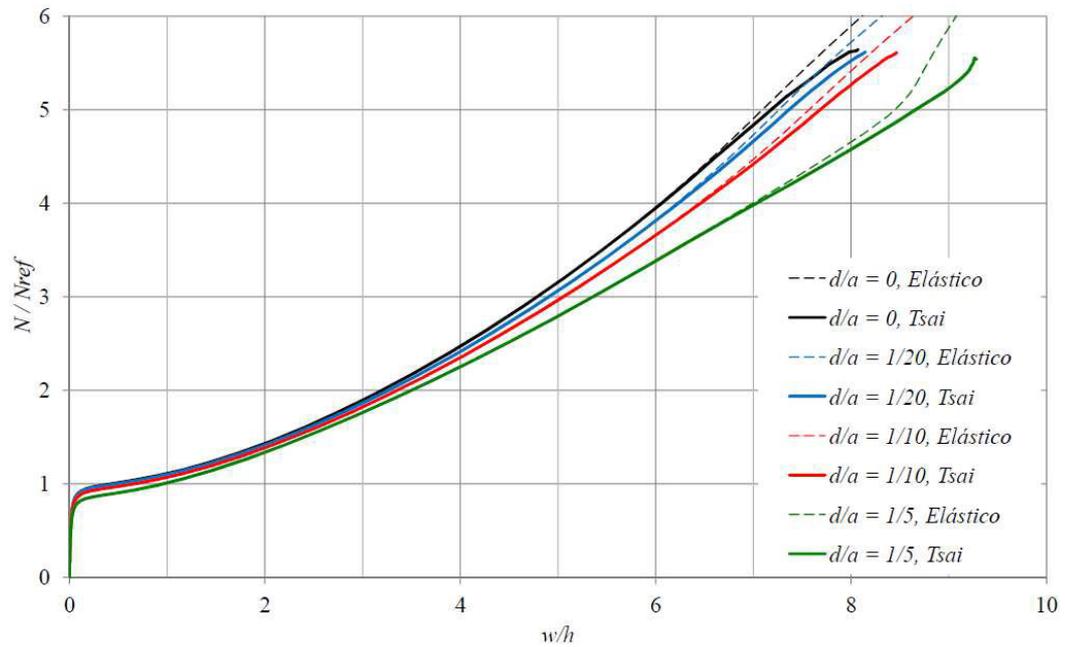
(c) Placas com 16 lâminas.



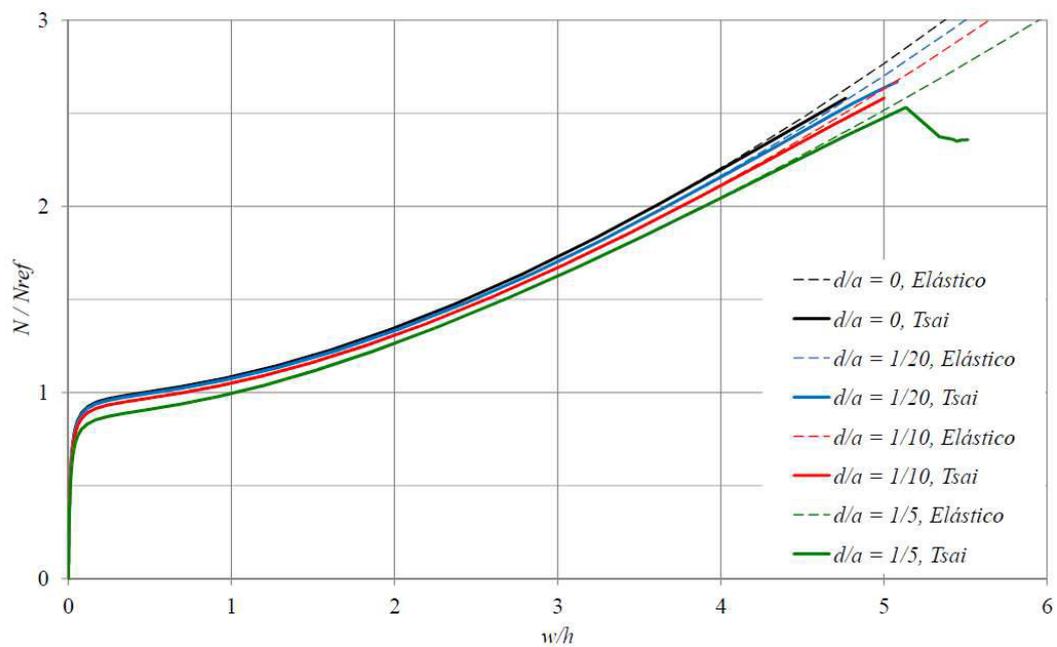
(d) Placas com 32 lâminas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

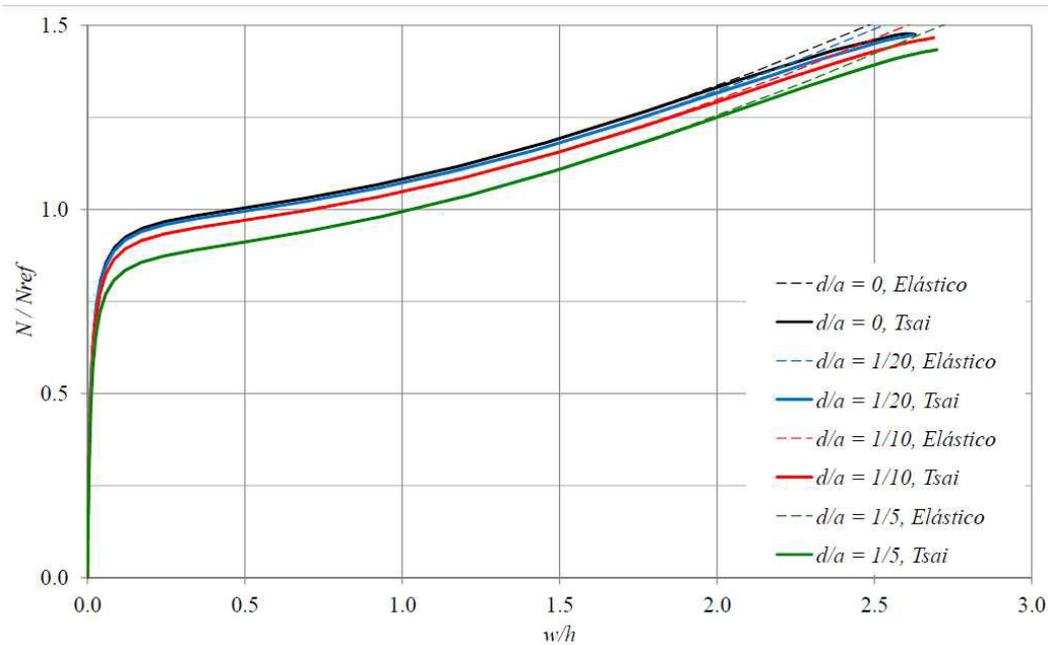
Figura 67 – Curvas não lineares obtidas para as placas *angle-ply* em função do diâmetro do furo.



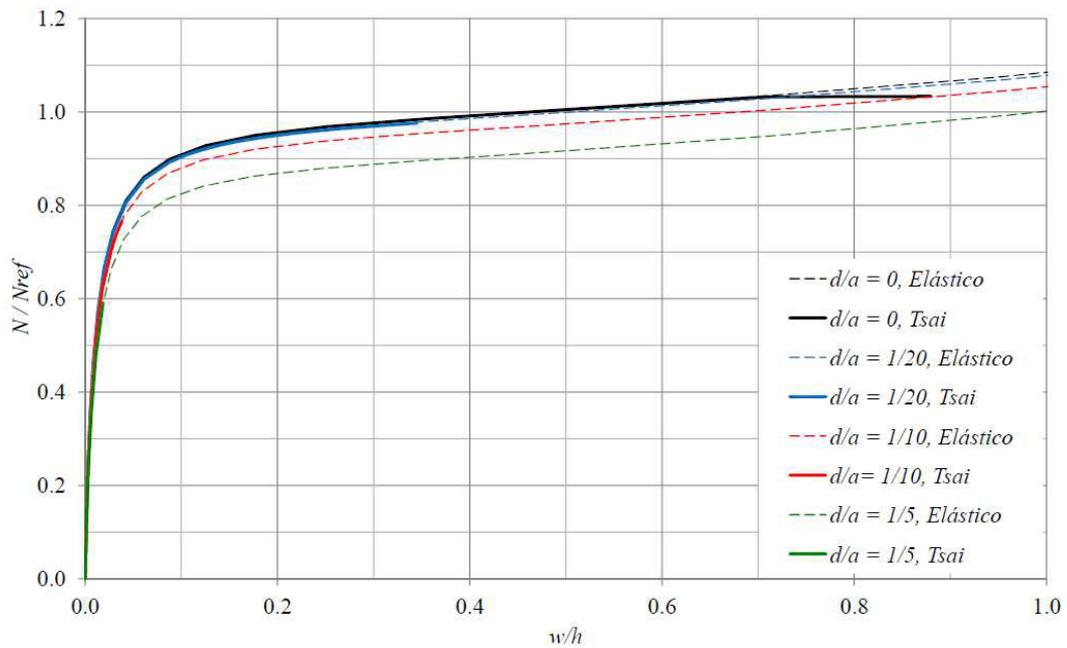
(a) Placas com 4 lâminas.



(b) Placas com 8 lâminas.



(c) Placas com 16 lâminas.



(d) Placas com 32 lâminas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Das figuras e tabelas apresentadas anteriormente, pode-se verificar que, como esperado, à medida que o tamanho do furo aumenta tanto a carga referente à falha da primeira lâmina, quanto a capacidade de carga da placa diminuem.

Observa-se também que nas placas *cross-ply* a perda de capacidade de carga é da ordem de 11% nos laminados com 4 lâminas e de 33% nos laminados com 32 lâminas. Do

mesmo modo, nas placas *angle-ply* a perda de capacidade de carga é da ordem de 2% em laminados com 4 lâminas e de 43% em laminados com 32 lâminas.

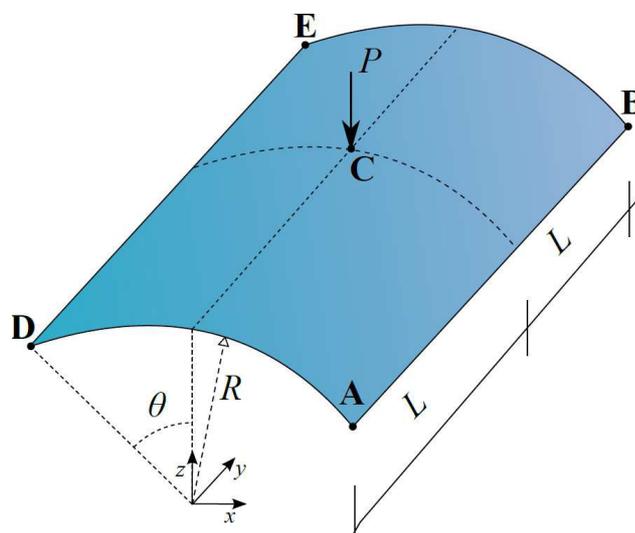
É interessante notar que nas placas *angle-ply* com 32 lâminas com relações  $d/a = 1/10$  e  $1/5$ , a falha das estruturas ocorrem para cargas inferiores à sua carga crítica.

Com isto, conclui-se que furos em placas compósitas tendem a reduzir a capacidade de carga da estrutura de forma mais acentuada, à medida que o laminado vai se tornando mais espesso.

### 5.5. Análise Não Linear Física e Geométrica de Cascas Abatidas

Neste exemplo serão abordadas análises não lineares de uma casca abatida sujeita a uma carga concentrada  $P$ , como mostrada na Figura 68 e outra sujeita a uma carga distribuída  $q$  ao longo de sua superfície. Os parâmetros geométricos da estrutura são  $R = 0.50$  m,  $\theta = 0.1$  rad,  $L = 0.10$  m. Assim como no Exemplo 2, uma avaliação do comportamento da estrutura é feita a partir do número de lâminas do laminado e do tipo de laminação adotado. As propriedades do material são as mesmas apresentadas no exemplo anterior e podem ser obtidas pela Tabela 18.

Figura 68 – Casca abatida sujeita a carga concentrada.



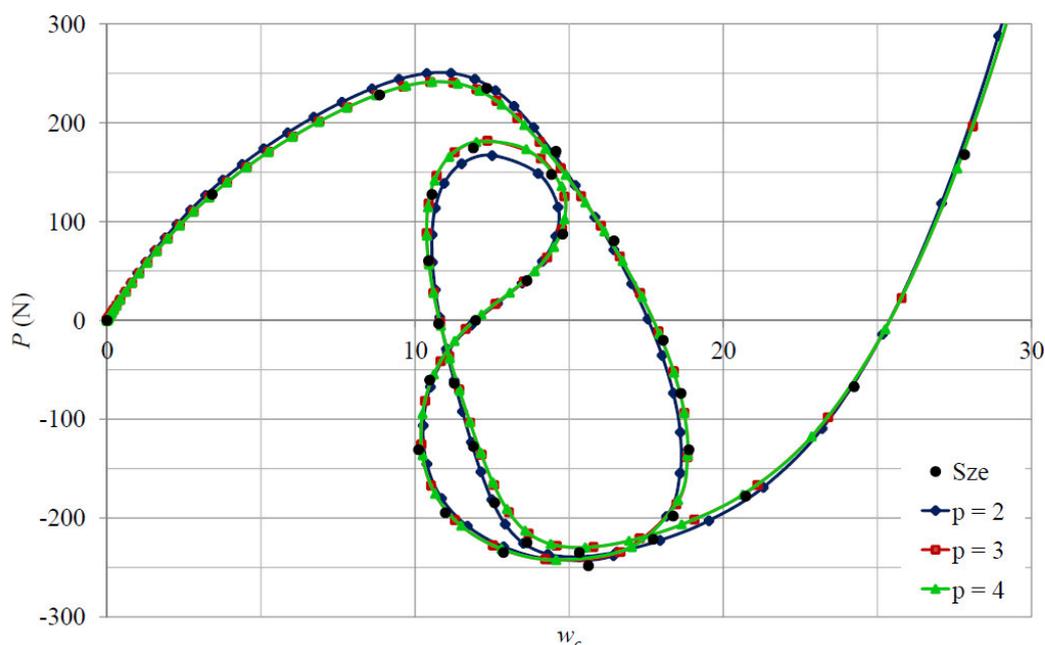
Fonte: Adaptado de Sze *et al.* (2004).

As cascas são consideradas simplesmente apoiadas ( $u = w = 0$ ) nos trechos  $AB$  e  $DE$  e livre em  $AD$  e  $BE$ . Nos problemas envolvendo uma carga centrada serão utilizadas três laminações:  $[(0/90)_{n/2}]$ ,  $[(90/0)_{n/2}]$  e  $[(45/-45)_{(n/4)}]_s$ . Nas cascas sujeitas ao carregamento  $q$

serão aplicados os seguintes esquemas de laminação:  $[(0/90)_{(n/4)}]_s$  e  $[(45/-45)_{(n/4)}]_s$ . Vale ressaltar que, neste modelo, as fibras na direção  $0^\circ$  são paralelas ao eixo longitudinal.

Para verificação da formulação isogeométrica do FAST, um dos exemplos analisados por Sze *et al.* (2004) é apresentado (Figura 68). Uma malha de  $16 \times 16$  elementos quadráticos é modelada pelo autor, que adota um modelo de simetria, analisando, assim, apenas um quarto da estrutura. No presente trabalho utiliza-se uma malha de  $16 \times 16$  elementos quadráticos, cúbicos e de quarta ordem com integração completa em todo o domínio da estrutura para representar o modelo do autor supracitado. Percebe-se que a utilização de um polinômio interpolador de terceira ordem é suficiente para representar o caminho de equilíbrio da estrutura de forma precisa. Portanto, nas análises subsequentes, aplicam-se elementos de terceira ordem com integração completa. O Método do Comprimento de Arco (CRISFIELD, 1991) é utilizado para traçar o caminho de equilíbrio.

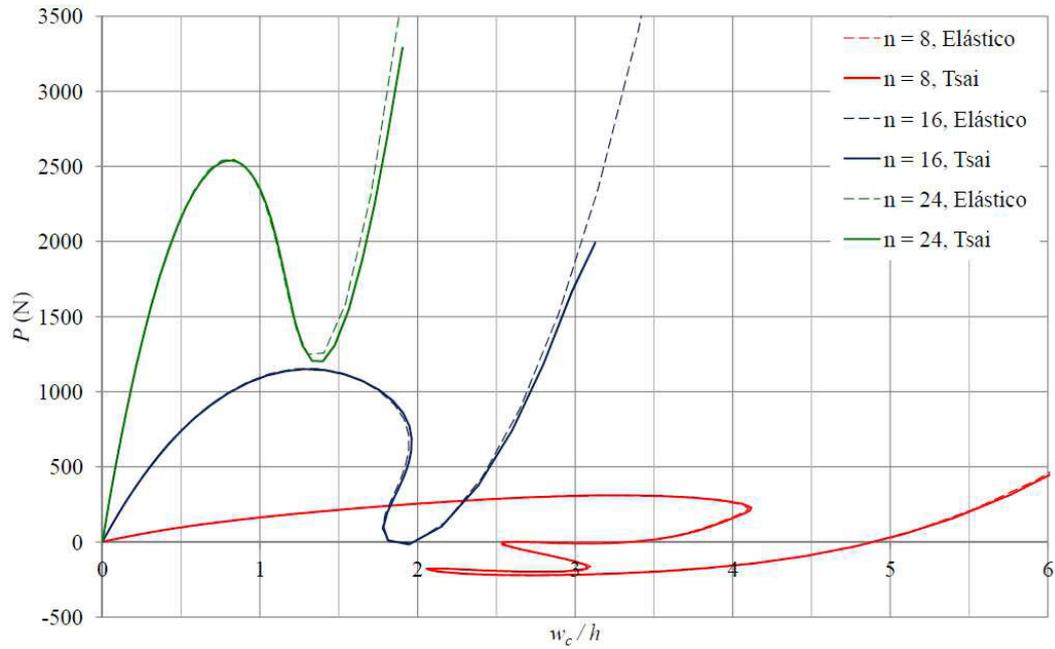
Figura 69 – Caminho de equilíbrio da casca abatida com laminação  $[0/90/0]$  de Sze *et al.* (2004).



Fonte: Elaborada pelo autor.

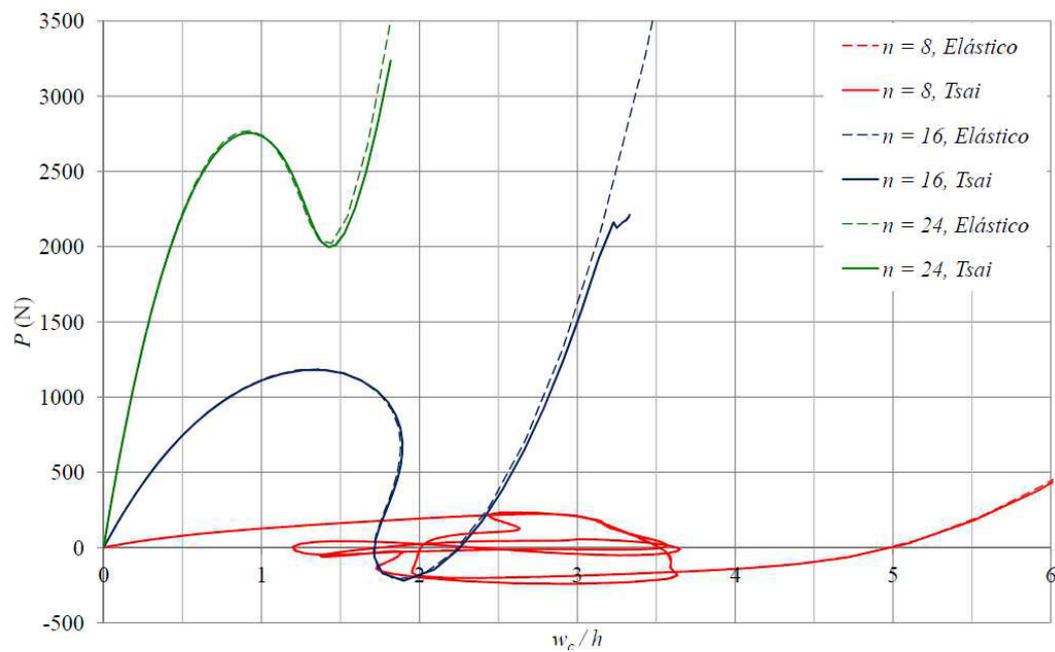
Os resultados obtidos para o primeiro problema proposto, em termos dos deslocamentos do ponto C, são apresentados nas Figura 70 a Figura 72.

Figura 70 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga  $P$  com laminação  $[90/0]_{n/2}$ .



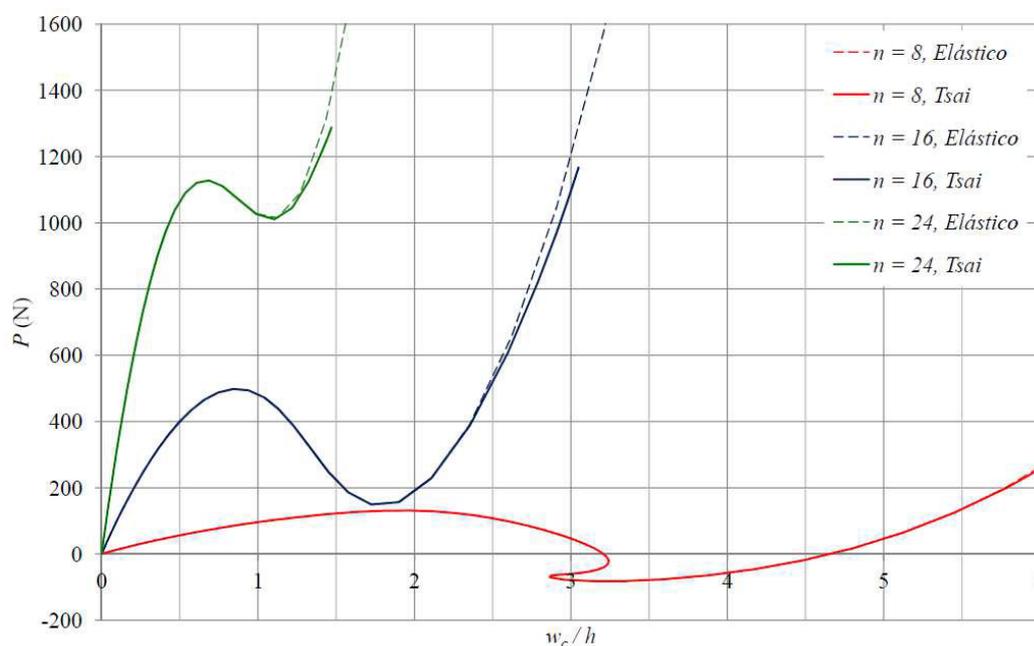
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 71 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga  $P$  com laminação  $[0/90]_{n/2}$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 72 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga  $P$  com laminação  $[(45/-45)_{n/4}]_s$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que a perda de estabilidade da estrutura ocorre por ponto limite e verifica-se a ocorrência dos fenômenos *snap-through* e *snap-back*. Quando a falha do material é incluída, observa-se que a primeira lâmina falha antes do ponto limite e que a carga de pico é ligeiramente menor do que a obtida por uma análise não linear puramente geométrica. A Tabela 23 apresenta os valores das cargas  $P$  nas quais ocorre a falha da primeira lâmina (*First Ply Failure* – FPF) e o ponto limite (lim). Nota-se que a diferença nos valores das cargas nos pontos limites é pequena, mostrando que o efeito da não linearidade geométrica é dominante para este tipo de estrutura. Por outro lado, verifica-se que o esquema de laminação tem uma grande influência sobre a capacidade de carga da casca.

Tabela 23 – Carga referente à FPF e cargas limites (Valores em Newtons).

$n$	$P_{FPF}$	$P_{lim,f}$	$P_{lim,nf}$	$P_{lim,f}/P_{lim,nf}$	$P_{FPF}/P_{lim}$
8	147.48	310.21	310.80	0.998	0.475
12	351.19	595.71	599.16	0.994	0.590
16	574.23	1150.55	1154.17	0.997	0.499
24	1369.32	2539.85	2545.56	0.998	0.539

(a) Laminação  $(0/90)_{n/2}$ .

$n$	$P_{FPF}$	$P_{lim,f}$	$P_{lim,nf}$	$P_{lim,f}/P_{lim,nf}$	$P_{FPF}/P_{lim}$
8	123.23	223.37	224.18	0.996	0.552
12	327.98	648.41	651.36	0.995	0.506
16	646.63	1099.29	1104.71	0.995	0.588
24	1189.58	2755.66	2759.72	0.999	0.432

(b) Laminação  $(90/0)_{n/2}$ .

$n$	$P_{FPF}$	$P_{lim,f}$	$P_{lim,nf}$	$P_{lim,f}/P_{lim,nf}$	$P_{FPF}/P_{lim}$
8	127.03	131.11	131.12	1.000	0.969
12	298.10	302.06	302.07	1.000	0.987
16	229.43	498.33	498.33	1.000	-
24	1089.86	1124.46	1127.90	0.997	0.969

(c) Laminação  $(45/-45)_{(n/4)_s}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo  $P_{lim,f}$  e  $P_{lim,nf}$  as cargas limites considerando a não linearidade física e desprezando-a, respectivamente.

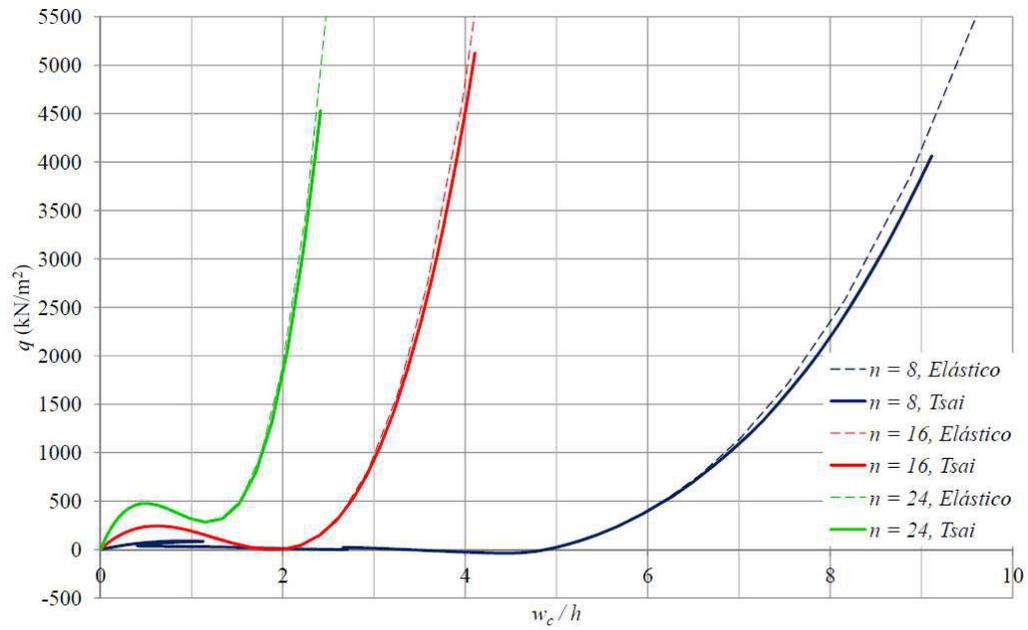
É interessante notar que a falha da primeira lâmina para a laminação *angle-ply* com 16 lâminas ocorre durante o fenômeno de *snap-through*.

Na sequência serão apresentadas as curvas obtidas para as cascas sujeitas ao carregamento uniforme distribuído  $q$  na superfície. A Figura 73 mostra o caminho de equilíbrio da estrutura com laminação  $[(0/90)_{(n/4)}]_s$ . A

Figura 74 apresenta os resultados obtidos para a laminação *angle-ply*. Na Figura 75 é mostrado como a orientação das lâminas em laminados *angle-ply* simétricos do tipo  $[(\theta/-\theta)_2]_s$ , com  $\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  e  $75^\circ$ , pode afetar o comportamento pós-crítico das cascas.

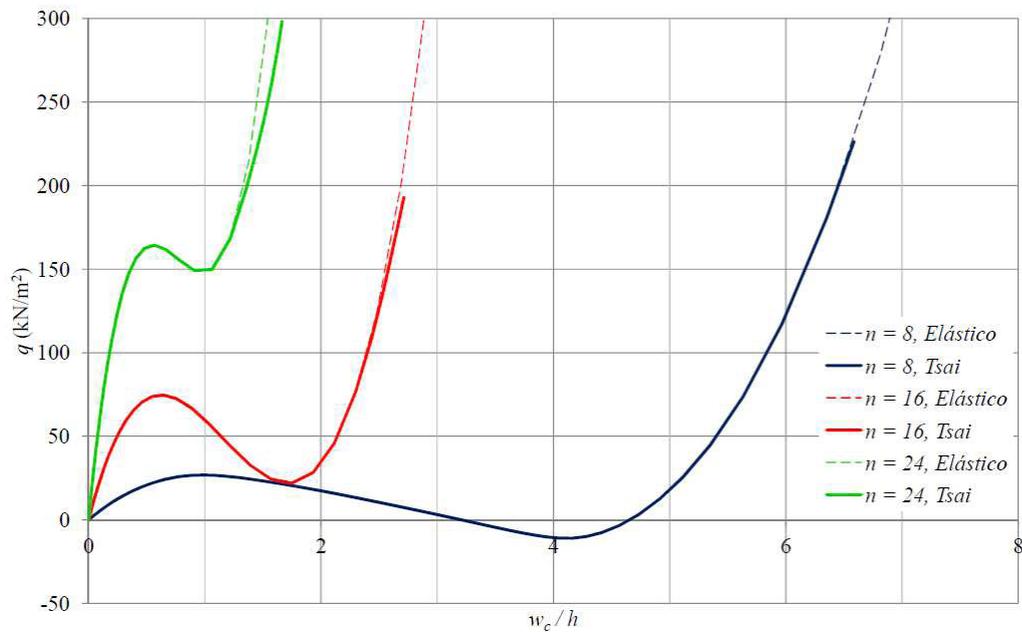
Como no caso de carga anterior, pode-se verificar que o comportamento dominante deste tipo de estrutura é não linear geométrico, uma vez que as curvas considerando a falha do material não diferem significativamente da obtida pelo comportamento elástico do material.

Figura 73 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga  $q$  para a laminação [(0/90) $n/4$ ]<sub>s</sub>.



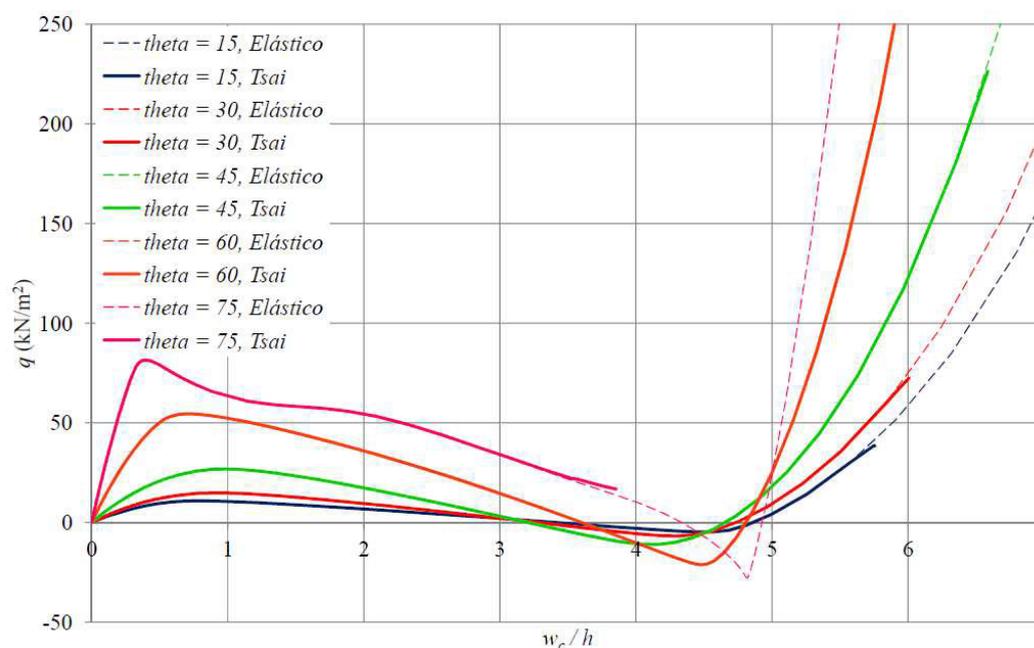
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 74 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga  $q$  para a laminação [(45/-45) $n/4$ ]<sub>s</sub>.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 75 – Caminho de equilíbrio da casca abatida sujeita à carga  $q$  para a laminação  $[(\theta/\theta)_{2}]_s$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se, pela Figura 75, que à medida que  $\theta$  se aproxima de  $90^\circ$  a carga de pico da estrutura tende a aumentar. Isto era de se esperar visto que esta é a direção que leva ao encaminamento do carregamento diretamente para os apoios. Para valores pequenos de  $\theta$  as falhas ocorrem com baixos níveis de carga e deslocamentos elevados, em comparação com a espessura do laminado. Verifica-se, quando  $\theta = 75^\circ$ , o carregamento máximo que a casca suporta é igual à carga de pico.

Um aspecto importante mostrado pelos resultados obtidos (Figura 70 a Figura 75 e Tabela 23) é que seria antieconômico basear o projeto destas estruturas na falha da primeira lâmina (*FPF*), pois esta pode ocorrer para uma carga muito inferior a carga limite, com a estrutura apresentando uma reserva considerável de capacidade de carga até que a falha ocorra. Esta reserva de carga é maior, em se tratando de laminados mais espessos. É interessante notar que as curvas da estrutura elástica e considerando sua degradação pouco diferem até um grande nível de deslocamentos, ou seja, a falha se inicia para um pequeno nível de deslocamentos e progride lentamente.

## 6. CONCLUSÃO

No presente trabalho, buscou-se estudar o efeito da falha progressiva em problemas de estabilidade de placas e cascas abatidas laminadas. Para isto foi utilizada uma abordagem baseada na Análise Isogeométrica considerando deslocamentos e rotações moderadas. Os resultados considerando a falha progressiva foram comparados com os obtidos considerando comportamento elástico linear.

As respostas obtidas pelos modelos de degradação neste trabalho foram comparadas com um modelo mais sofisticado baseado em dano contínuo. No primeiro, nota-se que os caminhos de equilíbrio são mais flexíveis, distanciando-se dos resultados experimentais, pois uma vez que a falha ocorre as propriedades mecânicas são degradadas de forma brusca nos pontos de avaliação, enquanto no segundo busca-se fazer o descarregamento em cada ponto de integração de forma suave.

Contudo, apesar das limitações dos modelos de degradação instantânea, este forneceu resultados bastante precisos, em comparação com os resultados obtidos experimentalmente. Foi verificado nas validações que até mesmo critérios de falha simples, como o Critério da Máxima Tensão, fornecem boas previsões no comportamento não linear das estruturas avaliadas.

Em relação aos exemplos propostos, inicialmente, foi feito um estudo do efeito do esquema de laminação no valor da carga crítica de placas simplesmente apoiadas. Neste estudo a espessura do laminado foi mantida constante e o número de lâminas foi aumentado. Verificou-se que, em exceção a laminados *cross-ply* simétricos, o valor para a carga crítica só pode ser obtido de forma aproximada utilizando algum método numérico.

Do ponto de vista da Análise Isogeométrica, mostrou-se como o refinamento  $p$  pode auxiliar na suavização de efeitos de *locking*, mesmo utilizando-se integração completa. Assim, modelos utilizando polinômios de 3º grau praticamente não apresentaram este problema. Verificou-se também que, para polinômios do 4º e 5º grau, a carga crítica obtida era bastante precisa, mesmo para malhas com poucos graus de liberdade. Deste modo, pode-se concluir que o refinamento  $p$  eleva a precisão da análise e reduz o número de graus de liberdade necessários para isto, sendo uma alternativa mais eficiente que o refinamento  $h$  tradicionalmente utilizando no MEF.

A metodologia de integração reduzida proposta por Adam *et al.* (2014, 2015) para análise isogeométrica linear de placas isotrópicas de Reissner-Mindlin em flexão foi empregada neste trabalho para a flambagem de placas laminadas. Verificou-se que o modelo sugerido pelos autores é bastante eficiente do ponto de vista computacional, além de combater os efeitos do travamento em placas finas, principalmente no caso de polinômios quadráticos onde o travamento é mais significativo. Apesar dos bons resultados obtidos com a integração reduzida, nos exemplos posteriores, preferiu-se utilizar a integração completa, de modo a captar melhor o efeito da degradação do material.

Posteriormente, foram feitos estudos acerca do comportamento não linear geométricos de placas imperfeitas sujeitas à compressão uniaxial e biaxial. Os resultados obtidos foram comparados o trabalho de Le-Mahn & Lee (2014). Mostrou-se que as diferenças obtidas nos resultados dos autores supracitados não se deviam a problemas com a Análise Isogeométrica, mas sim às condições de contorno aplicadas pelos autores supracitados. Conclui-se deste estudo que as condições de contorno aplicadas têm grande influência na capacidade de carga das estruturas.

Na sequência, um estudo de estabilidade de placas quadradas laminadas considerando a falha progressiva foi realizado. Foram feitos estudos de placas sem furos e com furos. Quando se adiciona a não linearidade física, percebe-se que estruturas formadas por placas tendem a ter comportamento não linear geométrico dominante para baixos valores de espessura do laminado. Por outro lado, à medida que a espessura do laminado aumenta, percebe-se forte influência da não linearidade física, levando a carga de ruptura do laminado a valores muito próximos ao valor da carga crítica.

Na presença de furos nestas placas, é importante observar que a capacidade de carga destas placas ainda pode ser reduzida de forma bastante considerável. Verificou-se que a maior perda de capacidade de carga ocorre quando se utilizam laminados espessos. Em placas com 32 lâminas, perda de capacidade de carga é da ordem de 33%, em laminados do tipo *cross-ply* simétrico e de 43% em *angle-ply* simétricos.

Finalmente, em se tratando de cascas abatidas, observa-se que a perda de estabilidade da estrutura ocorre por ponto limite. Quando a falha do material é adicionada ao modelo, a capacidade de carga da estrutura é levemente reduzida. Contudo, a inclusão da não linearidade física não muda, de forma qualitativa, o modo de falha da casca, que é definida

dominantemente pela não linearidade geométrica. Por outro lado, pode-se notar que neste tipo de estrutura o início do processo de falha ocorre para cargas bastante inferiores à carga limite. Deste modo, projetos baseados na falha da primeira lâmina podem se mostrar muito conservadores, uma vez que o laminado pode apresentar uma reserva de carga considerável depois desta falha.

Dos exemplos de validação aos exemplos propostos, verificou-se a eficiência da Análise Isogeométrica em problemas estruturais e, com isto, espera-se que este trabalho contribua para o desenvolvimento e difusão das aplicações desta ferramenta de análise.

### **6.1. Sugestões para Trabalhos Futuros**

- a) Avaliar a formulação isogeométrica em problemas de flambagem de cascas, uma vez que estas estruturas são sensíveis às imperfeições iniciais e a AIG pode prover resultados mais eficientes que elementos finitos com menos graus de liberdade.
- b) Adicionar critérios de falha mais sofisticados no FAST e na rotina do usuário UMAT (*User's MATerial*) do ABAQUS e verificar a influência destas formulações em modelos de degradação instantânea.
- c) Implementar um modelo de dano contínuo no FAST com estes critérios e comparar com os resultados do modelo de dano do ABAQUS.
- d) Realizar estudos da previsão de falha em estruturas laminadas sob carregamentos dinâmicos e considerando a fadiga do material.
- e) Avaliar quais os efeitos provenientes da consideração da delaminação em modelos numéricos e comparar com estudos experimentais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAM, C., BOUABDALLAH, S., ZARROUG, M., MAITOURNAM, H. Improved numerical integration in isogeometric structural elements. Part I: Beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 279, pp. 1-28, 2014.

ADAM, C., BOUABDALLAH, S., ZARROUG, M., MAITOURNAM, H. Improved numerical integration in isogeometric structural elements. Part II: Plates and Shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 279, pp. 1-28, 2014.

AKHRAS, G., LI, W. C. Progressive failure analysis of thick composites plates using the spline finite strip method. *Composite Structures*, vol. 79, pp. 34-43, 2007

BALUCH, M. H., VOYIADJIS, G. Z. Higher order plate equations based on Reissner's formulation of the plate problem, *Arabian Journal of Science and Engineering*, vol. 5, p. 75-80, 1980.

BARROSO, E. S., **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2015.

BAZILEVS, Y., VEIGA, L. B., COTRELL, J. A., HUGHES, T. J. R., SANGALLI, G. Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for  $h$ -refined meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 16, pp. 1031-1090, 2006a.

BAZILEVS, Y., CALO, V. M., ZHANG, Y., HUGHES, T. J. R. Isogeometric fluid-structure interactions analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, vol. 38, pp. 310-322, 2006b.

BENSON, D. J., BAZILEVS, Y., HSU, M. C., HUGHES, T. J. R. Isogeometric shell analysis: the Reissner-Mindlin shell, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 276-289, 2010.

BENSON, D. J., BAZILEVS, Y., HSU, M. C., HUGHES, T. J. R. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 1367-1378, 2011.

BORDEN, M. J., SCOTT, M. A., EVANS, J. A., HUGHES, T. J. R. Isogeometric finite element data structures based on Bèzier extraction of NURBS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 87, pp. 15-47, 2011.

- BLOOMFIELD, M. W., HERENCIA, J. E., WEAVER, P. M. Enhanced two-level optimization of an anisotropic laminated composite plates with strength and buckling constraints. **Thin-Walled Structures**, v. 47, p. 1161-1167, 2009.
- CAMANHO, P. P., DÁVILLA, C. G. Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. **NASA/TM-2002-211737**, 2002.
- CAMANHO, P. P., ARTEIRO, A., MELRO, A. R., CATALANOTTI, G., VOGLER, M. Three-dimensional invariant based failure criteria for fiber reinforced composites, **International Journal of Solid and Structures**, vol. 55, pp. 92-107, 2015.
- CARRERA, E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells, **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol. 9, pp. 87-140, 2002.
- CARRERA, E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells:a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking, **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol. 10, pp. 215-296, 2003.
- CHAJES, A. Principles of structural stability theory, Prentice Hall, 1974.
- CHEN, N., SOARES, C. G. Realiability assessment of post-buckling compressive strength of laminated composite plates and stiffened panels under axial compression, **International Journal of Solid and Structures**, vol. 44, pp. 7167-7182, 2007.
- COTTRELL, J. A., REALI, A. BAZILEVS, Y., HUGHES, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics**, vol. 195, pp. 5257-5296, 2006.
- COTTRELL, J. A., HUGHES, T. J. R., REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics**, vol. 196, pp. 4160-4183, 2007.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA**. John Wiley & Sons Ltd, 2009.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, vol. 1, John Wiley and Sons, 1991.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, vol. 2, John Wiley and Sons, 1997.

- DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**, 1a ed., Oxford University Press, 1994.
- DANTAS JUNIOR, E. M. **Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2014.
- DEGENHARDT, R., KLING, A., ROHWER, K., ORIFICI, A. C., THOMSON, R. S. Design and analysis of stiffened composite panels including post-buckling and collapse, **Computers & Structures**, vol. 86, pp. 919-929, 2008.
- DONADON, M. V., IANNUCCI, L., FALZON, B. G., HODGKINSON, J. M., ALMEIDA, S. F. M. A progressive failure model for composite laminates subject to low velocity impact damage. **Computers & Structures**, vol. 86, pp. 1232-1252, 2008.
- DONADON, M. V., ALMEIDA, S. F. M., ARBELO, M. A., FARIA, A. R. A three-dimensional ply failure model for composites structures. **International Journal of Aerospace Engineering**, 2009.
- ESPATH, L, BRAUN, A, AWRUCH, A, MAGHOUS, S. Nurbs-based three-dimensional analysis of geometrically nonlinear elastic structures. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, vol. 47, pp. 373-390, 2014.
- GARNICH, M. R., AKULA, V. M. K. Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites. **Applied Mechanics Reviews**, vol. 62, 2009.
- HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 47, p. 329–334, 1980.
- HASHIN, Z.; ROTEM, A. A fatigue criterion for fiber-reinforced materials, **Journal of Composite Materials**, vol. 7, p. 448–464, 1973.
- HOULIARA, S., KARAMANOS, S. A. Buckling and post-buckling of long pressurized elastic thin-walled tubes under in-plane bending. **International Journal of Non-linear Mechanics**, vol. 41, pp. 491-511, 2006.
- HUGHES, T. J. R., COTTRELL, J. A., BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite element, NURBS, exact geometry and mesh refinement, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.

- JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**, 2 ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- KADDOUR, A. S., HINTON, M. J. Input data for text cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites. **Journal of Composite Materials**, vol. 46, pp. 2295-2312, 2012.
- KAM, T. Y., SHER, H. F., CHAO, T. N., CHANG, R. R. Predictions of deflection and first-ply failure load of thin laminated composite plates via finite element approach. **International Journal of Solids and Structures**, vol. 33, pp. 375-398, 1996.
- KAPOOR, H., KAPANIA, R. Geometrically nonlinear isogeometric finite element analysis of laminated composite plates. **Composite Structures**, vol. 94, pp. 3434-3447, 2012.
- KIENDL, J., BLETZINGER, K. U., LINHARD, J., WUCHNER, R. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 198, pp. 3902-3914, 2009.
- KIENDL, J., BAZILEVS, Y., HSU, M. C., WUCHNER, R., BLETZINGER, K. U. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures comprised of multiple patches, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 199, pp. 2403-2416, 2010.
- KUIRASHI, A., TSAI, S. W., LIU, K. K. S. A progressive quadratic failure criterion, part B. **Composites, Sciences and Technology**, vol. 62, pp. 1683-1695, 2002.
- LANZI, L. A numerical and experimental investigation on composite stiffened panels into post-buckling, **Thin-Walled Structures**, vol. 42, pp. 1645-1664, 2004.
- LAPCZYK, I., HURTADO, J. A. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. **Composites: Part A**, vol 38, pp. 2333-2341, 2007.
- LE-MANH, T., LEE, J. Postbuckling of laminated composite plates using NURBS-based isogeometric analysis, **Composite Structures**, vol. 109, pp. 286-293, 2014.
- LIEW, K. M., WANG, J., TAN, M. J., RAJENDRAN, S. Postbuckling analysis of laminated composite plates using the mesh-free kp-Ritz method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 195, pp. 551, 570, 2006.

- LIU, B., HAFTKA, R. T., AKGUN, M. A., TODOROKI, A. Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 186, pp. 357-372, 2000.
- LIU, K. S., TSAI, S. W. A progressive quadratic failure criterion for a laminate, **Composite Sciences and Technology**, vol. 58, p. 1023-1032, 1998.
- LOPEZ, R.H., LUERSEN, M.A., CURSI, E.S. Optimization of laminated composites considering different failure criteria, **Composites: Part B**, vol. 40, pp. 731-740, 2009.
- MATZENMILLER, A. LUBLINER, J., TAYLOR, R. L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. **Mechanics of Materials**, vol. 20, pp. 125-152, 1995.
- MIAMÍ P., CAMANHO P. P., MAYUGO J. A., DÁVILA C. G. A thermodynamically consistent damage model for advanced composites, **NASA TM-214282**, 2006.
- MIAMÍ P., CAMANHO P. P., MAYUGO J. A., DÁVILA C. G. A continuum damage model for composite laminates: part I – constitutive model, **Mechanics of Materials**, vol. 39, pp. 897–908, 2007a.
- MIAMÍ P., CAMANHO P. P., MAYUGO J. A., DÁVILA C. G. A continuum damage model for composite laminates: part II – computacional implementation and validation, **Mechanics of Materials**, vol. 39, pp. 909–919, 2007b.
- MORORÓ, L. A. T. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2014.
- MURTY, A. V. K., Vellaichamy, S. A higher-order theory of homogeneous plate flexure, **AIAA Journal**, vol. 26, p. 719-725, 1988.
- NALI, P., CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures, **Composites: Part B**, vol. 43, p. 280-289, 2012.
- NGUYEN-THANH, N. **Isogeometric finite element analysis based on Bèzier extraction of NURBS and T-Splines**. Master's Thesis. Norwegian University of Science and Technology, 2011a.
- NGUYEN-THANH, N., KIENDL, J., NGUYEN-XUAN, H., WUCHNER, R., BLETZINGER, K. U., BAZILEVS, Y., RABCZUK, T. Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 200, pp. 3410-3424, 2011b.

PADHI, G. S., SHENOI, R. A., MOY, S. S. J., HAWKINS, G. L. Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending. **Composite Structures**, vol. 40, pp. 277-291, 1998.

PAL, P., RAY, C. Progressive failure analysis of laminated composite plates by finite element method. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, vol. 21, 2002.

PARENTE JUNIOR, E., HOLANDA, A. S., SILVA, S. M. B. A. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, vol. 38, pp. 505-520, 2006.

PIEGL, L. & TILLER, W. **The NURBS Book** (Monographs in Visual Communication). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition, 1997.

PINHO, S. T., DÁVILA, C. G., CAMANHO, P. P., IANNUCCI, L., ROBINSON, P. Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity, **NASA/TM-2005-213530**, 2005.

PRUSTY, B. G. Progressive failure analysis of laminated unstiffened and stiffened composite panels. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, vol. 24, 2005.

PUCK, A., SCHURMANN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models, **Composites Sciences and Technology**, vol. 58, pp. 1045-1067, 1998.

RASHEED, H. A., YOUSIF, O. H. Stability of anisotropic laminated rings and long cylinders subjected to external hydrostatic pressure, **Journal of Aerospace Engineering**, vol. 8, pp. 129-138, 2005.

REDDY, J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, **International Journal of Solid and Structures**, vol. 20, pp. 881-896, 1984a.

REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 51, p. 745-752, 1984b.

REDDY, Y. S. N., MOORTHY, C. M. D., REDDY, J. N. Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. **International Journal of Non-linear Mechanics**, vol. 30, pp. 629-649, 1995.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. CRC Press, 2004.

ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando análise não linear geométrica e falha progressiva**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2013.

SCIUVA, M., ICARDI, U., VILLANI, M. Failure analysis of composites laminates under large deflection. **Composite Structures**, vol. 40, pp. 239-255, 1998.

SHI, G. A new simple third-order shear deformation theory of plates, **International Journal of Solid and Structures**, vol. 44, p. 4399-4417, 2007.

SHOJAEE, S., VALIZADEH, N., IZADPANAH, E., BUI, T., VU, T. Free vibration and buckling analysis of composite plates using NURBS-based isogeometric finite element method, **Composite Structures**, vol. 94, pp. 1677-1693, 2012.

SIMULIA. **ABAQUS/Standard user's manual**, Version 6.9, Providence, RI, USA, 2009.

SLEIGHT, D. W. Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures. **NASA TP-209107**, 1999.

SODEN, P. D., HINTON, M. J., KADDOUR, A. S. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, **Composites Science and Technology**, vol. 58, p. 1225-1254, 1998.

SODEN, P. D., KADDOUR, A. S., HINTON, M. J. Recommendations for designers and researchers resulting from the world-wide failure exercise, **Failure Criteria in Fiber Reinforced Polymer Composites**, 2004.

SPOTWOOD, S. M., PALAZOTTO, A. N. Progressive failure analysis of a composite shell. **Composite Structures**, vol. 53, pp. 117-131, 2001.

STARNE, J. H., ROUSE, M. Postbuckling and failure characteristics of selected flat rectangular graphite-epoxy plates loaded in compression. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**. 22<sup>nd</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, paper 81-0543, 1981.

SUBRAMANIAN, P. A higher order theory for bending of isotropic plates, **Computers & Structures**, vol. 49 p. 199-204, 1993.

SUNDARESAN, P., SINGH, G., RAO, G. V. Buckling and postbuckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates, **Computers & Structures**, vol. 61, pp. 79-86, 1996.

SZE, K. Y., LIU, H. X., LO, S. H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. **Finite Element Analysis and Design**, vol. 40, pp. 1551-1569, 2004.

SZILARD, R. **Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods**, John Wiley & Sons, 2004.

THAI, C. H. Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 91, pp. 571-603, 2012.

THAI, C. H., FERREIRA, A. J. M., CARRERA, E., NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of composite laminated and sandwich plates using a layerwise deformation theory, **Composite Structures**, vol. 104, pp. 196-214, 2013.

THAI, C. H., NGUYEN-XUAN, H., BORDAS, S. P. A., NGUYEN-TRANH, N., RABCZUK, T. Isogeometric analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation theory, **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, vol. 22, pp. 451-469, 2015.

TRAN, L. V., FERREIRA, A. J. M., NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory, **Composites: Part B**, vol. 51, pp. 368-383, 2013.

TRAN, L. V., LEE, J., NGUYEN-VAN, H., NGUYEN-XUAN, H., WALAB, M. A. Geometrically nonlinear isogeometric analysis of laminated composite plates based on higher order shear deformation theory, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol. 72, pp. 42-52, 2015.

TSAI, S. W., WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials, **Journal of Composite Materials**, vol. 5, pp. 58-80, 1971.

YIN, S., YU, T., BUI T. Q., XIA, S., HIROSE S. A cutout isogeometric analysis for thin laminated composite plates using level sets. **Composite Structures**, vol. 127, pp. 152-164, 2015.

YOKOYAMA, N.O., DONADON, M. V., ALMEIDA, S. F. M. A numerical study on the impact resistance in composite shells using an energy based failure model. **Composite Structures**, vol. 93, pp. 142-152, 2010.

YU, T. T., YIN, S., BUI, T. Q., HIROSE, S. A simple FSDT-based isogeometric analysis for geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 96, pp. 1-10, 2015.

YU, T. T., BUI, T. Q., YIN, S., DOAN, D. H., WU, C. T., DO, T. V., Tanaka, S. On the thermal buckling analysis of functionally graded plates with internal defects using extended isogeometric analysis. **Composite Structures**, vol. 136, pp. 684-695, 2016.